

APLICAÇÃO DE UM MODELO PARA CONSTRUÇÃO DE GRADES HORÁRIAS ESCOLARES BASEADO NA META-HEURÍSTICA *SIMULATED ANNEALING*

Camilo José Bornia Poulsen

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Pós-Graduação em Administração
Rua Washington Luís, 855, Porto Alegre – RS
cjbpoulsen@ea.ufrgs.br

Denise Lindstrom Bandeira

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Pós-Graduação em Administração
Rua Washington Luís, 855, Porto Alegre – RS
dlbandeira@ea.ufrgs.br

RESUMO

Todo início de período letivo, gestores de instituições de ensino deparam-se com um típico problema: montar as grades horárias das turmas, segundo as demandas de aulas de suas disciplinas e considerando as restrições de disponibilidade horária de todos os envolvidos. Conhecido na literatura como *School Timetabling Problem* (STP), este característico problema de otimização combinatória é reconhecidamente complexo por conta do seu elevado número de variáveis e restrições. Devido à dependência das regras do sistema educacional de cada país, o STP pode ter inúmeras variantes, cada uma com o seu próprio conjunto de particularidades. Este trabalho se propõe a oferecer um modelo para o STP considerando o sistema educacional brasileiro. O modelo proposto, baseado na meta-heurística *simulated annealing*, foi concebido para que cada instituição de ensino usuária tenha liberdade para definir a penalidade de cada tipo possível de inconformidade ou restrição.

PALAVRAS-CHAVE. School timetabling problem, Grade horária, Simulated annealing.

Área Principal: PO na Educação (EDU), Metaheurísticas (MH), Otimização Combinatória (OC).

ABSTRACT

Every beginning of term, educational institution managers face a typical problem: planning the classes' timetable, according to their lesson demands for each subject, considering, furthermore, the schedule constrains of all actors. Known as *school timetabling problem* (STP), this typical combinatorial optimization problem is remarkably complex due to the high number of variables and constraints. Owing to the rules of each country's educational system, STP can have uncountable variants, each one with their own set of features. This paper searches to offer a model to STP considering the Brazilian educational system. The proposed model, based on the metaheuristic *simulated annealing*, was conceived so that each educational institution using this model has the freedom to define which penalty will be applied to each possible kind of nonconformity or constraint.

KEYWORDS. School timetabling problem, Timetable, Simulated annealing.

Main Area: OR in Education (EDU), Metaheuristics (MH), Combinatorial Optimization (OC).

1. Introdução

Todas as instituições de ensino (IE) – de todos os portes, tipos e níveis – deparam-se, a cada ciclo de período letivo, com o problema de montar as grades horárias das turmas, o que pressupõe alocar professores, salas de aulas, laboratórios, quadras esportivas para as turmas de alunos, segundo as demandas de carga horária de suas disciplinas e considerando as restrições de disponibilidade de cada recurso. Este problema é conhecido na literatura como *school timetabling problem* (STP). O problema básico consiste em atribuir horários, professores, alunos e salas de aula para uma coleção de turmas, de tal forma que nenhum participante é obrigado a comparecer a duas aulas simultaneamente (Cooper e Kingston, 1993). Casos reais podem ser muito grandes, com centenas de participantes e centenas de aulas em uma semana com 40 horários disponíveis e restrições de vários tipos.

Apesar de inexistirem dados oficiais, estima-se que a maioria das instituições de ensino brasileiras não dispõe de ferramenta computacional que auxilie neste processo. Desta forma, dias e até semanas são despendidos nesta tarefa, demandando tempo de profissionais, exigindo exaustivas negociações entre professores com diferentes disponibilidades horárias e preferências de disciplinas. A solução manual de um problema de *timetabling* é uma tarefa árdua e normalmente requer vários dias de trabalho. Assim, acaba se transformando num grande quebra-cabeça, num pesado processo de tentativa e erro que, na primeira combinação encontrada, dá-se por solucionado, mesmo que a qualidade da solução seja péssima, o que pode implicar alunos e professores prejudicados: distribuição de carga horária dissonante dos interesses pedagógicos e maçante para professores e alunos, aulas em dias ou horários indesejados, elevado número de janelas de horários, poucos dias livres para professores, escolha de professores não desejados para turmas, dentre outras tantas situações que geram inconformidade. A principal dificuldade apresentada pelo STP é a sua natureza combinatória. Analisando sob a ótica de um problema de otimização, o STP, apesar de já ter sido bastante explorado, continua sendo um desafio.

O objetivo deste artigo é apresentar um modelo para o STP focado na realidade das escolas brasileiras de educação básica, infantil e profissional, a partir de técnicas de pesquisa operacional usando, particularmente, a meta-heurística *simulated annealing* (SA).

