Da Alocação de *Inputs* nos Modelos de Fronteira Elipsoidal

Luciene Bianca Alves
ITA, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
DCTA – ITA, São José dos Campos, SP, 12228-200
bianca@ita.br

Armando Zeferino Milioni
ITA, Instituto Tecnológico de Aeronáutica
DCTA – ITA, São José dos Campos, SP, 12228-200
milioni@ita.br

Nei Yoshihiro Soma
ITA, Instituto Tecnológico de Aeronáutica
DCTA – ITA, São José dos Campos, SP, 12228-200
soma@ita.br

RESUMO

Este trabalho visa complementar o desenvolvimento do Modelo EFM, *Ellipsoidal Frontier Model*, proposto por Avellar (2010), um modelo de alocação de insumos, de soma constante, paramétrico, que se adapta as características da Análise Envoltória de Dados, DEA, (*Date Envelopment Analysis*) e que garante uma solução CCR (Modelos DEA com Retorno de Escala Constante) fortemente eficiente (*"strongly efficient"*) para todas as Unidades Tomadoras de Decisão - DMUs (*Decision Making Units*). Da flexibilidade do modelo, devido aos graus de liberdade atribuídos aos valores de excentricidades, despertou-se o interesse em avaliar a melhor distribuição perante as diversas geradas, fato este que objetiva o presente trabalho. Foram propostas duas análises, classificadas como local e global. Na primeira, com vistas a uma distribuição que obtivesse o menor valor de *Input* associado a cada DMU, gerado pelo EFM. Na segunda, com vistas a uma distribuição que obtivesse a menor variabilidade dos dados, de forma geral.

PALAVARAS CHAVE. Análise Envoltória de Dados, Modelos DEA-Paramétricos, Modelo Esférico Elipsoidal.

Área principal: DEA – Análise Envoltória de Dados.

ABSTRACT

This work aims to complement the development of the Ellipsoidal Frontier Model - FSM, proposed by Avellar (2010), an *Input* allocation model, of constant sum, parametric, which adapts the characteristics of Data Envelopment Analysis - DEA, and ensures a CCR solution (Models with Constant Returns to Scale) strongly efficient to all Decision Makers Units - DMUs. By the model's flexibility, due to the freedom degrees of assigned to the values of eccentricities, rise the interest in evaluate the best distribution of many generated, a fact that this study aims. Have been proposed two analyzes, classified as local and global. In the first one, in order to obtain a distribution that have the smallest *Input* value associated with each DMU, generated by the EFM. In the second, looking-for a distribution that obtained the lowest data variability, in their entirety.

KEYWORDS. **Date Envelopment Analysis. DEA-Parametric Models, Ellipsoidal Frontier Model.**

DEA - ***Data Envelopment Analysis***

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados, DEA, do inglês *Data Envelopment Analysis*, é uma ferramenta da Pesquisa Operacional que surgiu da necessidade de se avaliar a eficiência de processos como em linhas de produção, sistemas de logística, etc. Sua medida geral, de eficiência, baseada por Farrel (1957) é dada pela razão entre a saída, que é a quantidade produzida (*Output*) e a entrada, que se refere à quantidade consumida (*Input*). Dado que na maioria dos processos há várias variáveis de entrada e de saída, motivou-se o desenvolvimento de métodos alternativos de medidas de eficiência, baseados em técnicas de programação linear, para comparar o desempenho entre diferentes Unidades Tomadoras de Decisão (DMUs – *Decision Making Units*). Nesse sentido, DEA foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes, em 1978, através de modelos não-paramétricos, que envolve os dados pela construção de uma fronteira de eficiência linear por partes. Este modelo inicial, denominado CCR, trabalha com retorno constante de escala, é também conhecido como CRS – *Constant Returns to Scale*. Mais tarde, Banker *et al* (1984), assumiram o retorno variável de escala, denominado BCC, ou VRS - *Variable Returns to Scale* (Almeida *et al* ,2006).

De acordo com Avellar (2004), a fronteira de produção é definida pela maior (ou menor) quantidade possível de *outputs* (*Inputs*) que se possa produzir através de uma quantidade fixa de *Inputs* (*outputs*). Nesse sentido, a fronteira de produção pode ser determinada sob dois enfoques: a paramétrica, que se utiliza de uma função de produção definida, e a não-paramétrica, como sendo um vetor *Input*/*output*, no qual o incremento (ou redução) de qualquer *output* (*Input*) implica na redução (incremento) de outro *output* (*Input*) (Koopmans, 1951 apud Avellar, 2004),

Nos casos de múltiplas entradas (*Inputs*) e múltiplas saídas (*outputs*), a medida de eficiência relativa é dada pela razão ponderada de seus *Outputs* e *Inputs*, como na equação 1:

$$Eficiência\ j = \frac{u_1.y_{1j} + u_2.y_{2j} + \cdots u_i.y_{ij}}{v_1 x_{1j} + v_2.x_{2j} + \ \dots\ v_i.x_{ij}} \tag{1}$$

