APLICAÇÃO DA PESQUISA OPERACIONAL NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DA *EXPRESSÃO GRÁFICA*

Heliza Colaço Góes
FAE Centro Educacional; Escola Evolutiva - São José dos Pinhais/PR; e
Escola Municipal Albert Schweitzer - Curitiba/PR.
helizacol@hotmail.com

Anderson Roges Teixeira Góes
Departamento de Expressão Gráfica – UFPR; e
Departamento de Tecnologia Educacional – Secretaria Municipal de Educação de Araucária/PR.
artgoes@ufpr.br

RESUMO

Este artigo socializa uma aplicação da Pesquisa Operacional por meio da *Expressão Gráfica* utilizando situação problema. Esta atividade é desenvolvida com alunos do Ensino Médio, na disciplina de Matemática - unidade didática de Geometria Analítica. Tal experiência didática surge da necessidade de mostrar aos alunos que a Matemática tem aplicações em problemas reais, e que essa área do conhecimento não é um emaranhado de fórmulas, mostrando que estas nem sempre são necessárias em resoluções de problemas, pois muitos podem ser resolvidos por representações gráficas, um dos elementos da *Expressão Gráfica*.

PALAVRAS-CHAVES: Geometria Analítica; Expressão Gráfica; Pesquisa Operacional.

ABSTRACT

This article socializes an application of Operations Research by Graphic Expression using problem situation. This activity is developed with high school students in Mathematics - Analytical Geometry teaching unit. This teaching experience arises from the need to show students that mathematics has applications in real problems, and that this area of knowledge is not just a many equation, showing that these are not always necessary for resolutions of problems, because many can be solved by graphical representations one of the elements of graphic Expression.

KEY WORDS: Analytical Geometry; Graphic Expression; Operational Research.

Área principal (EDU - PO na Educação)

1. A Expressão Gráfica

Há milhares de anos foram realizados os primeiros esboços de comunicação, afinal o Homem tinha a necessidade em se relacionar com o seu semelhante. Mas, não se pode afirmar que o Homem tenha aprendido a desenhar antes de falar, pois é impossível determinar esta situação uma vez que a linguagem falada não deixa marcas em paredes, como no caso das pinturas e gravuras rupestres.

Na era Paleolítica, essas pinturas foram encontradas em paredes de antigas cavernas e trazia a representação por meio de símbolos das ações diárias do homem primitivo, bem como os desejos e os conhecimentos. Num primeiro momento essas representações assumiam a função mística, onde os povos registravam cenas de seu cotidiano (figura 01) por meio do que se tinha disponível, pensando que desta forma teriam sucesso em dominar o animal que estavam caçando. (AMORIN e REGO, 1998)

Figura 01 – Pinturas rupestres – Toca do Boqueirão – Pedra furada – Piauí. (**Fonte:** FUMDHAM)

Para Struik (1989, p.29), as pinturas rupestres "revelam, sem dúvida, uma notável compreensão da forma; matematicamente falando, revelam uma compreensão da descrição bidimensional dos objetos de valores". E com o passar dos anos, verifica-se a evolução dos registros da linguagem (figura 02a e 02b), até que se possa chegar à escrita atual.

a)  b) 

Figura 02 – a. Escrita Cuneiforme – 3.500 a.C.; b. Escrita Egípcia.
(**Fonte:** a. Libreria-mundoarabe.com; b. AMORC)

Muitos foram os materiais utilizados para as representações antes da invenção do papel - realizada pelos chineses há mais de três mil anos - tais como: bloco de argila, folhas de palmeira, papiro e bambu. Mas, é no Japão que ocorre a divulgação da tinta nanquim criada pelos chineses, onde o *Desenho* ganhou mais espaço, pois, além de guerreiros eles também se dedicavam às artes.

No Renascimento o *Desenho* ganha profundidade por meio de representações no plano a realidade tridimensional, surgindo assim a perspectiva. (Figura 03)

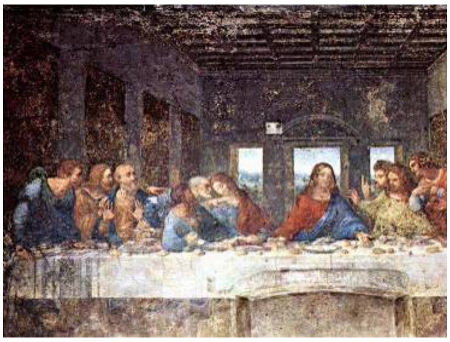


Figura 03 – A Santa Ceia – Leonardo da Vinci (1498) – Técnica mista – 460x880cm.

