

## O MÉTODO DEA-MALMQUIST E CADEIAS DE MARKOV NO ESTUDO DA DINÂMICA DA PRODUTIVIDADE E EFICIÊNCIA: O CASO DAS REDES DE ENSINO MUNICIPAIS GOIANAS

**Carlos Rosano-Peña**

Professor do Dpto. de Administração. Universidade de Brasília.  
Campus Darcy Ribeiro, ICC Norte, s. B1-576 - CEP: 70910-900 – Brasília- DF- Brasil.  
E-mail: [crosano@unb.br](mailto:crosano@unb.br)

**Pedro Henrique Melo Albuquerque**

Professor do Dpto. de Administração. Universidade de Brasília.  
Campus Darcy Ribeiro, ICC Norte, s. B1-576 - CEP: 70910-900 – Brasília- DF- Brasil.  
E-mail: [pedro.melo.albuquerque@gmail.com](mailto:pedro.melo.albuquerque@gmail.com)

**Cecílio Elias Daher**

Professor do Dpto. de Administração.  
Universidade de Brasília. Campus Darcy Ribeiro, ICC Norte, s. B1-576 - CEP: 70910-900 –  
Brasília- DF- Brasil.  
E-mail: [ceciliodaher@gmail.com](mailto:ceciliodaher@gmail.com)

### RESUMO

O artigo avalia a evolução da produtividade e eficiência dos gastos municipais no ensino do estado de Goiás nos anos de 2005, 2007 e 2009, através do Índice de Produtividade de Malmquist combinado com o DEA e da técnica de Cadeias de Markov. Os resultados revelam o progresso da produtividade e suas causas: a variação da eficiência produtiva e as mudanças tecnológicas. Mostram também que se as redes de ensino mantiverem a dinâmica apresentada nos anos analisados, o número inicial de estados ou classes de eficiência deve ser mantido. Os estados de eficiência não formam clubes ou classes fechadas, todos eles são acessíveis e se comunicam. Porém, o estado mais eficiente é o único que cresceu no longo prazo e isto se dá em razão da redução da participação dos municípios nos outros estados. Isso deve estar refletindo o ganho de produtividade evidenciado e rejeitando hipóteses de tendências de divergência.

**PALAVRAS CHAVE. DEA, Índice de Produtividade de Malmquist (IPM), Cadeias de Markov.**

### ABSTRACT

This article seeks to assess the evolution of the productivity of public spending on education in the municipalities of Goiás in the years 2005, 2007 and 2009, using the Malmquist Productivity Index combined with the method Data Envelopment Analysis (DEA) and the technique of Markov chains. The results reveal the improvement in levels of productivity and its causes: productive efficiency change and technological change. The results also show that, if school systems maintain, the dynamics presented in the analyzed period, the initial number of states must be maintained. The states of efficiency don't form closed classes, they are all accessible and communicate. However, the state more efficient is only that grew up in the long term. This occurs due to the reduction of the participation of municipalities in other states. This should be a reflection of the productivity gain and reject trends of divergence.

**KEYWORDS. Data Envelopment Analysis. Malmquist Productivity Index, Markov Chains.**

## 1. INTRODUÇÃO

Com o intuito de colaborar com a discussão sobre o desempenho do ensino público, em um contexto de escassez e maior necessidade de racionalidade na utilização dos recursos disponíveis, este trabalho tem por objetivo avaliar a evolução da produtividade e da eficiência dos gastos municipais no ensino, através do IPM combinado com o DEA e estimar as tendências impostas por esses resultados.

Mais especificamente, o estudo propõe analisar a dinâmica da produtividade dos gastos dos municípios goianos nos últimos anos (2005, 2007 e 2009), separando as fontes dessa variação em mudanças tecnológicas e mudanças de eficiência. Busca verificar a hipótese de convergência ou divergência na evolução da eficiência, utilizando a técnica de cadeias de Markov.

## 2. MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DA DINÂMICA DA PRODUTIVIDADE E EFICIÊNCIA: ÍNDICE DE PRODUTIVIDADE DE MALMQUIST E CADEIAS DE MARKOV

Para avaliar a evolução da produtividade, quatro números-índices são frequentemente utilizados: o índice geométrico de Divisia, o índice Fisher, o índice de Törnqvist e o índice de produtividade de Malmquist (IPM). Os três primeiros estão associados ao uso dos preços de mercados e ao método paramétrico. Já o IPM é o utilizado pelo método não paramétrico, embora as técnicas paramétricas possam também empregá-lo (Marinho *et al.*, 2000).

O nome do índice de Malmquist se deve ao trabalho de Sten Malmquist, publicado em 1953, que constrói um índice de quantidade utilizando funções distância introduzidas por Shephard (1953) dentro do contexto da teoria do consumidor. Posteriormente, Caves, Christensen e Diewert (1982) inseriram esse índice no contexto da teoria da produção e definiram o IPM orientado aos *inputs* e aos *outputs*, porém sem relacioná-los com o índice de Farrell. Färe, Grosskopf, Lindgren e Roos (1992) foram os primeiros que combinaram o DEA e o IPM.

Para uma unidade qualquer de um grupo de organizações homogêneas que produz o vetor  $y^t$  utilizando o vetor insumo  $x^t$  e a tecnologia  $CPP^t$  em um particular período de tempo  $t$ , Caves *et al.* (1982) definem o IPM como o quociente entre as funções distância da unidade em dois períodos diferentes ( $t$  e  $t+1$ ) tomando como referência a tecnologia (fronteira) do período  $t$ . Considerando a tecnologia sobrescrita e a orientação subscrita, os IPM's orientados aos *inputs* e aos *outputs* são respectivamente:

$$IPM_i^t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = [D_i^t(x^{t+1}, y^{t+1})]/[D_i^t(x^t, y^t)] \quad (1)$$

$$IPM_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = [D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})]/[D_o^t(x^t, y^t)] \quad (2)$$

As Equações (1) e (2) expressam a evolução da eficiência da unidade avaliada do período  $t$  para  $t+1$  em relação à melhor prática do período  $t$ . Visto que se toma como referência a mesma fronteira eficiente, o IPM mostra o desempenho da produtividade total dos fatores (PTF).

Como  $IPM^t \geq 1$ : a) valores superiores a um indicam que a PTF do período  $t+1$  melhorou em relação ao período  $t$ , pois existe uma redução da distância entre a produção observada e o produto potencial em  $t$ ; b) valores unitários mostram que a distância se mantém constante entre  $t$  e  $t+1$ ; e c) valores inferiores a um que a PTF piorou.