2. O School Timetabling Problem (STP)

Uma das primeiras referências ao STP foi apresentada por Appleby, Black e Newman (1960) com técnicas para a construção de soluções comparando o problema de timetabling (TT) com outros problemas de agendamento. Gotlieb (1962) apresentou a primeira formulação completa para o STP, declarando que o problema consistia em fixar um conjunto de aulas num determinado período de tempo, atendendo exigências acadêmicas, cumprindo a grade curricular. Em cada aula era necessário atender uma única turma, exigindo o comparecimento de um único professor. Lawrie (1969) apresentou um modelo de STP baseado em programação linear inteira (PLI) com o propósito de alocar professores, disciplinas e turmas em uma grade horária semanal. De Werra (1970) propôs um modelo baseado num algoritmo de fluxo de rede. Gans (1981) propôs um modelo e um método heurístico de resolução para escolas de nível médio da Holanda, afirmando ser impossível garantir que todas as restrições fossem atendidas, apenas cobrindo parte substancial delas. Com a evolução tecnológica, as pesquisas sobre TT avolumaram-se. Abramson (1991) propôs modelo para o STP usando a meta-heurística SA, pois o grande número de variáveis e restrições inviabilizava a utilização de PLI. Trabalhando com os parâmetros turma, professor, local de aula, dia da semana e período de aula, simplificou o modelo associando disciplina com professor, e local de aula com turma. Como função de avaliação, o custo da grade horária é minimizado, expresso pelo número de conflitos. Alvarez-Valdes, Martin e Tamarit (1996) aplicaram ao modelo educacional espanhol os mesmos parâmetros de Abramson, também unindo professores a disciplinas. A fase de construção trabalha com uma função de avaliação que visa minimizar o número de conflitos, e a fase de melhoramento emprega a meta-heurística *tabu search* (TS). Wright (1996) desenvolveu um modelo baseado em TS, para o sistema educacional inglês, utilizando grades horárias quinzenais, no total de 50 aulas, e estruturando uma função de avaliação composta por diversos componentes, denominados de *subcosts*.

Birbas, Daskalaki e Housos (1997) abordaram o modelo educacional grego através de PLI, trabalhando com os parâmetros turma, disciplina, professor, dia da semana e período de aula, com custo associado a cada variável de decisão, a função de avaliação visando obter o menor custo possível. Colorni, Dorigo e Maniezzo (1998) confrontaram três diferentes técnicas de meta-heurísticas para resolver um modelo educacional italiano, baseado nos recursos clássicos de STP (turma, disciplina, professor, dia da semana e período de aula). Sua função de avaliação apresenta penalidades, visando atender IEs com prioridades distintas. Empregaram três meta-heurísticas: SA, *genetic algorithm* (GA) e TS. Schaerf (1999a) promoveu ampla revisão sobre as técnicas mais empregadas para resolver problemas de *school timetabling*, *course timetabling* e *examination timetabling* (heurísticas gulosas, *graph coloring*, *network flow techniques*, GA, SA, *logic programming*, *constraint-based*, TS, PLI e *rule-based approach*). Na sequência, Schaerf (1999b) desenvolveu um modelo de STP para o sistema educacional italiano, com função de avaliação que visa minimizar o custo de cada restrição *soft* não atendida, resolvido pela meta-heurística TS. Smith, Abramson e Duke (2003) trouxeram uma abordagem diferente das tradicionais: o uso de *neural networks* (NN). Baseando-se no modelo de STP proposto por Abramson (1991), compararam os resultados obtidos utilizando NN com uma heurística gulosa e as meta-heurísticas SA e TS. Valouxis e Housos (2003) consideraram as regras das IEs gregas, com os parâmetros turma, professor, disciplina, dia da semana e local de aula, e uma função de avaliação que permite restrições bem específicas, utilizando *constraint logic programming* (CLP). Carrasco e Pato (2004), para o sistema educacional português, propuseram uma função de avaliação que visasse minimizar os custos decorrentes do não atendimento de um conjunto de restrições *soft* e confrontaram dois métodos heurísticos para o STP baseados em NN.

Santos, Ochi e Souza (2004) propuseram, para escolas brasileiras, um modelo baseado na meta-heurística TS, com professor vinculado a disciplina, e local de aula a turma, e função de avaliação minimizando o custo associado à violação de restrições *soft*. Moura *et al.* (2004) trabalharam num modelo de STP como o de Santos, Ochi e Souza (2004) para escolas brasileiras, agregando restrições *soft*, utilizando meta-heurísticas evolutivas (GA) e de busca local (TS e GRASP), com aplicação de técnicas alternativas para obter melhores resultados (*path relinking*). Avella *et al.* (2007) desenvolveram um modelo para escolas italianas, associando professores a disciplinas, e locais de aula a turmas. A função de avaliação visa minimizar violações a restrições *soft*, utilizando a meta-heurística SA e o algoritmo de busca local *Very Large Scale Neighborhood* (VLSN). Marte (2007) propôs modelo baseado no sistema educacional alemão, com restrições variadas, utilizando a técnica CLP. Jacobsen, Bortfeldt e Gehring (2007), continuando o trabalho de Marte, compararam o desempenho da técnica CLP com a meta-heurística TS. Baseado em escolas brasileiras, o trabalho de Santos e Souza (2007) formulou diferentes tipos de TT, apresentando uma relação de técnicas de solução (heurísticas construtivas, TS, SA, GA e PLI mista). Belingiannis *et al.* (2008) formularam um modelo de STP para a realidade grega, baseado no modelo de Birbas, Daskalaki e Housos (1997), resolvido através de GA. Birbas, Daskalaki e Housos (2009), propuseram dois modelos para o STP para o sistema grego. O primeiro, associando disciplina a professor e a função de avaliação minimizando o custo atribuído a cada professor alocado. No segundo, o parâmetro disciplina foi agregado e um componente de penalidades foi adicionado à função de avaliação para atender restrições *soft*. Belingiannis, Moschopoulos e Likothanassis (2009) desenvolveram seu trabalho anterior, alterando o operador de seleção e agregando um operador de *crossover*. Zhang *et al.* (2010) apresentaram um modelo com parâmetros turma, disciplina, professor, dia da semana e período de aula; local de aula associado à turma. Adicionaram restrições *hard* e *soft*, desenvolvendo algoritmo baseado na meta-heurística SA com nova estrutura de vizinhança estendida. Compararam seu modelo com o GA de Belingiannis *et al.* (2008), com o *column generation* de Papoutsis, Valouxis e Housos (2003 *apud* Zhang *et al.*, 2010) e o CLP de Valouxis e Housos (2003).

Os trabalhos analisados demonstram que o STP tem muitas abordagens, tanto sob o ponto de vista de formulação, quanto de técnica, o que faz com que seja uma fonte permanente de pesquisas por parte da comunidade científica.