Dessa forma, a eficiência relativa da DMU j depende dos valores conhecidos de seus *Inputs* x_{ij}, *Outputs* y_{ij} e de seus respectivos pesos, v_1, peso dado ao *Input* i e u_1, peso dado ao *Output* i. De acordo com Casa Nova (2002), tais DMUs devem satisfazer as seguintes condições: as unidades analisadas devem ser comparáveis, atuar sob as mesmas circunstâncias, os fatores devem ser o mesmo para cada uma cada uma das unidades, distinguindo-se apenas na intensidade e grandeza

Assim, a ferramenta DEA fundamenta-se nos modelos de programação linear, que tratam de calcular os pesos dados a cada variável para determinar a fronteira linear por partes, utilizando-se ao mesmo tempo de múltiplos *Inputs* e *Outputs* em um índice de eficiência de cada unidade (Charnes *et al*, 1978).

Para Almeida *et al*. (2006), a finalidade de DEA é, no início da análise, definir uma relação de *Inputs* e *Outputs* através da construção de curvas de produção, que servirão de referência para a classificação das mesmas como eficientes ou ineficientes. Uma das razões principais dessa ferramenta é fazer a DMU ineficiente incidir sobre a fronteira de eficiência. Devido ao modelo pode ser orientado para a minimização de insumos, nos modelos ditos *Input*-orientados ou para a maximização dos produtos, nos modelos ditos *Output*-orientados, a solução é, respectivamente, através da diminuição dos *Inputs*, mantendo os *Outputs* constantes ou, no outro caso, através do aumento dos *Outputs*, mantendo os *Inputs* constantes (Cooper *et al*, 2000).

Dado que as organizações são entidades que se utilizam de certa quantidade de recursos de entrada (*Input*) e de saída (*Outputs*) em função de suas unidades tomadoras de decisão (DMUs), a determinação de metas para cada unidade de forma individual torna-se uma atribuição importante. Por essa razão, a utilização de métodos de alocação de recursos é recomendada a fim de otimizar o gerenciamento de seus recursos, bem como o desempenho global da organização (Silva, 2009).

Ao se fazer referência sobre métodos de alocação de recursos alude-se, por consequência, sobre os modelos DEA que tratam de problemas que contém a restrição de que a soma de seus *Inputs* ou *Outputs* devam permanecer constantes (limitadas). Destes, surgem os modelos paramétricos e não-paramétricos, no qual o primeiro deles faz menção ao modelo EFM (*Ellipsoidal Frontier Model*), ao qual o presente estudo é fundamentado.

Modelos não-paramétricos, relacionados à limitação de *Inputs* foram propostos primeiramente, segundo Beasley (2003), por Cook e Kress (1999), com referência a alocação de custos fixos. Os custos fixos alocados são tratados como *Inputs* e são alocados proporcionalmente à sua quantidade total. Logo, a quantidade alocada refere-se a variável limitada de soma constante.

Wei *et al* (2000) evidenciaram dois tipos de aplicação para problemas de otimização inverso: problemas de previsão e problemas de alocação de recursos. No primeiro, mantendo-se a mesma eficiência, aumentam-se os *Inputs* e averigua-se a quantidade de *outputs* que se possa produzir. No segundo, também mantendo a eficiência, aumentam-se os *outputs* e averigua-se a quantidade de *Inputs* que se possa acrescentar.

Beasley (2003) utilizou-se de problemas não-lineares para o problema de alocação de recursos variando as eficiências das DMUs e maximizando as médias das mesmas. Desta forma, *Inputs* e *outputs* são considerados no problema, podendo ser operados com retornos de escala constante ou variável, ter orientação a *Input* ou *output* e atribuir restrições aos pesos.

Modelos não-paramétricos relacionados à limitação de *outputs* foram mencionados por Soares de Mello *et al* (2001) e Lins *et al* (2003), no qual utilizaram-se do caso dos Jogos Olímpicos como ilustração. Neste caso, o índice representado pelo *output* 'medalhas conquistadas' é a variável limitada, ou seja, com soma constante para todas as DMUs. Neste caso, segundo Avellar (2010) um bom desempenho de um competidor implica no mau desempenho dos demais, o que caracteriza o problema, por consequência, como modelos DEA com soma constante de *outputs*.

A medição da eficiência dos países utilizada nesse último trabalho foi realizada pelo método Ganho Soma Zero, do inglês Zero Sum Gains (ZSG). Este método, formulado por Gomes (2003), Lins *et al*(2003) e Gomes *et al* (2003) possui retorno de escala variável, ou seja, ZSG-BCC, e é utilizado tanto para redistribuir *Inputs* ou *outputs*. Gomes *et al* (2005) estendeu o mesmo para formulação com retorno de escala constante, ou seja ZSG-CCR. Importante salientar que os modelos ZSG permitem atribuir restrições aos seus pesos.