Também é possível de calcular o IPM tomando-se como referência a tecnologia do período  $t+1$ , que pode deslocar-se para cima com o tempo devido às inovações técnicas e organizacionais, ou seja, ao progresso tecnológico. Calculado dessa maneira, o índice não necessariamente será igual ao anterior. Na tentativa de superar essa divergência e seguindo o princípio do índice ideal de Fisher, o IPM é definido como a média geométrica entre  $IPM^t$  e  $IPM^{t+1}$ , ou melhor,

$$IPM_i^{t,t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = [IPM_i^t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) * IPM_i^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t)]^{1/2} = \\ = [[D_i^t(x^{t+1}, y^{t+1})/D_i^t(x^t, y^t)] * [D_i^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})/D_i^{t+1}(x^t, y^t)]]^{1/2} \quad (3)$$

$$IPM_o^{t,t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = [IPM_o^t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) * IPM_o^{t+1}(x^{t+1}, y^t, x^t, y^t)]^{1/2} =$$

$$= [[D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})/D_o^t(x^t, y^t)] * [D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})/D_o^{t+1}(x^t, y^t)]]^{1/2} \quad (4)$$

Nota-se que o cálculo do IPM envolve quatro funções distância. Considerando-se que a função distância é igual ao recíproco do índice de eficiência de Farrell calculado pelo DEA, as funções distância podem ser encontradas pelo índice  $EP_t^t$  - a eficiência produtiva no período subscrito com respeito à fronteira eficiente do período sobrescrito, calculado através dos problemas de programação linear (5) e (6), desenvolvido por Charnes *et al.* (1978) para uma tecnologia com retorno constante de escala (RCE). A Equação (3) mostra o problema de programação linear para o modelo CCR-OO, orientado aos produtos e a (5) apresenta o modelo CCR-IO, orientado aos insumos.

$$Max H_o = \sum_{r=1}^m u_r y_{ro}. \text{ s. a. } \sum_{i=1}^n v_i x_{io} = 1; \sum_{r=1}^m u_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^n v_i x_{ij}; u_r, v_i \geq \varepsilon; \quad (5)$$

$$Min \phi_o = \sum_{r=1}^m v_i x_{io}. \text{ s. a. } \sum_{i=1}^n u_r y_{ro} = 1; \sum_{r=1}^m u_r y_{rj} \geq \sum_{i=1}^n v_i x_{ij}; u_r, v_i \geq \varepsilon. \quad (6)$$

Assim, a partir de (4), deduz-se (7) (a definição da orientação aos *inputs* é afim).

$$IPM_o^{t,t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = [[EP_t^t/EP_{t+1}^t] * [EP_{t+1}^{t+1}/EP_{t+1}^{t+1}]]^{1/2} \quad (7)$$

Färeet *al.* (1992), fazendo a seguinte manipulação, chegaram a Equação (8):

$$IPM_o^{t,t+1}(\cdot) = \left[ \frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} \frac{D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^t(x^t, y^t)} * \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^{t+1}(x^t, y^t)} \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right]^{1/2} \\ = \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} \left[ \frac{D_o^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{D_o^t(x^t, y^t)}{D_o^{t+1}(x^t, y^t)} \right]^{1/2} \quad (8)$$

A Equação (8), expressa em termos de eficiência produtiva, pode ser definida como:

$$IPM_o^{t, t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{EP_t^t}{EP_{t+1}^{t+1}} \left[ \frac{EP_{t+1}^{t+1}}{EP_{t+1}^t} * \frac{EP_t^{t+1}}{EP_t^t} \right]^{1/2} \quad (9)$$

Dessa forma, o IPM, diferentemente dos outros índices, permite que se separe a evolução da eficiência produtiva dos deslocamentos da fronteira. Os primeiros quocientes do lado direito de (8) e (9)  $\left( \frac{D_o^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_o^t(x^t, y^t)} = \frac{EP_t^t}{EP_{t+1}^{t+1}} \right)$  medem o quão distante a unidade avaliada encontra-se da fronteira eficiente entre os períodos  $t$  e  $t+1$ , captando a evolução da eficiência produtiva, o efeito chamado *catching-up*. Resultam da capacidade individual da unidade avaliada de gerir a incorporação do progresso técnico e organizacional ao processo produtivo, podendo ser menor, igual ou maior em função da queda, manutenção ou melhoria na eficiência produtiva respectivamente.

Já os segundos quocientes de (8) e (9) captam o deslocamento médio geométrico da fronteira tecnológica entre os dois períodos avaliados em relação ao nível de *inputs*  $x^t$  e  $x^{t+1}$ . Representam a mudança tecnológica (técnica e organizacional). Se o deslocamento for maior que um, indicará progresso resultante da inovação no setor e, se menor, retrocesso. Por conseguinte, o desempenho da PTF deve ser influenciado pelas mudanças da eficiência produtiva (ME) e pelas mudanças tecnológicas (MT). Ambos podem evoluir em sentidos opostos, um invalidando o desempenho do outro; ou agir no mesmo sentido, um somando-se ao outro.

Essa decomposição do IPM ainda pode ser estendida ao se incluir o modelo BCC, desenvolvido por Banker, Charnes e Cooper (1984) para uma tecnologia com retornos variáveis de escala (RVE). O

modelo BCC permite isolar a parte da ineficiência produtiva que se deve à ineficiência técnica no sentido estrito (eficiência técnica pura - ET), eliminando o componente devido a um porte de produção inadequado. Assim, a distância existente entre as fronteiras CCR=EP e BCC=ET identifica a ineficiência de escala: EE=EP/ET.

O resultado dessa extensão é a decomposição da mudança da eficiência produtiva (ME) em mudança da eficiência técnica pura (MET) e mudança de eficiência de escala (MEE). Ou seja, segundo Färe, Grosskopf, Norris e Zhang (1994):

$$ME = \frac{EP_t^t}{EP_{t+1}^{t+1}} = \frac{ET_t^t}{ET_{t+1}^{t+1}} \frac{EE_t^t}{EE_{t+1}^{t+1}} \quad (10)$$

em que:

$MET = \frac{ET_t^t}{ET_{t+1}^{t+1}}$  representa a relação das funções distância avaliada em uma tecnologia sob RVE.  $MET \leq 1$  em função da redução, estagnação ou incremento da eficiência técnica pura entre os períodos t e t+1.

$MEE = \frac{EE_t^t}{EE_{t+1}^{t+1}} = \frac{EP_t^t}{ET_t^t} \frac{EP_{t+1}^{t+1}}{ET_{t+1}^{t+1}}$  expressa as mudanças de escala de operações em relação ao tamanho ótimo. Portanto,  $MEE > 1$  significa que a unidade avaliada está mais perto da escala de produção ótima no período t+1, e mais longe se  $MEE < 1$ .