3. Definição do problema

Conforme Santos e Souza (2007), as restrições se dividem em três classes, sendo dependentes da instituição de ensino e do sistema educacional de cada localidade:

- **Organizacionais** – tratam da gestão de recursos e do atendimento à legislação: alocação de locais de aula (capacidade ou recurso específico); carga horária máxima semanal de professores; número de janelas (que impacta no salário a pagar)
- **Pedagógicas** – demandas importantes para o bom aproveitamento das aulas: atendimento de n-uplas (para melhor rendimento); limitação de aulas diárias de uma disciplina; preferência de determinado professor para determinada disciplina
- **Pessoais** – solicitadas de acordo com a preferência e a necessidade dos professores: o professor pode estar indisponível para lecionar em determinados dias; mesmo tendo disponibilidade, o professor pode preferir lecionar em determinado dia

Os conjuntos de dados são as entidades envolvidas no processo de construção de uma grade horária. O modelo proposto tem seis conjuntos:

- C = conjunto de turmas de alunos (*Class*)
- S = conjunto de disciplinas (*Subject*)
- T = conjunto de professores (*Teacher*)
- R = conjunto de locais de aula (*Room*)
- D = conjunto de dias da semana (*Day*)
- H = conjunto de períodos de aula (*Hour*)

3.1. Restrições *hard*

São restrições que devem ser satisfeitas a qualquer custo. No caso de um STP, não é possível a implementação prática de uma grade horária que não satisfaça tais condições. Se o problema não consegue satisfazer o conjunto de restrições *hard* significa que é inviável (*infeasible*). Este trabalho objetiva o desenvolvimento de um modelo de STP que ofereça como resultado grades horárias que atendam obrigatoriamente aos seguintes requisitos:

- H1a** : Atendimento à grade curricular – geral (uma turma c deve ter alocado exatamente o número de aulas previsto para a disciplina s)
- H1b** : Atendimento à grade curricular – locais compartilhados (uma turma c deve ter alocado exatamente o número de aulas em locais compartilhados previsto para a disciplina s)
- H2** : Exclusividade do recurso professor (um professor t pode ser alocado apenas uma vez num determinado dia da semana d e período de aula h)
- H3** : Exclusividade do recurso turma (uma turma c pode ser alocada apenas uma vez num determinado dia da semana d e período de aula h)
- H4** : Exclusividade do recurso local de aula (um local de aula r pode ser usado apenas uma vez num determinado dia da semana d e período de aula h)
- H5** : Número máximo de aulas semanais de um professor (um professor t não pode ultrapassar uma determinada quantidade máxima de aulas semanais)
- H6** : Disciplina ministrada pelo mesmo professor numa turma (uma determinada disciplina s deve ser ministrada pelo mesmo professor t em determinada turma c)

3.2. Restrições *soft*

Restrições do tipo *soft* são aquelas que quanto mais forem respeitadas melhor será a grade horária. Podem ser violadas, mas devem ser satisfeitas ao máximo. Restrições *soft* não podem ser expressas num conjunto de restrições do modelo matemático, mas dentro da função de avaliação, que comporta uma parcela para cada restrição desse tipo. Quanto menos atender determinada restrição *soft*, maior o valor da função de avaliação, significando prejuízo aos objetivos do modelo. A importância de determinada restrição *soft* para o modelo é feita pela imposição de uma penalidade, que é uma constante que multiplica a parcela correspondente. No caso do modelo proposto neste artigo, que apresenta uma função de avaliação que visa minimizar

o custo de determinada grade horária, quanto maior a penalidade, maior é a importância da respectiva restrição *soft*. O modelo deste trabalho apresenta as seguintes restrições do tipo *soft*:

- S1** : Atendimento da preferência de professor da disciplina (por razões do âmbito da IE, uma disciplina s deve ser preferencialmente ministrada por determinados professores)
- S2** : Atendimento da preferência de disciplina do professor (por razões pessoais, um professor t pode preferir ministrar determinadas disciplinas. Cabe à IE determinar se o modelo deve considerar ou não esta demanda)
- S3** : Menor número possível de dias do professor na IE (alocar os professores de modo que eles ministrem suas disciplinas no menor número possível de dias na semana)
- S4** : Menor número possível de janelas (alocar os professores de modo que eles tenham o menor número possível de janelas)
- S5** : Menor número possível de não atendimento às solicitações de n-uplas (atender ao máximo às solicitações de n-uplas para cada disciplina s em cada turma c)
- S6** : Menor número possível de não atendimento a limites diários de aulas (respeitar ao máximo o limite diário de aulas que uma disciplina s pode ser ministrada numa turma t)

4. Modelo matemático

O modelo matemático é apresentado a partir da descrição dos seus parâmetros, variáveis de decisão, função de avaliação e restrições. Os parâmetros são valores fixos, responsáveis por traduzirem para o modelo a forma de relacionamento entre os conjuntos de dados, além de definirem os valores dos requerimentos e das restrições:

$$CST_t^s = \text{custo da preferência da disciplina } s \text{ pelo professor } t, \forall t \in T, \forall s \in S, PST_t^s = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

$$CTS_s^t = \text{custo da preferência do professor } t \text{ pela disciplina } s, \forall s \in S, \forall t \in T, PTS_s^t = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\alpha = \text{penalidade que indica a importância em atender a preferência das disciplinas na alocação dos professores, } \alpha = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (3)$$

$$\beta = \text{penalidade que indica a importância em atender a preferência do professores na alocação das disciplinas, } \beta = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (4)$$

$$\delta = \text{penalidade que indica a importância dos professores estarem alocados no menor número de dias possível, } \delta = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (5)$$

$$\rho = \text{penalidade que indica a importância dos professores terem o menor número possível de janelas, } \rho = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (6)$$

$$\sigma = \text{penalidade que indica a importância em atender as demandas de n-uplas, } \sigma = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (7)$$

$$\varphi = \text{penalidade que indica a importância em atender os limites diários de aula de uma disciplina, } \psi = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (8)$$