2. Modelos Dea-Paramétricos de Soma Constante para Alocação de *Inputs*

Os modelos DEA com soma constante (ou variáveis limitadas) referem-se a problemas em que a utilização de *Inputs* e/ou distribuição de *Outputs* é limitada, ou seja, a soma dos mesmos deve permanecer constante. Os modelos DEA com soma constante podem ser paramétricos ou não-paramétricos. O primeiro caso é caracterizado pela forma geométrica da fronteira de produção, enquanto na segunda, não é feita nenhuma proposição neste sentido.

De acordo com a literatura, no caso de termos um problema em que se deseja distribuir *Outputs* (vários *Inputs* e um *Output*), a fronteira DEA original assumirá forma convexa. De forma análoga, para problemas que envolvem distribuição de *Inputs* (vários *Outputs* e um *Input)*, a fronteira apresentará formato côncavo (Cooper *et al*, 2000).

Neste sentido, têm-se os seguintes modelos paramétricos existentes na literatura: o Modelo de Fronteira Hiperbólico (Avellar, 2004), que se refere à distribuição de *Outputs* com soma constante e, portanto, segue o formato convexo de fronteira; o Modelo de Fronteira Esférico (Avellar, 2004), o Modelo de Fronteira Esférico Ajustado (Guedes, 2007) e o modelo de

Fronteira Elipsoidal (Avellar, 2010), todos com fronteira de forma côncava, ou ainda, de distribuição de *Inputs* com soma constante.

Dentre os modelos de distribuição de *Inputs*, o modelo EFM se destaca pela possibilidade de gerar várias distribuições fortemente eficientes. Isto ocorre devido aos graus de liberdades atribuídos aos valores de excentricidades incluídos no modelo. Diante deste fato, buscou-se investigar uma orientação para a escolha de uma distribuição, mediante as diversas geradas.

2.1 O Modelo EFM

O modelo EFM, Modelo de Fronteira Elipsoidal, desenvolvido por Avellar (2010), é paramétrico, de soma constante, com fronteira de eficiência de forma elipsoidal e garante uma distribuição CCR "fortemente eficiente" para todas as DMUs. O EFM tem a capacidade de distribuir *Inputs* considerando os *Inputs* e *Outputs* envolvidos no problema (Avellar,2010).

Este modelo apresenta como hipóteses: retorno de escala constante, adaptada ao modelo CCR; de que um incremento fixo nos *Inputs* corresponde a um crescimento constante dos *Outputs* e por fim, o EFM substitui a fronteira linear por partes por uma fronteira suavizada.

A construção do modelo é apresentada para três situações: i.o caso de dois *Outputs* e um *Input* (f_j); ii. o caso de s *Outputs* e um *Input* (f_j); e iii. o caso de s *Outputs* e m+1 *Inputs* (m *Inputs* + f_i). Logo, de acordo com Avellar (2010):

"Considere y_{rj} (>0) o valor da medida do *Output* r (r= 1,..,s) para a DMU j (j=1,...,n); F (>0) o custo fixo total a ser distribuído para todas as n DMU's, ou seja, F $=\sum_{j=1}^{n} f_j$, em que f_j é o valor do *Input* a ser alocado para cada DMU j."

Assim, os valores das coordenadas e os valores do novo *Input* (f_j) a ser distribuído para cada caso, serão:

Em (i),

$$f_j = \frac{F.\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{k=1}^{n} y_{1k}}\right)^2 - e^2.\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{k=1}^{n} y_{1k}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{k=1}^{n} y_{2k}}\right)^2}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{y_{1l}}{\sum_{k=1}^{n} y_{1k}}\right)^2 - e^2.\left(\frac{y_{1l}}{\sum_{k=1}^{n} y_{1k}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2l}}{\sum_{k=1}^{n} y_{2k}}\right)^2}} \tag{2}$$

O valor atribuído a **e** na fórmula refere-se à excentricidade da elipse e, portanto, passível de diferentes valores a ser atribuído. Assim, o modelo possibilita uma fronteira para diferentes tipos de excentricidades. Ressalta-se que uma elipse com excentricidade zero é uma esfera (Avellar, 2010).

Em (ii), as coordenadas são idênticas as anteriores, porém se estendendo ate **s** *Outputs*,

$$f_j = \frac{F.\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rk}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(e_r)^2.\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rk}}\right)^2\right]}}{\sum_{r=1}^{n}\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rl}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rk}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(e_r)^2.\left(\frac{y_{rl}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rk}}\right)^2\right]}} \tag{3}$$

Em (iii),

$$f_j = \frac{1}{m}.\left[\frac{(2m).\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(e_r)^2.\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}}{\sum_{p=1}^{n}\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rp}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(e_r)^2.\left(\frac{y_{rp}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}} - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} x_{ik}}\right)\right] \tag{4}$$

para $f_j > 0$, deve-se ter:

$$\frac{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(\varepsilon_r)^2 . \left(\frac{y_{rj}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}}{\sum_{r=1}^{n}\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rp}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(\varepsilon_r)^2 . \left(\frac{y_{rp}}{\sum_{k=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}} > \frac{1}{2m} . \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} x_{ik}}\right) \quad (5)$$