Consequentemente, a versão completa do IPM é dada por:

$$IPM_o^{t,t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{ET_t^t}{ET_{t+1}^{t+1}} \frac{EE_t^t}{EE_{t+1}^{t+1}} \left[ \frac{EP_{t+1}^{t+1}}{EP_t^t} * \frac{EP_{t+1}^{t+1}}{EP_t^t} \right]^{1/2} = ME * MT = MET * MEE * MT \quad (11)$$

Com essa decomposição pode-se determinar que componente (MET, MEE e MT) constitui a principal fonte de crescimento ou retrocesso da PTF.

Outra questão que emana desta investigação é o teste convergência versus divergência, ou seja, verificar se o progresso na eficiência é capaz de reduzir as diferenças entre as unidades eficientes e os ineficientes, se o hiato entre as melhores e piores práticas está ou não sendo minimizado no tempo.

As pesquisas sobre disparidades e convergência de indicadores entre países e regiões têm ocupado um amplo espaço na literatura econômica dos últimos anos. Aqui, destaca-se a de Barro e Sala-I-Martin (1991, 1992 e 1995), que trabalham com dois tipos de convergência: a convergência sigma ( $\sigma$ ) e a convergência beta ( $\beta$ ), sendo que esta última pode ser absoluta (incondicional) ou condicional. A convergência sigma é testada por meio da dispersão do indicador, de tal forma que se a dispersão se reduz ao longo do tempo, conclui-se que existe convergência. A convergência beta é examinada por meio de uma regressão do tipo *cross-section*, utilizando-se como variável dependente a taxa de crescimento do indicador para o período de análise e o nível inicial desse indicador como variável explicativa. Nessa regressão, um coeficiente negativo e estatisticamente significativo indica que regiões de menor desempenho crescem, em média, mais rapidamente que as regiões de maior performance: uma evidência a favor da hipótese de convergência  $\beta$ . Ela responde (no caso, do índice de eficiência dos municípios selecionados) se uma situação de ineficiência relativa num momento dado tende a melhorar no tempo, isto é, se as regiões que partem de posições ineficientes têm índices de produtividade mais elevados do que as mais eficientes, tendendo a atingir as melhores práticas. Ela é absoluta quando o indicador das regiões converge para um único estado estacionário independentemente de suas condições iniciais. É condicional quando existem vários equilíbrios estáveis de longo prazo em função dos pontos de partida e das características estruturais das diferentes regiões.

Apesar do grande número de pesquisas aplicadas para países e regiões, essas metodologias são alvo de críticas em relação tanto aos seus fundamentos teóricos quanto aos seus resultados empíricos (Friedman, 1992 e Quah, 1993). Para esses autores os resultados desses estudos podem ter sido influenciados pela Falácia de Galton. A partir disso, Quah (1993a) recomenda o uso de Cadeia de Markov.

A vantagem dessa metodologia é que ela formula uma lei de movimento estocástico para toda a distribuição dos estados (classes) de eficiência com base nos períodos em análise. Essa dinâmica de

transição inter-classes permite verificar a evolução da posição relativa das regiões dentro da distribuição regional da eficiência, se está, ou não, ocorrendo convergência absoluta, o tempo necessário para alcançá-la, e a formação, ou não, de clubes de convergência.

Fochezatto e Stülp (2008), Laurini, Andrade e Pereira (2003), Mossi *et al* (2003) e Pontual e Porto (2004) são exemplos de trabalhos que aplicaram Cadeia de Markov para analisar a evolução das disparidades regionais do Brasil, de vários estados e diferentes setores da economia.

Nesses estudos foi utilizada a Cadeia de Markov de primeira ordem, que requer duas distribuições da variável de interesse: uma referente ao início e a outra, ao final do período considerado no estudo. Todavia, o uso de cadeias de Markov de ordem superior é de grande importância, pois, o desempenho da eficiência das unidades analisadas pode ser condicionalmente dependente da sequência de estados de eficiência em vários anos anteriores. Neste trabalho, é utilizado um processo de Markov de segunda ordem.

Ao se aplicar Cadeia de Markov em tempo discreto, é preciso inicialmente fazer a ponderação dos índices de eficiência, tanto do período inicial (formado pelos dois primeiros anos estudados) como do final, em relação à média amostral que foi considerada como sendo igual a um. Isso permite a classificação dos municípios em termos de sua posição relativa a essa medida, sendo que cada classe (ou estado de eficiência) deve apresentar a mesma amplitude ( $h$ ) nos dois períodos. Como mostra Fochezatto e Stülp (2008), não há uma regra única para determinar a amplitude de classes, apenas critérios práticos. Um deles é dado pela Equação (12), sendo adequado mesmo quando as distribuições não seguem uma distribuição normal

$$h=2,72sn^{-1/3} \quad (12)$$

onde  $s$  é o desvio-padrão da distribuição e  $n$  é o número de observações.

Por exemplo, os municípios da rede de ensino podem caracterizar-se inicialmente como eficientes (E), ineficientes (I) ou muito ineficientes (M) em relação à média: três estados exaustivos e mutuamente exclusivos. Entretanto, essa classificação pode-se transformar em um processo de Markov de segunda ordem, definindo o conjunto de estados  $X$  no período inicial  $t$  como se segue:

$$X_t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Estado EE} - \text{O município está na classe E tanto neste ano como no anterior} \\ \text{Estado EI} - \text{O município está na classe I neste ano e na classe E no ano anterior} \\ \text{Estado EM} - \text{O município está na classe M neste ano e na classe E no ano anterior} \\ \text{Estado IE} - \text{O município está na classe E neste ano e na classe I no ano anterior} \\ \text{Estado II} - \text{O município está na classe I tanto neste ano como no anterior} \\ \text{Estado IM} - \text{O município está na classe M neste ano e na classe I no ano anterior} \\ \text{Estado ME} - \text{O município está na classe E neste ano e na classe M no ano anterior} \\ \text{Estado MI} - \text{O município está na classe I neste ano e na classe M no ano anterior} \\ \text{Estado MM} - \text{O município está na classe M tanto neste ano como no anterior} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Com esse agrupamento, determinam-se, de modo empírico, quais são as transições dos municípios entre essas classes nos dois períodos, constituindo-se, desse modo, uma matriz de probabilidades de transição, denominada matriz de Markov ( $M$ ). Os elementos da matriz representam as probabilidades condicionais de se estar em um estado futuro ( $j$ ) dado o estado atual ( $i$ ). Assim,  $P_{ij} = P(\text{EE/IE})$  representa a probabilidade de que o estado atual seja eficiente, dado que os dois anos anteriores tenham sido, sequencialmente, ineficiente e eficiente. Por definição as probabilidades são fixas, independentes ao longo do tempo e  $\sum_j P_{ij} = 1$ .