As variáveis de decisão são as incógnitas a ser determinadas pela solução do modelo. No caso do STP, os valores das variáveis de decisão apontam as grades horárias resultantes e o valor da função de avaliação:

$$D_t = \text{número de dias em que o professor } t \text{ ministra aulas na semana, } \forall t \in T, D_t = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (9)$$

$$M_{cstrdh} = \begin{cases} 1 & \text{se a turma } c \text{ tem aula da disciplina } s \text{ ministrada pelo professor } t \text{ no local} \\ & \text{de aula } r \text{ no dia da semana } d \text{ no período de aula } h \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

$$U_c^s = \text{número de n-uplas não atendidas da disciplina } s \text{ na turma } c, \forall c \in C, \forall s \in S, U_c^s = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

$$W_t = \text{número de janelas do professor } t, \forall t \in T, W_t = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (12)$$

$$N_c^s = \text{número de aulas excedidas do limite diário da disciplina } s \text{ na turma } c, \quad (13)$$

$$\forall c \in C, \forall s \in S, N_c^s = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

A função de avaliação é a função matemática que define a qualidade da solução obtida, em função dos valores das variáveis de decisão. Neste modelo é dada por:

$$\text{Minimizar} \quad Z = M + D + W + U + N \quad (14)$$

onde:

$$M = \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} \sum_{h \in H} [(\alpha \cdot CST_t^s + \beta \cdot CTS_s^t) \cdot M_{cstrdh}] \quad (15)$$

$$D = \delta \sum_{t \in T} D_t \quad (16)$$

$$W = \rho \sum_{t \in T} W_t \quad (17)$$

$$U = \sigma \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} U_c^s \quad (18)$$

$$N = \varphi \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} N_c^s \quad (19)$$

A função de avaliação Z proposta (14) visa minimizar o custo total da grade horária. Cada fator da função de avaliação tem uma penalidade, que traduz a importância de minimizar o custo da restrição *soft* associada. O fator M (15) tem dois componentes com uma penalidade associada a cada um deles, que visam atender às restrições *soft* $S1$ e $S2$. O primeiro componente representa o somatório dos custos das preferências de professores de cada disciplina (1), o segundo componente é o somatório dos custos das preferências de disciplinas de cada professor (2). O fator D (16) representa o somatório de todos os dias em que cada professor está alocado na escola, visando atender à restrição *soft* $S3$. À medida que um determinado professor t tem reduzido o número de dias em que ministra aulas, a função de avaliação Z (14) é melhorada. A penalidade δ (5) indica a importância do modelo em atender da melhor forma possível a restrição $S3$. Para atender a restrição *soft* $S4$, a parcela W (17) da função de avaliação Z (14) indica a quantidade de janelas na grade horária resultante do modelo. A importância em atender esta restrição é mensurada pelo valor da penalidade ρ (6). A restrição *soft* $S5$ é atendida pela parcela U (18), que indica a quantidade de n-uplas não atendidas pelo resultado do modelo. A penalidade σ (7) é responsável por dimensionar a importância dessa restrição. As aulas excedidas em relação ao limite diário de uma determinada disciplina s numa turma c (restrição *soft* $S6$) têm seu custo expresso pela parcela N (19) e são penalizadas por ψ (8).

5. Modelo heurístico – *Simulated annealing* (SA)

Considerando as definições do problema e as dimensões reais que um STP pode apresentar numa escola de tamanho médio, o modelo proposto por este artigo, necessariamente, passa pelo uso de heurísticas. O Quadro 1 apresenta o algoritmo da abordagem proposta:

Quadro 1 - Algoritmo global da abordagem proposta

	procedimento Modelo_Proposto
1	executa procedimento Guloso_Randômico {fase de construção}
2	executa procedimento Simulated_Annealing {fase de melhoramento}
3	fim-procedimento

O modelo proposto consiste, essencialmente, na execução de duas fases. Na primeira, chamada de “fase de construção”, um algoritmo guloso e randômico é executado com o propósito de se compor uma solução inicial viável. Já na segunda, que é o objeto central deste trabalho, denominada “fase de melhoramento”, um algoritmo baseado na meta-heurística *simulated annealing* é executado para melhorar o resultado obtido pela fase de construção. A partir de uma

solução viável, isto é, de uma grade horária completa e que não infringe nenhuma restrição do tipo *hard*, o modelo está apto a executar a fase de melhoramento. Esta fase está baseada na meta-heurística SA, que neste modelo foi implementada da forma apresentada no Quadro 2:

Quadro 2 - Algoritmo de melhoramento: *Simulated Annealing*

	procedimento Simulated_Annealing
	variáveis de entrada: s {solução inicial}, $NroIte$ {Nº de iterações na temperatura T }, λ {taxa de resfriamento}, T_0 {temperatura inicial}
1	$T := T_0$
2	$s^* := s$ {melhor solução obtida até então}
3	enquanto ($T > 1$) faça
4	para $i := 1$ até $NroIte$ faça
5	Gerar uma grade horária (s') mediante a execução de <i>swap</i>
6	$\Delta = f(s') - f(s)$ {diferença entre funções objetivo}
7	se ($\Delta < 0$) então
8	$s := s'$
9	se ($f(s') < f(s^*)$) então
10	$s^* := s$
11	fim-se
12	senão
13	$x :=$ valor randômico entre $[0, 1]$
14	se ($x < e^{-\Delta/T}$) então
15	$s := s'$
16	fim-se
17	fim-se
18	fim-para
19	$T := T \times \lambda$
20	fim-enquanto
21	retorne s^*
22	fim-procedimento