A *Expressão Gráfica*, forma de se expressar através de *Desenhos*, *Esboços* e demais *Representações Gráficas*, esteve presente em vários momentos da história da civilização, mas é na Revolução Industrial (meados do século XIX) que passou a ter importância nas necessidades industriais e não somente aos interesses da Arte. É também nessa época que o método de Gaspar Monge, criado em XVIII, se consolida: Método da Dupla Projeção Ortogonal (figura 04). Neste método as formas tridimensionais são representadas por sua projeção bidimensional e relações no espaço, sendo atualmente a base dos desenhos técnicos, regidos por várias normas, que no Brasil são editadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

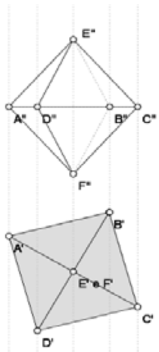


Figura 04 – Geometria descritiva – Método da dupla projeção ortogonal - Octaedro. (**Fonte:** Os autores)

Percebe-se que na atualidade esta forma de se expressar não perdeu sua importância como linguagem de comunicação: *quem já não recorreu a uma representação gráfica para explicar algo que apenas com palavras não era compreensível?* Ou como diz o dito popular quando alguém não entende algo explicado com palavras: *quer que eu desenhe?*

A eficácia na comunicação utilizando uma imagem/desenho pode ser comprovada quando empregadas na sinalização em placas: *pictogramas*. Os pictogramas eliminam ou reduzem as legendas, mostrando que esta forma de linguagem pode ser utilizada nas mais diferentes ciências permitindo melhor entendimento delas e conseqüente assimilação.

Figura 05 – Pictograma – “banheiro para pessoas com necessidades especiais” (**Fonte:** Os autores)

Assim, a *Expressão Gráfica* como recurso no ensino e aprendizado é muito utilizada por professores, mesmo sem o conhecimento deste termo e esse artigo apresenta uma destas utilizações em que por meio deste campo de estudo, que aqui é utilizado como recurso, mostra que a Pesquisa Operacional pode ser apresentada aos alunos do Ensino Médio.

Este trabalho está organizado em quatro seções incluindo esta introdução. A segunda seção apresenta alguns fundamentos das pesquisas em *Expressão Gráfica*. A metodologia, a situação problema e os encaminhamentos metodológicos da atividade são apresentados na terceira seção. A quarta seção apresenta a conclusão.

2. Alguns fundamentos das pesquisas em *Expressão Gráfica*

Nesta seção apresentamos algumas pesquisas que fundamentam a *Expressão Gráfica*, desde a importância da representação gráfica para a criança à este campo de estudo como disciplina no Ensino Superior.

Segundo Montenegro (2001, p. 1),

> “pesquisas sobre o funcionamento do cérebro permitem avaliar a importância da expressão gráfica para a formação integral da pessoa, e é capaz de estimular as capacidades mentais, utilizando a habilidade manual, a sensibilidade artística e a expressão gráfica para desenvolver a inteligência intuitiva, sem esquecer o lado racional, lógico e seqüencial do cérebro”

Esses estímulos foram registrados ainda quando o Homem desenhava em cavernas seus conhecimentos, mas a passagem de uma representação gráfica genérica para a escrita, com códigos e símbolos específicos, é um processo demorado e complexo.

Para Pillar (1996 p.52), o desenho infantil é

> “A passagem da atividade motora para a simbolização que ocorre quando a criança, pela primeira vez, produz uma forma que ela interpreta como semelhante a algum objeto do seu meio (na maioria dos casos, a primeira forma simbólica é a figura humana). À medida que tais marcas se tornam simbólicas, a criança começa a construir círculos, retângulos, triângulos, etc. e a combiná-los em padrões mais complexos, estabelecendo um vocabulário de linhas e formas que são as bases da construção da linguagem gráfica”.

Pereira (2010) apresenta as seguintes considerações sobre o desenho na visão de Piaget,

> “O desenho, manifestação semiótica que surge no período simbólico, evolui em conjunto com o desenvolvimento da cognição. Compartilha mais intimamente, por um lado, as fases da evolução da percepção e da imagem mental, subordinando-se às leis da conceituação e da percepção. Por outro lado, compartilha a plasticidade do brincar, constituindo-se em meio de expressão particular, isto é, um sistema de significantes construído por ela e dóceis às suas vontades”. (PEREIRA, 2010, p.2).