Dada a Matriz de Markov, a distribuição de frequência dos estados de eficiência no tempo  $t+1$  é calculada através de um sistema de equações de diferenças, descrito por (14):

$$X_{t+1} = M X_t \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} EE_{t+1} \\ EI_{t+1} \\ EM_{t+1} \\ IE_{t+1} \\ II_{t+1} \\ IM_{t+1} \\ ME_{t+1} \\ MI_{t+1} \\ MM_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\langle EE|EE \rangle} P_{\langle EI|EE \rangle} P_{\langle EM|EE \rangle} P_{\langle IE|EE \rangle} P_{\langle II|EE \rangle} P_{\langle IM|EE \rangle} P_{\langle ME|EE \rangle} P_{\langle MI|EE \rangle} P_{\langle MM|EE \rangle} \\ P_{\langle EE|EI \rangle} P_{\langle EI|EI \rangle} P_{\langle EM|EI \rangle} P_{\langle IE|EI \rangle} P_{\langle II|EI \rangle} P_{\langle IM|EI \rangle} P_{\langle ME|EI \rangle} P_{\langle MI|EI \rangle} P_{\langle MM|EI \rangle} \\ P_{\langle EE|EM \rangle} P_{\langle EI|EM \rangle} P_{\langle EM|EM \rangle} P_{\langle IE|EM \rangle} P_{\langle II|EM \rangle} P_{\langle IM|EM \rangle} P_{\langle ME|EM \rangle} P_{\langle MI|EM \rangle} P_{\langle MM|EM \rangle} \\ P_{\langle EE|IE \rangle} P_{\langle EI|IE \rangle} P_{\langle EM|IE \rangle} P_{\langle IE|IE \rangle} P_{\langle II|IE \rangle} P_{\langle IM|IE \rangle} P_{\langle ME|IE \rangle} P_{\langle MI|IE \rangle} P_{\langle MM|IE \rangle} \\ P_{\langle EE|II \rangle} P_{\langle EI|II \rangle} P_{\langle EM|II \rangle} P_{\langle IE|II \rangle} P_{\langle II|II \rangle} P_{\langle IM|II \rangle} P_{\langle ME|II \rangle} P_{\langle MI|II \rangle} P_{\langle MM|II \rangle} \\ P_{\langle EE|IM \rangle} P_{\langle EI|IM \rangle} P_{\langle EM|IM \rangle} P_{\langle IE|IM \rangle} P_{\langle II|IM \rangle} P_{\langle IM|IM \rangle} P_{\langle ME|IM \rangle} P_{\langle MI|IM \rangle} P_{\langle MM|IM \rangle} \\ P_{\langle EE|ME \rangle} P_{\langle EI|ME \rangle} P_{\langle EM|ME \rangle} P_{\langle IE|ME \rangle} P_{\langle II|ME \rangle} P_{\langle IM|ME \rangle} P_{\langle ME|ME \rangle} P_{\langle MI|ME \rangle} P_{\langle MM|ME \rangle} \\ P_{\langle EE|MI \rangle} P_{\langle EI|MI \rangle} P_{\langle EM|MI \rangle} P_{\langle IE|MI \rangle} P_{\langle II|MI \rangle} P_{\langle IM|MI \rangle} P_{\langle ME|MI \rangle} P_{\langle MI|MI \rangle} P_{\langle MM|MI \rangle} \\ P_{\langle EE|MM \rangle} P_{\langle EI|MM \rangle} P_{\langle EM|MM \rangle} P_{\langle IE|MM \rangle} P_{\langle II|MM \rangle} P_{\langle IM|MM \rangle} P_{\langle ME|MM \rangle} P_{\langle MI|MM \rangle} P_{\langle MM|MM \rangle} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EE_t \\ EI_t \\ EM_t \\ IE_t \\ II_t \\ IM_t \\ ME_t \\ MI_t \\ MM_t \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema de equações (através dos autovalores e autovetores da matriz) permite projetar a distribuição de probabilidade para n períodos futuros ( $X_{t+n} = M^n X_t$ ), determinar as probabilidades de estado no equilíbrio (estado estacionário) quando  $n \rightarrow \infty$ , assim como, calcular a velocidade com que essa estabilização é alcançada.

### 3. PARÂMETROS DO MODELO

Este estudo sobre a produtividade dos gastos públicos nas redes municipais de ensino exige, inicialmente, a definição de um modelo conceitual que permita explicar seu funcionamento. Assim, a educação é contemplada como qualquer outra função de natureza produtiva, representada pela relação técnica entre um conjunto de fatores produtivos (*inputs*) que se combinam adequadamente para obter certos resultados (*outputs*).

Os *inputs* considerados foram os gastos municipais em educação com: recursos humanos ( $I_1$ ), outras despesas correntes ( $I_2$ ) e investimentos ( $I_3$ ). Esses dados foram obtidos dos Relatórios Municipais do Sistema de Informações sobre Orçamentos Públicos em Educação (SIOPE, 2010).

Os *outputs* das redes municipais selecionados foram cinco: 1) taxa de aprovação na 4ª série -  $O_1$ ; 2) taxa de aprovação na 8ª série -  $O_2$ ; 3) nota média padronizada em Língua Portuguesa e Matemática da Prova Brasil na 4ª série -  $O_3$ ; 4) nota média padronizada em Língua Portuguesa e Matemática da Prova Brasil na 8ª série -  $O_4$ ; 5) número de matrículas na educação infantil, especial, de jovens e adultos e convencional no ensino fundamental -  $O_5$ . Os dois primeiros *outputs* mensuram a natureza qualitativa e evidenciam os níveis de reprovação e abandono escolar; os restantes, os aspectos quantitativos. As informações foram obtidas da página web do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP-2010) e (INEP-2009) e nos poucos casos de ausência de algum dado foi utilizada a média da rede pública.

Os valores dos *inputs* e *outputs* correspondem aos últimos anos disponíveis: 2005, 2007 e 2009, e contemplam a grande maioria dos 246 municípios goianos existentes, como pode observar-se na Tabela 1. Esses valores indicam que tanto os gastos públicos municipais em educação quanto os resultados escolares avançaram expressivamente. Mas como se comportou a eficiência e a produtividade e que tendência impõe esse comportamento?