A ideia do algoritmo é perturbar o espaço de soluções, mesmo que haja prejuízo à função de avaliação. O algoritmo inicia atribuindo uma alta temperatura a T e salvando a atual como sendo a melhor. A partir daí, dá início a um laço, mantido enquanto a temperatura T for superior a 1. Ao final de cada laço, a temperatura T é reduzida, mediante a multiplicação de um fator λ , que tem valor entre 0,8 e 0,95, garantindo a redução de T . Para cada temperatura T , um novo laço com um número fixo de iterações (*NroIte*) é executado. A cada iteração, uma nova solução é gerada a partir de um movimento de *swap*. Como isso, espera-se que alguma restrição *soft* seja melhor atendida, o que significa reduzir o valor da função de avaliação Z , de natureza minimizante. Se a solução gerada após a troca for viável, o algoritmo verifica se a função de avaliação Z da nova solução é melhor do que a anterior. Se for melhor, o modelo assume a nova solução como sendo a solução corrente, desprezando a anterior. O algoritmo ainda compara o valor da nova função de avaliação com o valor da melhor solução encontrada até então, que está armazenada em s^* . Caso o valor da função de avaliação Z tenha piorado (aumentado), o algoritmo atribui aleatoriamente a x um valor entre 0 e 1 e compara com $e^{-\Delta/T}$. Se o valor de x for menor do que o valor resultante da exponencial, o modelo assume essa solução, sem se importar com a piora do valor de Z . Este aspecto é que permite que essa meta-heurística escape de locais ótimos, explorando um espaço maior de soluções, justamente para tentar encontrar uma solução melhor. Quando a temperatura T for menor do que 1, o laço principal termina e o algoritmo retorna a melhor solução encontrada durante todo o processo.

6. Resultados computacionais

Para processar os algoritmos propostos no modelo heurístico, foi desenvolvido um aplicativo em *Borland® Delphi Enterprise 7.0 (Object Pascal)*, combinado com *Transact-SQL*, sob a plataforma do *Microsoft® SQL Server 2008*. Para verificar a consistência do modelo, foram criadas duas instâncias de dados, cada uma representando hipoteticamente instituições de ensino de diferentes portes: Instância A (grande porte) e Instância B (médio porte). Todas as instâncias

foram criadas a partir de valores realistas, embora não representem necessariamente dados de alguma IE específica. Os dados das instâncias A e B podem ser acessados em Bornia Poulsen (2012a; 2012b). Como cada novo processamento de uma mesma instância tende a gerar resultados diferentes de outra (afinal, todas as fases do modelo possuem forte componente randômico), cada instância contou com três execuções. Este trabalho denomina cada instância de dados e uma determinada execução como simplesmente “instância”. O modelo foi executado para as instâncias A1, A2, A3, B1, B2 e B3. O computador utilizado foi um notebook com *processador Intel Core i5™*, com 4GB de memória RAM e sistema operacional *Microsoft® Windows 7*. Para fins de cálculo da função de avaliação Z (14), a execução do modelo nas seis instâncias considerou as penalidades exibidas no Quadro 3:

Quadro 3 - Valores das penalidades para cálculo da função de avaliação

α	=	2	(preferência da disciplina por um professor)
β	=	1	(preferência do professor por uma disciplina)
δ	=	10	(número de dias em que professores comparecem à IE)
ρ	=	4	(número de janelas de professores)
σ	=	2	(número de n-uplas não atendidas)
φ	=	100	(número de aulas que excedem ao limite máximo diário)

A fase de melhoramento, que utiliza o algoritmo proposto com a meta-heurística *simulated annealing*, foi executada com os parâmetros de entrada apresentados no Quadro 4:

Quadro 4 - Parâmetros empregados no algoritmo *simulated annealing*

NroIt	=	10	(nº de iterações na temperatura T)
λ	=	0,85	(taxa de resfriamento)
T_0	=	5.000	(temperatura inicial)

O Quadro 5 apresenta todas as informações referentes às instâncias e às execuções de cada uma das fases.

Quadro 5 - Comparativo entre as execuções de cada instância

Dimensões do modelo	A1	A2	A3	Média	B1	B2	B3	Média
Turmas	42	42	42	42	28	28	28	28
Professores	70	70	70	70	58	58	58	58
Locais de aula	32	32	32	32	26	26	26	26
Aulas	1.035	1.035	1.035	1.035	700	700	700	700
Variáveis	42.263	42.263	42.263	42.263	27.955	27.955	27.955	27.955
Fase de construção								
PST	106	112	125	114	24	27	26	26
PTS	77	84	104	88	22	25	24	24
D	244	245	242	244	219	220	221	220
W	173	180	164	172	158	141	148	149
U	143	142	139	141	83	91	88	87
N	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	3.707	3.762	3.708	3.726	3.058	3.025	3.054	3.046
Tempo (minutos)	28,7	29,7	27,4	28,6	13,7	12,7	12,2	12,9
Fase de melhoramento								
PST	106	112	125	114	24	27	26	26
PTS	77	84	104	88	22	25	24	24
D	234	233	237	235	203	206	208	206
W	129	144	122	132	84	86	68	79
U	130	119	110	120	72	82	72	75
N	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	3.405	3.452	3.432	3.430	2.580	2.647	2.572	2.600
Tempo (minutos)	188,5	188,1	189,0	188,5	114,1	114,3	118,2	115,5
Modelo completo								
Tempo (minutos)	217,2	217,8	216,4	217,1	127,8	127,0	130,4	128,4