Assim, desenhar é um estágio intermediário entre o pensamento e a sua representação escrita, e aparece de forma muito clara antes mesmo das primeiras fases articuladas pela criança. Com isso, deve-se entender a escrita como sendo um desenhar específico, codificado por e para determinados grupos. É necessário considerar também que no processo de ensino e aprendizagem o “desenhar deveria ser o estágio preparatório ao desenvolvimento da linguagem escrita das crianças” (VYGOTSKY, 1984, p.134).

Quanto ao desenho como figuração gráfica, este é estudado por diferentes autores, dentre eles temos Calvino (1990), Gomes (1996) e Montenegro (2001).

Montenegro (2001) afirma que o desenho deve ser representado em diferentes materiais (papel, argila, areia e outros), pois isto estimula conexões neurais que direcionam gradativamente às atividades como escrever, desenhar, rabiscar, produzir modelos. Sobre este mesmo assunto Gomes (1996) trata com detalhes em “Desenhismo”: “A aptidão para a representação gráfica através da linguagem do desenho parece mesmo intrínseca, ou seja, todos nós a possuímos ao nascer" (GOMES,1996 p.26).

Já para Calvino (1990), em cada imagem estão escondidas outras e estas se formam num campo de analogias, simetrias e contraposições. Este autor também afirma (1990, p. 108) que "a capacidade de pôr em foco visões de olhos fechados, de fazer brotar cores e formas de um alinhamento de caracteres alfabéticos negros sobre uma página branca, de pensar por imagens" produz conhecimento, pois utiliza a imaginação como instrumento do saber para expressar o que efetivamente se entendeu e se aprendeu do que foi ensinado. Com isso é valorizada também a escrita e a expressão oral, ressaltando o modo intuitivo da mente.

Pelo descrito brevemente nesta seção vê-se a importância da *Expressão Gráfica* na formação do indivíduo nas séries iniciais. No entanto, nossa vivência profissional, fundamentada nos escritos de Montenegro (2001) e Poi, Luz e Góes (2011), permitem estabelecer como hipótese que a escola no Brasil está cada vez mais deixando de dar importância ao *Desenho*, não apenas como disciplina, que já foi eliminada do currículo da Educação Básica, mas como forma de representação e de expressão, especialmente em aulas de Matemática.

Na próxima seção apresentamos a atividade didática relacionada ao Ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio, onde a representação gráfica é auxiliar a resolução de problema de Pesquisa Operacional.

3. *Expressão Gráfica* e Pesquisa Operacional: uma aplicação na Geometria Analítica

A Geometria analítica teve como principal idealizador o filósofo francês René Descartes (1596-1650). Com o auxílio de um sistema de eixos associados a um plano, ela faz corresponder a cada ponto do plano um par ordenado e vice-versa. Se os eixos desse sistema são perpendiculares na origem, tal correspondência determina o que chamamos de sistema cartesiano ortogonal, ou simplesmente plano cartesiano. (BARRETO FILHO, 2000)

Com isso, percebe-se que há reciprocidade entre o estudo da Geometria (ponto, reta, circunferência) e da Álgebra (relações, equações, entre outros), podendo-se representar graficamente relações algébricas e expressar algebricamente representações gráficas.

Para contextualizar todas essas relações, utilizamos a Pesquisa Operacional, mais especificamente, sem formalizações, a resolução gráfica do método Simplex.

Essa atividade apresenta aos alunos os conteúdos de "representação de retas", "representação da interseção de retas", "representação de inequações" e "representação de interseção de inequação" e na sequência, esses conteúdos são aplicados num exemplo, que aqui pode ser considerado uma situação real. Como forma de agilizar o trabalho em sala de aula, os dados utilizados no "problema real", são provenientes das inequações, que por sua vez são provenientes das equações.

Antes de apresentar o problema aos alunos, são realizadas as considerações matemáticas e suas representações no plano cartesiano.

O texto apresentado a seguir é o material disponibilizado aos alunos, onde os caracteres em itálico são comentários ou sugestões de procedimentos metodológicos ao professor ou, ainda, o desenvolvimento e resoluções realizadas com os estudantes.