Tabela 1. Estatística descritiva das variáveis no período de estudo

	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$O_5$
2005 municípios	211	211	211	211	211	119	119	211
Média	3264499.12	1396264.70	182659.64	0.86	4.54	0.81	4.35	2805
Desvio padrão	14887527.61	2298957.73	491419.40	0.08	0.39	0.08	0.36	7854
Mínimo	11517.00	34435.49	0.00	0.54	3.22	0.43	3.48	58
Máximo	208810783.98	22666528.19	4158031.04	1.00	5.80	0.96	5.58	97700
Soma	688809314.73	294611851.55	38541184.48					591938
2007 municípios	235	235	235	235	235	136	136	235
Média	4028720.64	1835456.75	235623.17	0.90	4.64	0.85	4.43	2506
Desvio padrão	15407450.73	3578798.34	763894.71	0.06	0.45	0.08	0.43	7176
Mínimo	72000.00	99521.08	0.00	0.71	3.54	0.58	3.31	59



Máximo	215600493.78	44780626.08	9081293.60	1.00	6.75	0.99	5.88	92227
Soma	946749349.79	431332336.91	55371445.67					589017
<i>2009 municípios</i>	231	231	231	231	231	142	142	231
Média	5644510.59	2051289.84	419242.37	0.90	5.18	0.84	4.60	2667
Desvio padrão	22628254.72	4263400.94	1427226.33	0.06	0.51	0.08	0.43	7350
Mínimo	267420.91	340700.56	0.00	0.70	3.87	0.56	3.45	84
Máximo	326020586.53	56419231.38	16245968.71	1.00	7.21	1.00	5.87	92686
Soma	1303881945.66	473847952.33	96844986.77					615983

#### 4. RESULTADOS

As variáveis selecionadas permitem fazer a comparação dinâmica, na qual cada município tem a sua PTF avaliada em relação à evolução da PTF do conjunto ao longo do tempo escolhido. A partir da Equação (11) e dos dados obtidos, determinaram-se os índices de variação da eficiência produtiva (ME), pura (MET), de escala (MEE), de mudanças tecnológicas (MT) e de produtividade de Malmquist (IPM), encontrados resumidamente na Tabela 2. Aqui, os valores inferiores à unidade indicam a queda, ou seja, variação negativa; os superiores a um correspondem ao crescimento; os iguais a um mostram que não houve mudanças na PTF.

A média geométrica agregada do IPM dos municípios no período 2005-2007 indica uma elevação de 19,2% da produtividade, acompanhada pelo incremento geral dos gastos municipais em educação de 40%. Esse crescimento do IPM se deu em razão da evolução positiva da tecnologia (42,9%), cujo efeito foi amortecido pela evolução negativa da eficiência técnica pura (-2%) e de escala (-15%). De acordo com a distribuição espacial dos índices de produtividade de Malmquist (IPM) no período 2005-2007, observada na Figura 1, a maioria dos municípios mostrou progresso nesse índice, mas percebe-se uma grande dispersão, apesar de as redes de ensino serem idênticas em suas características estruturais. A partir desse mapa, fica evidente que os municípios com maiores problemas foram Piracanjuba e Aruanã.

Tabelas2. Estatística Descritiva dos Índices

		Índice de produtividade de Malmquist	Mudança tecnológica	Mudança da eficiência produtiva	Mudança da eficiência técnica pura	Mudança da eficiência de escala
Período 2005- 2007	Média geométrica	1.19	1.43	0.83	0.98	0.85
	Média	1.226	1.628	0.907	1.025	0.953
	Desvio padrão	0.489	1.682	0.602	0.493	0.870
	Mínimo	0.795	0.181	0.082	0.062	0.136
	Máximo	7.298	20.909	8.532	8.025	10.057
Período 2007- 2009	Média geométrica	1.92	1.27	1.51	1.02	1.48
	Média	1.988	1.437	1.688	1.110	1.639
	Desvio padrão	0.527	1.310	1.054	0.932	0.973
	Mínimo	0.946	0.166	0.163	0.056	0.323
	Máximo	4.724	15.680	11.770	11.029	10.592

No que se refere ao período 2007-2009, nota-se um crescimento de 92% na média geométrica agregada do IPM das unidades analisadas, também, acompanhada por um incremento geral dos gastos municipais em educação de 30%. O progresso do IPM se apresenta em razão da variação positiva dos índices de eficiência produtiva (50,57%) e das inovações tecnológicas (27,5%). A distribuição espacial dos IPM da Figura 2 evidencia que a maioria dos municípios mostrou progresso nesse índice e destaca que existe ainda uma heterogeneidade muito grande. O mapa confirma que único município com problemas é Moiporá.

O ganho de produtividade observado deve estar associado à divulgação dos dados dos municípios e das avaliações externas, à busca de melhores resultados e à clara transferência e difusão das tecnologias educacionais. Como argumenta Oshiro e Scorzafave (2011), a divulgação funciona como uma forma de responsabilizar as escolas e seus funcionários pelo desempenho dos alunos, gera pressão

por parte dos pais e da comunidade como um todo e, desta forma, criar incentivos para melhoria. O relacionamento entre as redes municipais e estaduais de ensino passa ser, até certo ponto, competitivo, mas não cria fortes barreiras, que eventualmente pudessem dificultar a troca de experiências. Um exemplo disto é o Projeto Emergencial de Licenciatura Plena Parcelada (LPP) que, atendendo à determinação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDBEN, que trata da necessidade de capacitação, em nível superior, dos docentes da educação básica até o ano de 2006, foi executado desde 1999 pela Universidade Estadual de Goiás (UEG) em parceria com a Secretaria de Estado da Educação, a Associação Goiana dos Municípios – AGM e sindicatos de professores. Segundo dados do site da UEG, os cursos da LPP atenderam a mais de 25.150 professores/alunos de 240 municípios do Estado.

Para testar a hipótese de tendências de convergência ou divergência foram considerados 209 municípios. Não entraram aqueles que a falta de dados inviabilizou o cálculo dos três índices e foram eliminados os que obtiveram índices muito baixos - considerados *outliers*. Este procedimento permitiu, a partir da Equação (12), encontrar um valor médio para os três anos de  $h$  de 0,02 e construir nove classes, conforme o conjunto de estados (13). A classificação em torno da média considerou os três níveis de eficiência: abaixo de 0,9 da média (equivalente a  $ET=0,87$ ) – município muito ineficiente M; entre 0,9 e 0,97 (equivalente a  $ET=0,93$ ) - ineficiente I; e acima de 0,97 - eficiente E. A Figura 3 destaca os municípios de acordo com o estrato de eficiência ao qual faziam parte no período 2005-07 (distribuição inicial). A partir desse mapa, os municípios com maiores problemas foram Maurilândia, Simolândia e Teresina de Goiás, que ficaram dentro do estado mais ineficiente. As probabilidades de transição entre os nove estados-classes são proporcionadas pelos elementos da matriz de Markov encontrada na Tabela 3.