PST (somatório das preferências das disciplinas pelos professores); PTS (somatório das preferências dos professores pelas disciplinas);

D (somatório de dias de professores presentes na IE); W (somatório de janelas de todos os professores);

U (somatório de todas N-uplas não atendidas); e N (somatório de todas as aulas que excedem o limite máximo diário da disciplina na turma)

Z (valor da função de avaliação = $2.PST + PTS + 10.D + 4.W + 2.U + 100.N$)

O tamanho de cada grupo de instâncias está exposto em Dimensões do modelo, que apresenta o número de elementos de cada um dos conjuntos principais e o número de variáveis de decisão obtido após o processo de refinamento. Em Fase de construção e Fase de melhoramento aparecem os resultados de cada componente da função de avaliação, seus valores finais e o tempo de processamento da execução. Em Modelo completo é apresentado o tempo de execução do modelo completo, obtido através da soma dos tempos de processamento de cada uma das fases (construção e melhoramento).

Pode-se observar que dentro de um mesmo grupo de instâncias, apesar de os dados serem os mesmos, os resultados obtidos, sejam dos componentes da função de avaliação ou dos tempos de processamento, foram diferentes. Isso se deve ao componente randômico dos algoritmos das duas fases, o que pode ser verificado observando a evolução do número de variáveis de decisão nulas em relação ao número de iterações do algoritmo. Na fase de melhoramento, que utilizou o algoritmo da meta-heurística SA, constatou-se que o propósito de redução do valor da função de avaliação foi atingido. Isso é verificado através da redução do número de violações às restrições do tipo *soft*, conforme apresentado no Quadro 5.

A Figura 1, ao exibir as grades horárias de um determinado professor antes e depois da fase de melhoramento, demonstra como o modelo atende à restrição *soft* correspondente à parcela *D* (16) da função de avaliação *Z* (14), que penaliza o total de dias que cada professor deve lecionar na IE semanalmente. A grade horária (a), resultante apenas da fase de construção, exige a presença desse professor em quatro dias da semana na IE, enquanto a grade (b), gerada após a finalização da fase de melhoramento, exige apenas três.

Figura 1 - Demonstração de redução do número de dias com aula (M=Manhã; T=Tarde)

(a) Antes da fase de melhoramento						(b) Depois da fase de melhoramento					
Prof: Isabel (t=49)						Prof: Isabel (t=49)					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX		SEG	TER	QUA	QUI	SEX
M1			27A		27B	M1			27A		
M2						M2			27B		
M3						M3					
M4			27C			M4					
M5						M5					27C
T1		24A				T1		24C			24B
T2					24B	T2		24C			24A
T3	24C	24B			24A	T3		24A			
T4	24C					T4					
T5						T5			24B		

4 dias com aulas

3 dias com aulas

A Figura 2 permite analisar como o modelo atende à restrição *soft* expressa pela parcela *W* (17) da função de avaliação *Z* (14), que penaliza a existência de janelas, através das grades horárias de um determinado professor. A grade horária (a), gerada após a fase de construção, apresenta cinco janelas, enquanto a grade horária (b), resultado da fase de melhoramento, apresenta apenas uma, demonstrando que o algoritmo do SA melhorou a grade horária.

Figura 2 - Demonstração de redução do número de janelas (M=Manhã)

(a) Antes da fase de melhoramento						(b) Depois da fase de melhoramento					
Prof: Vinícius (t=10)						Prof: Vinícius (t=10)					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX		SEG	TER	QUA	QUI	SEX
M1		28B			32C	M1			32C		28B
M2	32C	28B	28B	32A	28B	M2			28B	32A	32C
M3		32A	32B			M3	32A	28B	32B	32A	
M4		32A	28B	32B	32B	M4	32B	32B	28B	32B	32A
M5	32A	28B	32C	32B	32C	M5	32C	32C	28B		

5 janelas

1 janela

Em relação ao componente *U* (18), que pune a função de avaliação *Z* (14) pelo não atendimento às solicitações de n-uplas, a Figura 3 demonstra a grade horária que resultou após o processamento da fase de melhoramento, que passou a atender uma quantidade maior de n-uplas em relação ao resultado da fase anterior.

Figura 3 - Demonstração de melhoramento ao atendimento às solicitações de n-uplas

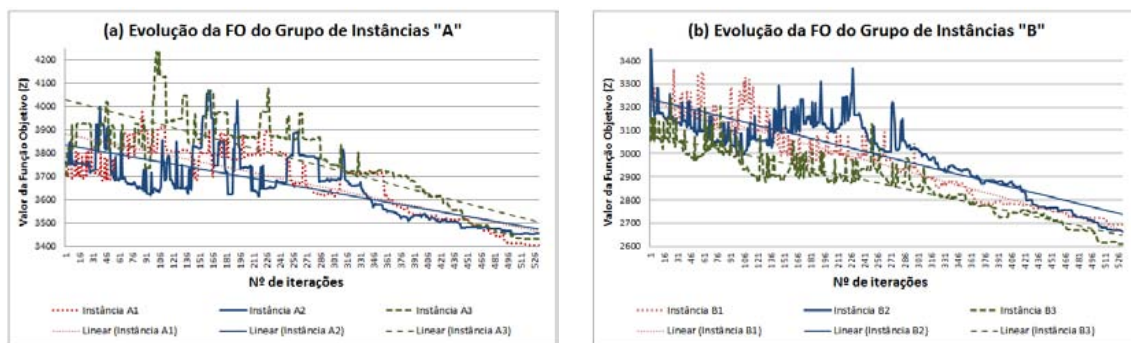
(a) Antes da fase de melhoramento						(b) Depois da fase de melhoramento					
Turma: 24B (c=17)						Turma: 24B (c=17)					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX		SEG	TER	QUA	QUI	SEX
T1	CIE	CIE	LP	EF	MAT	T1	LP	ING	LP	GEO	ART
T2	LP	EF	ING	HIS	ART	T2	LP	HIS	MAT	GEO	MAT
T3	CIE	ART	HIS	GEO	MAT	T3	CIE	CIE	HIS	MAT	MAT
T4	MAT	LP	LP	MAT	LP	T4	LP	LP	LP	MAT	EF
T5	LP	LP	GEO	MAT	MAT	T5	CIE	LP	ART	EF	MAT