Além da formulação algébrica, o valor do novo *Input* do modelo EFM permite ser calculado por um Problema de Programação Linear (PPL), apresentado na Tabela 1:

Tabela 1- Problema de Programação Linear (PPL)

$$Min\ W_{max} - W_{min}$$

$Sujeito$ à:

$$W_{max} \geq \frac{f_j}{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{l=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(\varepsilon_r)^2 . \left(\frac{y_{rj}}{\sum_{l=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}}$$

$$W_{max} \geq \frac{f_j}{\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{l=1}^{n} y_{rl}}\right)^2 - \sum_{r=1}^{s-1}\left[(\varepsilon_r)^2 . \left(\frac{y_{rj}}{\sum_{l=1}^{n} y_{rl}}\right)^2\right]}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j = 100$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{rk}\, y_{rk}}{f_j} = 1$$

$$f_j > 0$$

$$W_{max}, W_{min} \geq 0$$

$$j = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, s$$

O PPL (tabela 1) proposto por Avellar (2010) busca minimizar a função objetivo, o que significa que para um resultado zero da mesma, $W_{max} = W_{min}$. Quanto às restrições do mesmo, respectivamente, tem-se que W_{max} e W_{min} devam ser maiores ou iguais e, menores ou iguais à expressão algébrica do modelo; a soma dos f_j devem representar 100% dos *Inputs* a serem realocados; satisfazer as eficiências de todas as DMUs, ou seja, suas eficiências devem somar 1. E por fim, os valores de f_j devem ser positivos e W_{max}, W_{min} maiores ou iguais a zero.

Segundo o autor, suas propriedades e características o tornam um modelo Cooperativo, Competitivo e Flexível. A saber:

- Propriedade de homogeneidade da fronteira, o que substitui a fronteira linear por partes por uma fronteira suavizada;

- Propriedade de gerar soluções DEA eficientes com controle nos pesos (flexibilidade do modelo): dá ao decisor a possibilidade de se obter uma distribuição de pesos para cada combinação de excentricidade, com soluções CCR fortemente eficientes (característica competitiva);

- Propriedade de distribuição coerente (característica de cooperação): especial por distribuir *Inputs* de forma coerente na presença de erros

- Característica de distribuir *Inputs* com base nos valores de *Inputs* e *Outputs* existentes;

- Característica de que nenhuma DMU tenha que aumentar os valores dos seus *Inputs* para se tornar eficiente.

3. Método

Diante do fato do modelo EFM em sua essência ser flexível devido aos seus graus de liberdades, atribuídos pelos valores de excentricidades do modelo que, por conseqüência, gera inúmeras possibilidades de soluções fortemente eficientes, investiga-se agora uma escolha dentre as possíveis soluções, tendo-a como justa e viável ao decisor.

De acordo com a combinação de excentricidade atribuída, a distribuição de pesos para uma determinada DMU pode conceder diferentes proporções de pesos virtuais aos seus valores de *Outputs*. Este fato é observado através das próprias equações do modelo EFM perante o cálculo de f_j, em que se observa que as excentricidades estão relacionadas somente com os valores de *Outputs*. E ainda, para um problema de ***s*** *Outputs*, há s-1 excentricidades, isto é, com exceção do ultimo *Output*, cada porcentagem de *Output* ao quadrado é multiplicada pelo fator (1-e^2). Logo, quanto menor a excentricidade relativa ao *Output*, maior a participação dele no problema. (Avellar, 2010).

Um requisito importante que se deseja para esta solução é que proporcione maior satisfação ao decisor. Dessa forma, sugere-se aquela que possua a menor variabilidade nos dados. Assim, o decisor revolverá o mínimo possível na redistribuição de seus dados iniciais de *Inputs*, o que torna esta justificativa defensável.

Assim, foram realizadas duas formas de análises, classificadas como Análise Local (AL) e Análise Global (AG). Na primeira, averiguou-se o menor valor de *Input* gerado pelo EFM, associado a cada DMU, perante os diversos valores de excentricidades e ($0 < e < 1$), com desvio-padrão de 0,1). Ou seja, busca-se uma distribuição de *Inputs* com um valor de excentricidade em que, para uma determinada DMU, apresenta o menor valor de fj associado a ela. Assim, ter-se-á uma distribuição voltada para a satisfação de menor *Input* para uma DMU em especial, porém, permanecendo uma distribuição com solução fortemente eficiente para todas no conjunto.

Na segunda análise, Global (AG), busca-se a menor variabilidade total, do conjunto das DMUs. Para tanto, a obtenção dessa solução é verificada através da utilização de uma métrica, a saber, da distância euclidiana (ou distância métrica). Logo, ao aplicar a sua equação como distância, o espaço euclidiano torna-se um espaço métrico.

A distância euclidiana entre os indivíduos a e b é dada por:

$$d_{ab}\left[\sum_{j=1}^{p}\left(x_{aj}-x_{bj}\right)^2\right]^{1/2} \text{; p=1,2, …j;} \tag{6}$$

x_{aj} = valor da variável j para o indivíduo a;
x_{bj} = valor da variável j para o indivíduo b.