Tabela 3. Matriz de transição da eficiência dos municípios goianos

		Estado do sistema no período seguinte								
		EE	EI	EM	IE	II	IM	ME	MI	MM
Estado do sistema no período atual	EE	0.8952	0.0952	0.0095	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	EI	0.0000	0.0000	0.0000	0.5517	0.4138	0.0345	0.0000	0.0000	0.0000
	EM	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3333	0.6667
	IE	0.7813	0.1875	0.0313	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	II	0.0000	0.0000	0.0000	0.3684	0.4737	0.1579	0.0000	0.0000	0.0000
	IM	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7143	0.1429	0.1429
	ME	0.6000	0.4000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	MI	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	MM	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6667	0.3333

A Matriz mostra que não existem estados absorventes, ou seja, não há certeza, em nenhum das classes, de permanência no estado atual no período seguinte ( $P_{jj} \neq 1$ ). A maior probabilidade é dada pelo elemento  $P_{11}=P_{EE/EE}= 89,5\%$ . Ela indica a chance de um município que estava na classe EE permanecer nessa classe e representa a melhor situação da matriz. O pior caso possível é  $P_{99}=P_{MM/MM}=33,3\%$ , advertindo sobre a existência de insuficientes oportunidades para que os municípios mais ineficientes melhorem suas posições relativas, com apenas 66.6% de chance de melhorar a situação no período seguinte.

Na Tabela 4 encontram-se os valores da distribuição inicial dos dados e a solução do sistema para  $n=1,2,\dots,8$  períodos à frente até chegar à probabilidade de estados no equilíbrio (Steady state-  $\pi$ ). Observa-se que a solução de equilíbrio confirma a existência de uma matriz de transição irreduzível, ou seja, o número inicial de estados foi mantido. Os estados de eficiência não formam classes (clubes) fechadas, todos eles são acessíveis e se comunicam. Portanto, ao manter-se a tendência observada no período analisando, a probabilidade de longo prazo de um município ocupar uma das nove categorias de eficiência é dada pelo vetor  $\pi$  – *steady state*. Esse resultado indica não haver convergência dos sistemas municipais de educação para um padrão único de eficiência no longo prazo. Porém, é importante notar a aproximação e a redução das disparidades das redes, pois a maioria dos municípios (68,8%) tende para o estado EE. Além disso, ele é o único estado que cresceu (de 50,2 para 68,8) e isto se dá em razão da redução da participação dos municípios nos outros estados, o que deve estar refletindo o ganho de



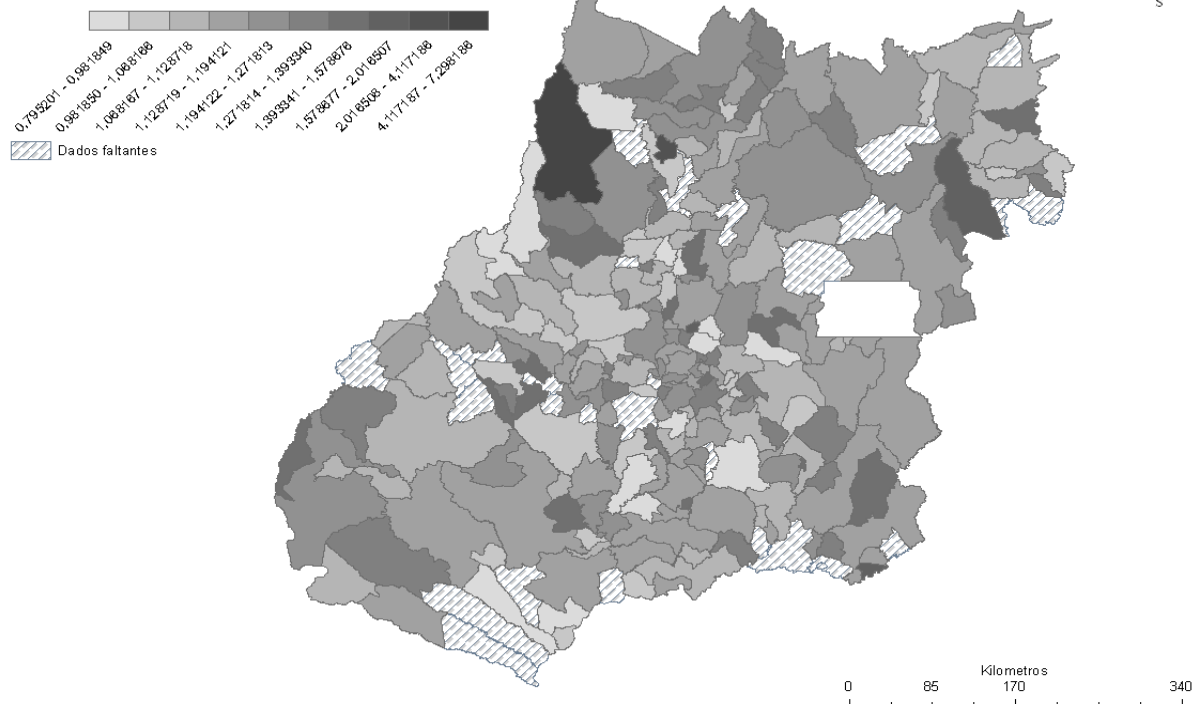
produtividade evidenciado na análise anterior. Indesejavelmente, MM foi o estado que sofreu a menor queda e a porcentagem de municípios que melhoraram a eficiência (10,8%) é menor que a de municípios que pioraram (11,05%). Isso expõe a necessidade por parte dos municípios de ações que possam interferir nessa tendência. A Tabela 4 evidencia também que o número de períodos necessário para chegar até o equilíbrio de longo prazo é aproximadamente de 8, equivalente a 16 anos.

Outro resultado direto da solução do sistema de equações é a determinação do número esperado de períodos para retornar ao estado atual, chamado tempo médio de recorrência ( $1/\pi$ ) e dado na Tabela 4. Assim, mesmo que os municípios do estrato EE tenham uma chance de 31,2% (100-68,8) de perder a eficiência, serão necessários aproximadamente 1,45 períodos ( $2*1,45=2,9$  anos) para eles voltar ao estado EE; um tempo médio de recorrência baixo em relação aos outros estados.