2 N-uplas 5 N-uplas

Observa-se, ainda, que o componente N (19), responsável por aumentar o custo da função de avaliação Z (14) toda vez que o modelo gera uma grade horária que não atende o limite diário de aulas de uma disciplina s numa turma c , tem custo zero ao final do processamento de todas as instâncias. Isso é explicado pelo alto custo da penalidade φ (8), que propositalmente foi definida com um valor muito maior do que as demais (ver Quadro 3). Na primeira versão desenvolvida pelos autores, a função de avaliação Z (14) não continha o componente N (19). O cuidado para que o modelo não gerasse uma grade horária que excedesse o limite diário de aulas de uma disciplina s em uma turma c era tratado mediante uma restrição *hard*. Porém, os autores transformaram a então restrição *hard* em *soft* para que o algoritmo do SA pudesse perturbar a função de avaliação Z (14) mediante movimentos de *swap* sem que a grade horária corresse o risco de ficar inviável. Nas primeiras simulações, observou-se que eram necessários muitos movimentos de *swap* para que a grade horária assumisse uma nova configuração sem violar a exigência de não ultrapassar o limite diário de aulas de uma disciplina s em uma turma c . A transformação dessa exigência em uma restrição *soft*, que acarretou na criação do componente N (19), permitiu que o algoritmo do SA fosse processado com maior fluidez e, por consequência, com maior êxito também. Porém, como esse é um tipo de restrição que originalmente é do tipo *hard*, os autores propuseram uma penalidade demasiadamente alta, como forma de o modelo privilegiar a fuga desse custo, mesmo que em detrimento das possíveis economias geradas pelos demais componentes da função de avaliação Z (14).

A Figura 4 apresenta gráficos de evolução do valor da função de avaliação versus o número de iterações para cada grupo de instâncias. As seis instâncias testadas têm comportamento semelhante. À medida que o número de iterações avança, o valor da função de avaliação é perturbado, podendo inclusive crescer, como previsto pela meta-heurística SA, porém há clara tendência decrescente. Linhas de tendências foram agregadas às curvas com o intuito de demonstrar que o propósito de reduzir o valor da função de avaliação é atingido pelo algoritmo da fase de melhoramento. As grandes oscilações são explicadas justamente pelo componente N (19), que tem alto valor de penalidade. Se em um movimento de *swap* o modelo exceder uma aula em relação do limite diário de apenas uma disciplina s em uma turma c , já é suficiente para que haja uma oscilação de 100 unidades no custo total, enquanto o aumento de uma aula para apenas um professor t acarreta na oscilação de tão somente dez unidades.

Figura 4 - Gráfico "Função de avaliação" vs "Nº de iterações" da fase de melhoramento



Como próxima etapa, o modelo foi devidamente validado com a utilização de dados reais do ano letivo de 2011 de uma IE de uma cidade de porte médio da região Sul do Brasil. Esta escola possui 45 turmas oferecidas em dois turnos, abrangendo os ensinos fundamental e médio, 66 professores, 35 locais de aula, sendo 12 compartilhados. As turmas têm 25 períodos de aulas semanais, exceção feita aos 1º, 2º e 3º anos do ensino médio, que têm, respectivamente, 26, 26 e 28 períodos. O processamento do modelo resultou numa função de avaliação com custo de 2.859 (em 6 horas e 22 minutos), enquanto o valor obtido pela grade gerada manualmente foi 2.894. Considerando, portanto, os resultados obtidos neste processo, acredita-se que o modelo está devidamente validado, pois atingiu um custo menor se comparado à grade horária empregada pela escola em 2011, que foi resultado de três semanas de trabalho árduo e que havia sido considerada de excelente qualidade pela própria instituição.

7. Conclusões

Dada a enorme quantidade de variáveis e restrições, o *school timetabling problem* é um problema extremamente complexo. Sua natureza combinatória dificulta muito sua resolução através de programação linear inteira, salvo instâncias muito pequenas. Deste modo, o STP necessita de uma abordagem heurística, o que é plenamente atendido pela modelagem apresentada neste artigo.

Esta pesquisa propôs o desenvolvimento do problema a partir da abordagem de Gans (1981), que formulou o STP englobando seis conjuntos de dados: turmas, disciplinas, professores, locais de aula, dias de semana e períodos de aula, afirmando não ser possível atender todas as restrições. Os trabalhos pesquisados que se sucederam lidam com no máximo cinco conjuntos. A maioria dos estudos abstrai o conjunto local de aula, pressupondo que cada turma está associada a um local de aula. Outro artifício presente em muitos trabalhos é a supressão do conjunto disciplina, considerando que cada disciplina tem um professor associado. Ainda, um número considerável de trabalhos considera esses dois artifícios combinados (supressão do local de aula e da disciplina), simplificando mais seus modelos. O grau de dificuldade de resolução da abordagem deste trabalho pode ser considerado elevado, por não propor qualquer tipo de artifício de supressão de conjunto de dados. No modelo desenvolvido neste artigo, foi possível incorporar recomendações de vários autores pesquisados. Uma recomendação, dada de forma implícita, que viabilizou um melhor desempenho do algoritmo do *simulated annealing* foi a de transformar uma determinada restrição do tipo *hard* em *soft*. Desta forma, o modelo relaxou uma restrição que não aceita qualquer tipo de violação, adotando uma restrição que aceita minimamente alguma violação para que o modelo permitisse mais movimentos de perturbação da solução, justamente com o propósito de encontrar uma combinação que atenda melhor à função de avaliação.