Dado que no presente estudo utilizaremos da distância euclidiana para pontos unidimensionais P = px e Q = qx, a distância é computada como:

$$\sqrt{(p_x - q_x)^2} = |p_x - q_x| \tag{7}$$

Assim, será utilizado o valor absoluto já que a distância é normalmente considerada um valor escalar sem sinal.

No presente estudo, foi utilizada a equação da distância euclidiana com as seguintes variáveis do modelo:

$$\sqrt{(f_j - v_j)^2} = |f_j - v_j| \tag{8}$$

em que f_j é o valor do *Input* da DMU j adquirido com o modelo EFM numa dada distribuição com um determinado valor de excentricidade e v_j é o valor da DMU j com distribuição original. Por fim, aquela distribuição que apresentar a menor variabilidade em todo seu conjunto (ou seja, menor somatório $|f_j - v_j|$) será a indicada pela AG.

4. Exemplo de Aplicação

Será abordado um estudo de caso conhecido na literatura, apresentado por Gomes & Lins (2008), que se trata da distribuição DEA eficiente de *Inputs*, neste caso, emissões de CO_2 (ton^3 de carbono equivalente), para 64 países, considerando-se os valores dos seus *Outputs*: população (em milhões de habitantes), energia (em milhões de BTUs) e GDP, do inglês *Gross Domestic Product* (em bilhões de dólares). A partir do mesmo, serão transcorridos os resultados obtidos pela análise proposta neste estudo.

Note que, por se tratar de um problema com 3 *Outputs*, da formulação do modelo, tem-se 2 graus de liberdade, ou seja, implicará na atribuição de dois valores de excentricidades. As análises, quanto a sua complexidade, os valores referentes aos dados de Inputs e Outputs de cada país apresentam-se na tabela 3.

Os países referentes s DMUs são: *(1)Argentina; (2)Australia; (3)Austria; (4)Belgium; (5)Bolivia; (6)Brazil; (7)Bulgaria; (8)Canada; (9)Chile; (10)China; (11)CostaRica; (12)Croatia; (13)Czech (14)Republic; (15)Denmark; (16)Egypt; (17) El Salvador; (18)Estonia; (18)Finland; (19)France; (20)Germany; (21)Greece; (22)Guatemala; (23)Honduras; (24)Indonesia; (25) Ireland;(26) Israel;(27) Italy; (28)Japan; (29)Kazakhstan; (30)Latvia; (31)Lithuania; (32)Luxembourg; (33)Malaysia; (34)Maldives; (35)Malta; (36)Mexico; (37)Netherlands; (38)New Zealand; (39)Nicaragua; (40)Norway; (41)Panama; (42)Paraguay; (43)Peru; (44)Philippines; (45)Poland; (45)Portugal; (46)Republic of Korea; (47)Romania; (48)Russian Federation; (49)Seychelles; (50)Slovakia; (51)Slovenia; (52)Spain; (53)Sweden;(54)Switzerland; (55)Thailand; (56)Turkmenistan; (57)Ukraine; (58)United Kingdom; (59)United States; (60)Uruguay; (61)Uzbekstan; (62)Vietnam; (63)Zambia*

Tabela 2 - Inputs x Outputs do exemplo

DMUs	CO_2	População	Energia	GDP	DMUs	CO_2	População	Energia	GDP
1	34,85	37,52	2664,87	280,05	1	36,15	23,63	2274,95	112,21
2	99,03	19,49	4974,21	453,26	2	0,13	0,28	6,77	0,54
3	18,19	8,08	1419,42	268,65	3	1,07	0,39	51,41	3,99
4	39,36	10,26	2773,55	321,57	4	96,05	101,75	6004	372,41
5	2,62	8,47	161,63	8,04	5	67,52	16,04	4231,06	502,58
6	95,77	172,39	8782,13	771,45	6	9,61	3,85	844,12	70,98
7	15,48	7,87	927,93	12,59	7	1,02	5,21	58,12	2,38
8	156,19	31,08	12513,07	718,13	8	11,45	4,51	1906,09	172,91
9	14,75	15,4	1060,3	81,93	9	2,26	2,86	138,46	9,4
10	831,74	1285	39665,26	1113,59	10	0,96	5,64	110,93	9,59
11	1,39	3,87	154,08	15,1	11	7,19	26,35	550,33	60,89
12	5,69	4,66	429,16	23,35	12	18,62	77,13	1254,27	91,24
13	29,01	10,29	1530,56	57,09	13	78,61	38,64	3536,04	165,27
14	16,24	5,33	895,23	207,44	14	16,25	10,02	1088,21	131,88
15	34,29	67,89	2132,6	80,8	15	120,8	47,34	8058,12	639,24
16	1,53	6,4	114,66	11,24	16	25,97	22,41	1637,66	34,92
17	1,94	1,38	95,67	4,81	17	440,26	144,4	28197,17	366,9
18	14,41	5,19	1326,01	173,57	18	0,17	0,08	8,45	0,62
19	108,13	59,19	10521,36	1812,35	19	10,83	5,4	832,04	23,81
20	223,24	82,36	14351,56	2701,9	20	4,06	1,99	305,56	23,86
21	28,08	10,6	1393,2	144,77	21	82,72	40,27	5699,31	723,24
22	2,52	11,68	158,7	18,19	22	14,58	8,83	2221,2	281,29
23	1,27	6,58	86,47	4,68	23	12,27	7,23	1304,67	340,28
24	87,13	214,84	4629,78	215,93	24	48,49	62,91	2903,94	174,97
25	11,15	3,84	609,29	112,91	25	7,68	4,88	477,26	6,97
26	16,32	6,45	792,02	107,3	26	96,58	49,11	6076,24	36,43
27	121,5	57,95	8110,68	1225,57	27	154,33	59,54	9810,06	1334,92
28	315,83	127,34	21921,99	5651,49	28	1565,31	283,97	97049,88	9039,46
29	33,37	14,83	1734,57	21,81	29	1,69	3,36	157,36	20,79
30	2,65	2,36	205,87	6,03	30	30,16	25,56	2075,01	12,8
31	4,33	3,49	329,19	7,51	31	12,56	79,18	760,13	30,99
32	2,47	0,44	203,1	25,47	32	0,56	10,65	89,46	4,08