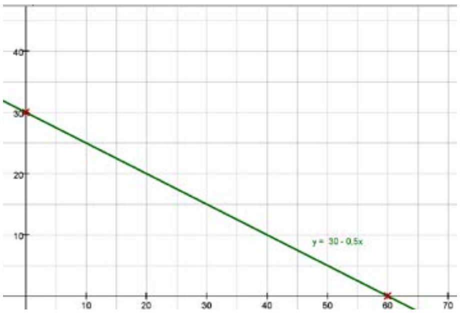
a) Representação de Retas

> Para representar graficamente as retas de equações $ax + by + c = 0$, *com* $b \neq 0$, isolamos a variável $\boldsymbol{y}$ e atribuímos valores a $\boldsymbol{x}$, $x \in \Re$, obtendo pares ordenados que são pontos pertencentes à reta. Assim, é conveniente usar a equação na forma reduzida, já que ela apresenta o $\boldsymbol{y}$ isolado. (BARRETO FILHO, 2000)

Exemplo: Represente no plano cartesiano a reta r: *y = 30 - 0,5x*

x	*y = 30-0,5x*	*y*
0	*y=30-0,5.0*	*30*
60	*0=30-0,5x*	*0*

Os alunos devem determinar dois pares ordenados que pertençam à reta. A escolha de apenas dois pares é justificada pelo axioma de Euclides (Geometria Euclidiana): dois pontos distintos determinam uma única reta – nesta definição se considera que retas coincidentes possuem mesma representação.
Solicite que os alunos determinem o valor de y quando x=0 e o valor de x quando y=0, pois assim, os pares ordenados estão nos eixos cartesianos, facilitando sua representação.
Determinado os dois pontos, a representação da reta pode ser desenvolvida em folha de papel quadriculado com lápis e régua ou no computador em software de Geometria Dinâmica.
Realizada esta representação, deve-se solicitar aos alunos que realize o mesmo com a reta s: y = 45 -1,5x.

a)


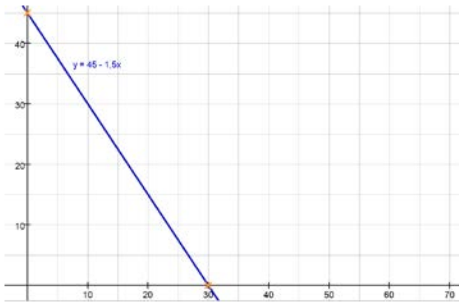
b)


Figura 06 – Representação gráfica das retas a) *y = 30 - 0,5x*; b) *y = 45 – 1,5x*

b) Coordenadas do ponto de intersecção de retas

A intersecção das retas *r* e *s*, quando existe, é o ponto *P(x, y)* **comum a elas** que é a solução do sistema formado pelas equações das duas retas. (BARRETO FILHO, 2000)

Exemplo: Determine o ponto de intersecção das retas *r: y = 30 - 0,5x* e *s: y = 45 -1,5x.*

Os estudantes devem determinar as coordenadas por meio da representação gráfica, pois a interseção das retas no plano cartesiano é a solução do sistema de equações. Esse método é pouco utilizado por professores da Educação Básica e com isso, pode-se mostrar aos alunos que há diversas maneiras de resolver um problema matemático.

Solução Gráfica

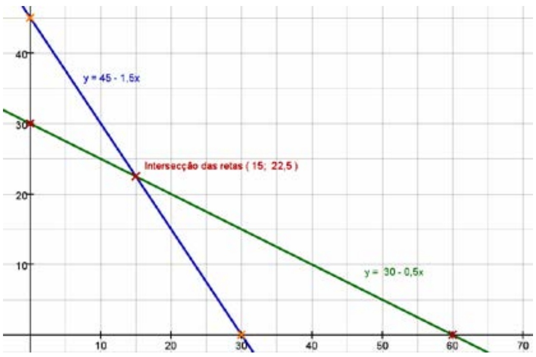


Figura 07 – Representação gráfica da interseção das retas *y = 30 - 0,5x e y = 45 – 1,5x.*

Na sequência, tal determinação pode ser apresentada utilizando os métodos algébricos de resolução de sistemas de equações: comparação, subtração e substituição. Apresentamos a seguir a resolução pelo método da comparação.

Solução Algébrica

$$\begin{cases} y = 30 - 0,5\,x \\ y = 45 - 1,5x \end{cases}$$

igualando as equações temos: $30 - 0,5x = 45 - 1,5x$

$$x = 15$$

Substituindo o valor de x encontrado em qualquer das equações do sistema temos:

$$y = 30 - 0,5.15$$
$$y = 22,5$$

Logo o ponto ***P(15; 22,5)*** *é o ponto de intersecção das retas* **r** *e* **s**, *determinado em ambos os métodos: representação gráfica e algébrico.*

c) Representação de Inequações

Toda reta contida em um plano divide este em duas regiões chamadas semiplanos, podendo ser determinados por retas verticais, horizontais ou transversais. (MARCONDES, 2000)

Exemplo: Represente graficamente as inequações: $0,5x + y \le 30$ e $3x + 2y \le 90$.