O modelo proposto é passível de ser aplicado tanto em instituições de ensino públicas quanto privadas. Embora a composição da função de avaliação procure reduzir o número de janelas e de dias que cada professor necessita ir à escola, caso típico de instituições particulares, a preocupação em atender ao máximo às solicitações de n-uplas e de não ultrapassar o limite diário de aulas de uma disciplina numa turma atendem aos dois tipos de IE. Futuramente, o modelo poderá ser estendido para instituições de ensino superior que trabalham no regime seriado.

Referências

- Abramson, D.** (1991), Constructing school timetables using simulated annealing: sequential and parallel algorithms, *Management Science*, 37, 98-113.
- Alvarez-Valdes, R., Martín, G.; Tamarit, J.M.** (1996), Constructing good solutions for the Spanish school timetabling problem, *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1203-1215.
- Appleby, J.S., Black, D.V.; Newman, E.A.** (1960), Techniques for producing school timetabling on a computer and their application to other scheduling problems, *The Computer Journal*, 3, 237-245.
- Avella, P., D'auria, B., Salerno, S.; Vasil'ev, I.** (2007), A computational study of local search algorithms for Italian high-school timetabling, *Journal of Heuristics*, 13, 543-556.

- Belingiannis, G.N., Moschopoulos, C.N., Kaperonis, G.P.; Likothanassis, S.D.** (2008), Applying evolutionary computation to the school timetabling problem: the Greek case, *Computer & Operations Research*, 35, 1265-1280.
- Belingiannis, G.N., Moschopoulos, C.N.; Likothanassis, S.D.** (2009), A genetic algorithm approach to school timetabling, *Journal of Operational Research Society*, 60, 23-42.
- Birbas, T., Daskalaki, S.; Housos, E.** (1997), Timetabling for Greek high schools, *Journal of Operational Research Society*, 48, 1191-1200.
- Birbas, T., Daskalaki, S.; Housos, E.** (2009), School timetabling for quality student and teacher schedules, *Journal of Scheduling*, 12, 177-197.
- Bornia Poulsen, C.J.** (2012a), Dados da instância A. Disponível em: <<https://dl.dropbox.com/u/84981398/sbpo2012/borniapoulsen2012a.zip>>. Acesso em: 16 jul. 2012.
- Bornia Poulsen, C.J.** (2012b), Dados da instância B. Disponível em: <<https://dl.dropbox.com/u/84981398/sbpo2012/borniapoulsen2012b.zip>>. Acesso em: 16 jul. 2012.
- Carrasco, M.P.; Pato, M.V.** (2004), A comparison of discrete and continuous neural network approaches to solve the class/teacher timetabling problem, *European Journal of Operational Research*, 153, 65-79.
- Colorni, A., Dorigo, M.; Maniezzo, V.** (1998), Metaheuristics for high school timetabling, *Computation Optimization and Applications*, 9, 275-298.
- Cooper, T. e Kingston, J.** (1993), The solution of real instances of the timetabling problems, *The Computer Journal*, 36, 645-653.
- De Werra, D.**, Construction of school timetables by flow methods, *Working paper*, WP-14, Dept. of Management Sciences, Waterloo Univ. (Ontario), 1970.
- Gans, O.B.** (1981), A computer timetabling system for secondary schools in the Netherlands, *European Journal of Operational Research*, 7(1), 175-182.
- Gotlieb, C.** (1962), The construction of class-teacher timetabling, *Proceeding of the IFIP Congress*, 73-77.
- Jacobsen, F., Bortfeldt, A.; Gehring, H.** (2007), Timetabling at German secondary schools: tabu search versus constraint programming, *VI PATAT*, 439-442.
- Lawrie, N.L.** (1969), An integer linear programming model of a school timetabling problem, *The Computer Journal*, 12(4), 307-316.
- Marte, M.** (2007), Towards constraint-based school timetabling, *Annals of Operations Research*, 155 (1), 207-225.
- Moura, A., Scaraficci, R., Silveira, R.; Santos, V.** (2004), Técnicas meta-heurísticas aplicadas à construção de grades horárias escolares, *XXXVI SBPO*, 1, 1-20.
- Santos, H.G., Ochi, L.S.; Souza, M.J.F.** (2004), An efficient tabu search heuristic for school timetabling problem, *Proceedings of WEA*, 468-481.
- Santos, H.; Souza, M.J.F.** (2007), Programação de horários em instituições educacionais: formulações e algoritmos, *XXXIX SBPO*, 1, 2827-2882.
- Schaerf, A.** (1999a), A survey of automated timetabling, *Artificial Intelligence Review*, 6, 87-127.
- Schaerf, A.** (1999b), Local search techniques for large high school timetabling problems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 29, 368-377.
- Smith, K.A., Abramson, D.; Duke, D.** (2003), Hopfield neural network for timetabling: formulations, methods, and comparative results, *Computer & Industrial Engineering*, 44, 283-305.
- Valouxis, C.; Housos, E.** (2003), Constraints programming approach for school timetabling, *Computer & Operations Research*, 30, 1555-1572.
- Wright, M.** (1996), School timetabling using heuristic search, *Journal of the Operational Research Society*, 47, 347-357.
- Zhang, D., Liu, Y., H'Hallah, R.; Leung, S.** (2010), A simulated annealing with a new neighborhood structure based algorithm for a high school timetabling problems, *European Journal of Operational Research*, 203, 550-558.