**Tabela 4. Frequências observadas e estimadas dos índices de eficiência técnica, separados por estrato, em vários períodos e steady state. Tempo médio de recorrência.**

Estados	Distribuição Inicial (2005-07) em %	Solução da equação em diferenças para vários períodos de dois anos em valores %									Tempo médio de recorrência = $1/\pi$
		1	2	3	4	5	6	7	8	Steady State( $\pi$ )	
EE	50.2	58.4	63.4	65.4	66.8	67.6	68.1	68.4	68.6	68.8	1.45
EI	13.9	8.6	8.8	8.4	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	11.67
EM	1.4	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	109.06
IE	15.3	12.4	9.9	9.5	8.9	8.7	8.6	8.5	8.4	8.4	11.95
II	9.1	11.5	10.0	9.3	8.7	8.5	8.3	8.2	8.1	8.0	12.45
IM	3.3	1.9	2.1	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6	63.94
ME	2.4	2.4	1.4	1.5	1.3	1.3	1.2	1.2	1.1	1.1	89.52
MI	2.9	1.9	1.9	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	1.4	1.4	73.33
MM	1.4	1.9	1.5	1.4	1.4	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	79.87

**Índice de produtividade de Malmquist. 2005-2007**



**Figura 1. Distribuição espacial dos índices de produtividade de Malmquist do período 2005-07**

**Índice de produtividade de Malmquist.  
2007-2009**

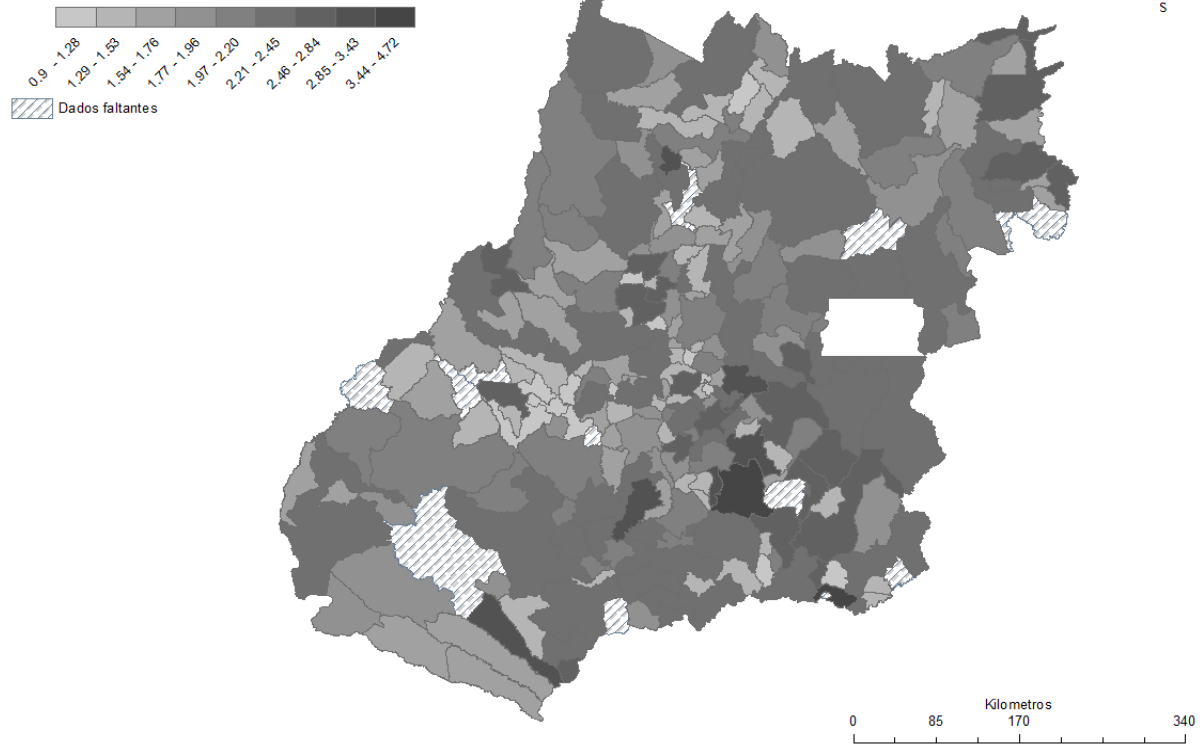


Figura 2. Distribuição espacial dos índices de produtividade de Malmquist do período 2007-2009

**Distribuição espacial dos  
estados de eficiência.**

2005 2007

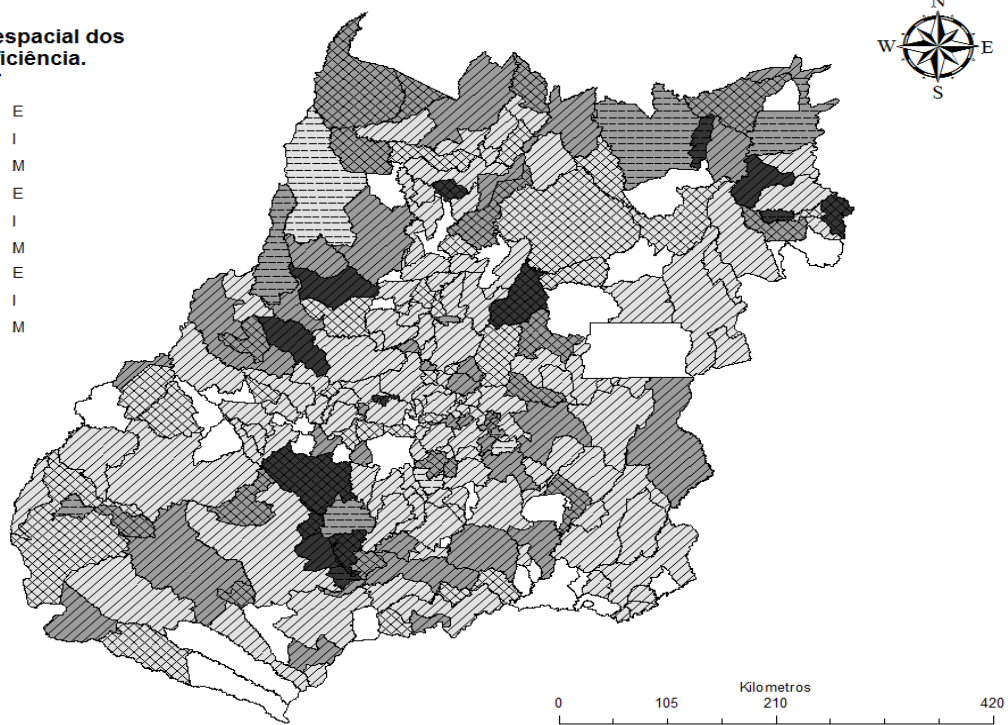
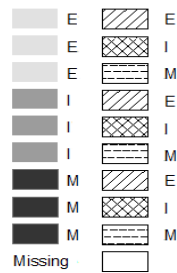


Figura 4. Distribuição espacial dos municípios de acordo com o estrato de eficiência ao qual faziam parte no período 2005-07

## CONCLUSÕES

Este trabalho avaliou a evolução da produtividade e eficiência dos gastos municipais no ensino do estado de Goiás nos anos 2005, 2007 e 2009.