Na análise local foi computado o menor valor de *Input* que cada DMU pudesse obter dentre as combinações dos valores das excentricidades, de modo a encontrar aquela que fornecesse a menor possível. A tabela 3 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 3 - Análise Local

DMUs	An Local (f_j)	e_1	e_2	DMUs	An Local (f_j)	e_1	e_2
1	41,81	0,70	0,99	**33**	19,20	0,90	0,99
2	49,84	0,50	0,99	**34**	0,10	0,90	0,80
3	26,18	0,00	0,00	**35**	0,55	0,50	0,99
4	34,19	0,70	0,99	**36**	64,38	0,90	0,99
5	2,18	0,90	0,99	**37**	53,42	0,70	0,99
6	127,83	0,90	0,80	**38**	8,11	0,50	0,99
7	3,24	0,90	0,99	**39**	1,00	0,90	0,00
8	80,09	0,50	0,99	**40**	18,22	0,50	0,99
9	13,67	0,90	0,99	**41**	1,64	0,90	0,99
10	328,17	0,90	0,99	**42**	1,78	0,90	0,10
11	2,41	0,90	0,00	**43**	9,73	0,90	0,00
12	3,96	0,90	0,99	**44**	20,05	0,90	0,00
13	9,92	0,90	0,99	**45**	28,59	0,90	0,99
14	19,42	0,00	0,00	**46**	16,10	0,00	0,00
15	19,49	0,90	0,99	**47**	78,88	0,50	0,99
16	1,97	0,90	0,00	**48**	8,01	0,90	0,99
17	0,84	0,90	0,99	**49**	88,66	0,90	0,99
18	18,34	0,50	0,90	**50**	0,10	0,70	0,99
19	180,81	0,00	0,00	**51**	4,34	0,90	0,99
20	263,72	0,00	0,00	**52**	3,06	0,50	0,99
21	17,73	0,50	0,99	**53**	82,13	0,00	0,70
22	3,13	0,90	0,00	**54**	29,84	0,50	0,99
23	1,41	0,90	0,10	**55**	31,18	0,00	0,00
24	56,71	0,90	0,99	**56**	31,41	0,90	0,99
25	11,13	0,00	0,00	**57**	1,80	0,70	0,99
26	12,12	0,00	0,00	**58**	17,30	0,90	0,99
27	130,16	0,00	0,00	**59**	144,87	0,00	0,00
28	519,47	0,00	0,00	**60**	963,08	0,50	0,99
29	5,90	0,90	0,99	**61**	2,90	0,90	0,00
30	1,16	0,90	0,99	**62**	7,12	0,90	0,99
31	1,56	0,90	0,99	**63**	14,33	0,90	0,00
32	2,63	0,50	0,99	**64**	1,85	0,90	0,00

A título de interpretação, de acordo com a tabela 3, temos que a primeira DMU apresentou o menor valor de *Input* f_j, dentre as diversas possibilidades geradas pelo modelo EFM, de 41,81 ton^3 de CO_2, obtida com os valores de excentricidades 0,9 e 0,0, cuja variabilidade total desta distribuição foi de 1577, 406.