Os resultados permitiram identificar e mapear o desempenho das redes municipais de ensino. Revelaram o progresso nos níveis de eficiência dos gastos municipais e suas causas: variação da eficiência produtiva (ME) e as mudanças tecnológicas (MT), reforçando a hipótese de que a qualidade do ensino observada é sensível aos investimentos em educação. Porém, a maior alocação de recursos não garante melhores resultados se antes não se solucionar a ineficiência dos municípios. Em outras palavras, maiores recursos para municípios ineficientes podem traduzir-se em maiores desperdícios. Como afirmado por Diaz (2007, p. 68), antes de elevar gastos é preciso identificar, com a devida precisão, quais aspectos devem ser alterados, e somente, então, avaliar quais recursos seriam necessários para promover as transformações necessárias.

Os resultados mostraram, também, não haver convergência dos sistemas municipais de ensino para um padrão único de eficiência no longo prazo. Porém, é importante notar a aproximação e a redução das disparidades das redes, pois a maioria dos municípios (68,8%) tende para o estado mais eficiente (EE). Ele é o único estado que cresceu e isto se dá em razão da redução da participação dos municípios nos outros estados. Isso deve estar refletindo o ganho de produtividade evidenciado na análise anterior e rejeitando as tendências de divergência. Portanto, constata-se que o hiato entre as melhores e piores práticas de eficiência está sendo minimizado no tempo.

O conhecimento dessas evidências fornece um importante subsídio na tomada de decisão governamental. Recomendam-se as políticas dirigidas ao aumento da eficiência que eliminem as barreiras institucionais à transferência e difusão das melhores tecnologias (educativas e organizacionais). Essas políticas podem gerar maiores resultados na produtividade e na qualidade de ensino que outras ações orientadas a fomentar a inovação tecnológica. Enquanto o custo da imitação da tecnologia existente for mais baixo que o custo de inovação, as unidades seguidoras podem aproximar-se das líderes, criando-se as condições para sustentar a convergência do desenvolvimento.

Cabe destacar também que existe um grande potencial de pesquisa no que se refere ao desempenho das redes municipais de ensino no Brasil, já que não existem muitos estudos com esse enfoque. Grande parte da avaliação do ensino municipal baseia-se em estatísticas descritivas. Novos estudos podem determinar e modelar os mecanismos implícitos e explícitos de dependência espacial da eficiência das redes municipais de ensino.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Banker, R.D., Charnes, A., & Cooper, W.** (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- Barro, R. J., & Sala-I-Martin, X.** (1992). Convergence. *Journal of Political Economy*, 100, 223-251.
- Barro, R. J., & Sala-I-Martin, X.** (1995). *Economic growth theory*. Cambridge: MIT.
- Barro, R. J., & Sala-I-Martin, X.** (1991). Convergence across States and Regions. *Brookings Papers on Economic Activity*, n. 1, p. 107-182.
- Caves, D.W., Christensen, L.R., & Diewert, W.E.** (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity. *Econometrica*, 50(6), 1393-1414.
- Charnes, A., Cooper, W., & Rhodes, E.** (1978). Measuring the efficiency on decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Diaz, M. D. M.** (2007). Qualidade do gasto público em educação no Brasil. In: Qualidade do gasto público no Brasil. FIPE. São Paulo. Recuperado em 11/06/2011 de <[http://www.etco.org.br/user\\_file/etco\\_FIPE%20relatorio-parcial-2611.pdf#50](http://www.etco.org.br/user_file/etco_FIPE%20relatorio-parcial-2611.pdf#50)>.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., & Roos, P.** (1992). Productivity changes in Swedish pharmacies 1980-89: a nonparametric Malmquist approach. *Journal of Productivity Analysis*, 3(1-2), 85-101.
- Färe, R., Grosskopf, S., Norris, M., & Zhang, Z.** (1994). Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries. *American Economic Review*, 84(1), 66-83.

**Farrell, M.J.** (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 120, part III, 253-290.

**Fochezatto A., & Stulp V. J.** (2008). Análise da convergência da renda *per capita* municipal no Rio Grande do Sul, utilizando modelo de Markov — 1985-98. *Ensaios FEE*, Porto Alegre, v. 29, n. 1, p. 41-64, jun.

**Friedman, M.** (1992). Do old fallacies ever die? *Journal of Economic Literature*, v. 30, p. 2129-2132,

**Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP** (2009). Investimentos Públicos em Educação. Recuperado em 11/05/2010 de [http://www.inep.gov.br/estatisticas-gastoseducação-despesas\\_publicas-p.a.\\_paridade.htm](http://www.inep.gov.br/estatisticas-gastoseducação-despesas_publicas-p.a._paridade.htm).

**Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP** (2010). Estatísticas do Ideb. Recuperado em 11/05/2011 de <http://portalideb.inep.gov.br/planilhas-para-download>.

**Laurini, M., Andrade, E., & Pereira, P. L. V.** (2003). *Clubes de Convergência de Renda para os Municípios Brasileiros: Uma Análise Não-Paramétrica*. Ibmecc Working Paper - WPE,

**Mossi, M. et al.** (2003). Growth dynamics and space in Brazil. *International Regional Science Review*, London, v. 26, n. 3.

**Oshiro, C. H., & Scorzafave, L. G.** (2011). Efeito do pagamento de bônus aos professores sobre a proficiência escolar no Estado de São Paulo. In: *39º Encontro Nacional de Economia*, 2011, Foz do Iguaçu. 39º Encontro Nacional de Economia.

**Pontual, E., & Porto Jr. S.** (2004). *Crescimento e convergência: uma análise empírica para a região sul*. Anais do Encontro de Economia da Região Sul.

**Quah, D.** (1993). Galton's fallacy and tests of the convergence hypothesis. *Scandinavian Journal of Economics*, v. 95, p. 427-443,

**Quah, D.** (1993a). Empirical cross-section dynamics in economic growth. *European Economic Review*, v. 37, p. 426-434.

**Shephard, R.W.** (1953). *Cost and production functions*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

**Sistema de Informações sobre Orçamentos Públicos em Educação – SIOPE.** (2010). Relatórios Municipais. Recuperado em 11/06/2011 de <http://www.fnde.gov.br/siope/dadosInformadosMunicipio.do>.