Na análise global investigaram-se os valores de excentricidades que, perante todas as distribuições apresentou, em sua totalidade, a menor variabilidade dos dados. Assim, foi obtido o seguinte resultado (tabela 4):

Tabela 4 - Análise Global

	e2=0,0	e2=0,1	e2=0,2	e2=0,3	e2=0,4	e2=0,5	e2=0,6	e2=0,7	e2=0,8	e2=0,9	e2=0,99
e1=0,0	**5346,380**	**5346,380**	1867,797	1893,023	1929,756	1979,622	2045,071	2129,815	2239,652	2384,282	2559,344
e1=0,1	1842,798	1847,653	1862,411	1887,647	1924,397	1974,293	2039,796	2124,630	2234,621	2379,529	2555,092
e1=0,2	1826,334	1831,195	1845,966	1871,229	1908,029	1958,015	2023,672	2108,773	2219,228	2365,032	2542,738
e1=0,3	1799,748	1804,568	1819,217	1844,279	1880,807	1930,488	1996,375	2081,943	2193,355	2341,001	2521,293
e1=0,4	1761,457	1766,270	1780,902	1805,968	1842,653	1892,575	1958,320	2043,832	2155,357	2305,070	2489,169
e1=0,5	1708,351	1713,174	1727,840	1752,962	1789,648	1839,751	1906,003	1992,418	2105,560	2256,784	2444,188
e1=0,6	1636,042	1640,864	1655,531	1680,680	1717,459	1767,693	1834,181	1921,575	2037,945	2195,287	2393,588
e1=0,7	1541,783	1546,627	1561,386	1586,731	1623,892	1674,829	1742,576	1831,879	1950,767	2113,449	2322,796
e1=0,8	1520,190	1523,774	1534,693	1553,473	1581,070	1619,023	1669,737	1737,027	1829,622	1997,217	2220,844
e1=0,9	1577,406	1581,514	1594,059	1615,681	1647,559	1691,609	1750,856	1830,182	1938,308	2092,363	2307,171
e1=0,99	1728,954	1734,233	1750,376	1778,345	1819,931	1878,098	1957,691	2066,836	2220,463	2450,461	2811,391

De acordo com a tabela 4, a menor variabilidade obtida no modelo EFM foi de 1.520,19 ton^3 de CO_2, adquirida com os valores de excentricidades $e_1 = 0,8$ e $e_2=0,0$.

O modelo EFM para o exemplo de aplicação foi implementado no Software Matlab, o qual forneceu as 121 distribuições e as demais análises, AL e AG, foram realizados em Excel.

5. Discussão e Resultados

- Em relação à Análise Local, foi possível perceber o quanto cada DMU j poderia variar o mínimo possível para atingir o seu menor valor de *Input* dentre todas as possibilidades. De acordo com os dados apresentados, observam-se que as DMUs (países) 4 (Bélgica), 9 (Chile), 25 (Irlanda), 38 (Nova Zelândia), 39 (Nicarágua) e 52 (Eslovênia) possuem distribuições em que as mesmas não necessitam variar em nada (variação zero) os seus valores de *Inputs* para manterem-se fortemente eficiente. Os valores de excentricidades encontrados, neste caso, foram respectivamente em (e1; e2) = (0,70; 0,00); (0,90; 0,00); (0,10; 0,00); (0,30; 0,50); (0,99; 0,50); e (0,99; 0,70).

Por outro lado, as DMUs 28 (Japão) e 49 (Rússia) tiveram as maiores variações para se chegar ao valor mínimo, fazendo referência às excentricidades (0,00; 0,00) e (0,0; 0,99); e a proporção de 64% e 32%, respectivamente. A saber, o Brasil (DMU6), neste caso, variou seus dados em 33%, o equivalente a 32,6 ton^3 de CO_2, relacionado ao par de excentricidade (0,99; 0,80). Ressalta-se que a média percentual apresentada foi de 28%.

- Em relação à Análise Global, foi possível perceber mais uma vez o mérito do modelo EFM em fornecer várias distribuições em que o decisor possa escolher como redistribuir seus dados com soluções fortemente eficientes. Os valores apresentados na tabela 4 ilustram as diversas possibilidades, que variam entre 1.520,19 ton^3 de CO_2 (mínima), que representa 28% do valor total, F, e 5.346,38 ton^3 de CO_2 (máxima), igual a F. Ressalta-se aqui também, que a média da variação foi de 1.989,53 ton^3 de CO_2. Note que as variabilidades encontradas não são reflexivas em função dos graus de liberdade; como exemplo, em (e1; e2) = (0,2; 0,3) = 1.871,23 ton^3 de CO_2, enquanto em (e1; e2) = (0,3; 0,2) = 1.819,22 ton^3 de CO_2.

- Ao comparar os resultados obtidos na AG com o trabalho de Gomes & Lins (2008), com o modelo ZSG (*Zero Sum Gain*) é importante ressaltar primeiramente, que este não impõe parametrizações na fronteira DEA. Quanto a variabilidade das distribuições de ambos, a menor dela, encontrada pelo EFM na AG foi de 1520,19, que representa 28% do valor total, F, encontrada com os valores de excentricidades $e_1=0,8$ e $e_2= 0,0$; enquanto o modelo ZSG, aplicando a mesma métrica (distância euclidiana entre f_j, os resultados do modelo, e v_j, a distribuição dos *Inputs* originais, conforme equação 8) foi de 1054,75, que representa 19% de F.

Porém, ressalta-se que a composição do modelo ZSG, apesar do menor valor atribuído, não desfrute de propriedades e características especiais do EFM, como por exemplo, a de distribuição coerente. Isto motiva a escolha deste para a aplicação do modelo.

6. Conclusão

Note que, no sentido de embasar "a escolha das excentricidades" com distribuição de menor variabilidade, até o momento não foi encontrada uma relação entre as mesmas de modo que se possa afirmar que tais valores de excentricidades levam a uma alocação de *Inputs* com variabilidade mínima local ou global. E ainda, não foi identificada nenhuma relação entre os valores de excentricidades sugeridos na análise local com os da análise global, tanto que ao observar o resultado das duas análises (AL e AG) deste exemplo em estudo, o valor de excentricidades encontrado na AG não se revela em nenhum dos casos da AL.

No entanto, as análises do presente estudo obtêm mérito pela busca de distribuições com valores de excentricidades em que ocorre a solução das análises AL e AG caso a caso, ou seja, de acordo com cada problema. Embora a característica especial do modelo EFM de gerar várias distribuições fortemente eficientes para qualquer combinação de excentricidade, a orientação na escolha de uma solução diante de várias possibilidades, com vistas àquela em que o decisor tenha que mexer o mínimo nos dados torna-se muito viável, principalmente, quando a natureza do *Input* envolver grandes quantidades de DMUs.

Referências

Almeida, R.M.*et al*., 2006**;** Perfil da Produção Científica sobre Estudo da Técnica Análise Envoltória de Dados: Uma Pesquisa na Literatura Nacional e Internacional. *Anais do XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, CONBENGE*. Passo Fundo, Setembro, ISBN 85-7515-371-4.

Avellar, J.V.G.; 2004. Modelos DEA com soma constante de *Inputs*/*Outputs*. Dissertação de Mestrado. *Instituto Tecnológico de Aeronáutica*. São José dos Campos, SP.

Avellar, J.V.G., 2010; O modelo de Fronteira Elipsoidal: Um Modelo Paramétrico para a Distribuição de *Inputs* de Soma Constante com Controle nos Pesos. Tese de Doutorado. *Instituto Tecnológico de Aeronáutica*. São José dos Campos, SP.

Banker, R.D.; Charnes A; Cooper, W.W.,1984. Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* 30, 1078-1092.

Beasley, J.E., 2003. Allocating fixed costs nad resources via data envelopment analysis, European Journal of Operational Research 147, 198-216.

Casa Nova, S.P.C. Utilização da Análise por Envoltória de Dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis. 2002. São Paulo. Tese (Doutorado em xxxxx). Universidade de São Paulo.

Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes E., 1978. *Measuring the efficiency of decision making units*. Europian Journal of Operational Research 2, 429-444.

Cook W.D . and Kress M., 1999. Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach, European Journal of Operational Research 119, 652-661.

Cooper W.W.; Seiford, L. M.; Tone, K., 2000. Data Envelopment Analysis: A comprehensive text with Models, Applications, Refferences and DEA – Solver Software. Kluwer Academic Publishers.

Farrel, M.J., 1957. The *measurement of productive efficiency*. Journal of the Royal Statistic Society. p. 253-290.

Gomes E.G., 2003. Modelos de Análise Envoltória de Dados com Ganho de Soma Zero. Tese de doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

Gomes E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. and Estellita Lins M.P, 2003. Busca Sequencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de *outputs* constante. Investigação Operacional, v.23, n.2, 163-178.

Gomes E.G., Soares de Mello, J.C.C.B. and Estellita Lins M.P., 2005. Uniformização da Fronteira Eficiente em Modelos de Análise Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero e Retornos Constantes de Escala. Pesquisa Operacional, v.22, n.2, 183-201.

Gomes, E.G. and Estelita Lins, M.P. , 2008. Modelling undesirable *outputs* with zero sum gains data envelopment analysis models. Journal of the Operational Research Society 59, 616.

Guedes, E.C., 2007. Modelo de fronteira esférica ajustado: Alocando *Input* vi DEA paramétrico. Tese de Mestrado. *Instituto Tecnológico de Aeronáutica.* São José dos Campos, SP.

Lins, M.P.E.; Gomes, E.G; Soares de Melo, J.C.C.B.; Soares de Melo, A.J.R., 2003. Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. European Journal of Operational Research 148, 312-322.

Silva, R.C., 2009. Um estudo sobre o controle dos pesos no modelo de fronteira esférica ajustado. Dissertação de mestrado. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Soares de Melo, J.C.C.B., Gomes E. G., Lins, M.P.E., Soares de Melo, A.J.R., 2001. Uso da pesquisa Operacional em Esportes: o caso ds Olimpíadas, Boletim da SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, Maio, 19, pp 5-6.

Wei Q., Zhang J. and Zhang X., 2000. DEA models for resource reallocation and production *Input*/*output* estimation. European Journal of Operational Research 121, 151-163.