Considerando a primeira inequação dada, para verificar qual o semiplano que essa representa deve-se realizar teste com um ponto qualquer não pertencente à reta y = 30 - 0,5x. Esse ponto, por exemplo, pode ser a origem do sistema cartesiano A(0,0). Se A satisfizer a inequação, significa que A pertence ao semiplano, caso contrário o semiplano é a região que não contém A.

Substituindo as coordenadas x e y do ponto A na inequação dada tem-se

$$0,5x + y \le 30$$
$$0,5.0 + 0 \le 30$$
$$0 \le 30 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo a inequação $0,5x + y \le 30$ *representa, neste caso, o semiplano inferior a reta y=30-0,5x e a contém devido ao sinal "*$\le$*" (menor ou igual).*

Realizando o mesmo procedimento para a segunda inequação, $3x + 2y \le 90$, *tem-se*

$$3x + 2y \le 90$$
$$3.0 + 2.0 \le 90$$
$$0 \le 90 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo a inequação $3x + 2y \le 90$, *representa, neste caso, o semiplano inferior a reta y = 45 -1,5x e a contém.*

a) 

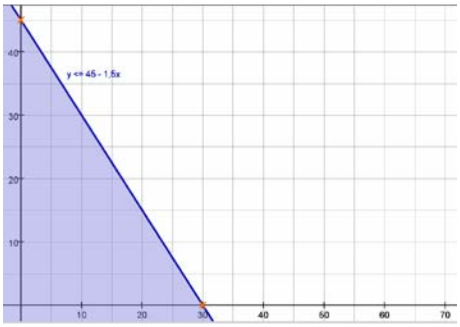
b) 

Figura 08 – Representação gráfica das inequações: a) $0{,}5x + y \leq 30$; b) $3x + 2y \leq 90$.

Neste momento, é apresentada a situação real aos alunos, onde se são utilizadas as representações gráficas construídas até o momento.

d) Situação problema

Um aluno que trabalha numa indústria moveleira da região trouxe a seguinte problemática: a empresa em que trabalha produz dois tipos de mesa, mesa A e mesa B. Para a confecção do tampo da mesa A são necessários 3m² de madeira, já para a confecção do tampo da mesa B são necessários 2m². A confecção do tampo da mesa A é realizado por um operário em 30 minutos, já a confecção do tampo B, por ter mais detalhes, demora 1 hora.

Este aluno informou que toda a produção é vendida, mas há problema com a limitação de hora de mão de obra que é de 30h e de matéria prima que é de 90m² para a confecção dos tampos.

Dessa forma é necessário determinar quantas peças de cada tampo devem ser fabricadas para que se obtenha lucro máximo, sabendo que o lucro com o tampo A é R$150,00 por unidade e do tampo B é R$180,00 por unidade.

A solução desta situação é realizada em seis etapas descritas a seguir:

1ª etapa) Organização dos dados

Após discutir o problema com os alunos, para melhor visualização dos dados é sugerido que se realize um quadro, como o abaixo.

	Mão de obra	***Material***	***Lucro***
Tampo A	*30min*	*3 m^2*	*R$ 150,00*
Tampo B	*1h*	*2m^2*	*R$ 180,00*
Disponibilidade	*30h*	*90m^2*	

2ª etapa) Determinar as variáveis (quantidade a ser fabricada de cada tampo)

x = quantidade de tampos A

y = quantidade de tampos B

3ª etapa) Determinar a função objetivo (o que realmente se busca)

Maximizar o lucro

Aqui a função lucro (L) é a soma do lucro obtido com a venda dos tampos A com o lucro dos tampos B.

O lucro obtido com a venda dos tampos A é igual ao valor do lucro multiplicado por x (quantidade de tampos A), o mesmo ocorre para B. Desta forma, a função L a seguir representa o lucro total

$$L = 150x + 180y$$

4ª etapa) Determinação das restrições.

Para obter o lucro máximo, considerando apenas os dois itens analisados acima, teríamos o lucro infinito. Mas, existem algumas restrições, são elas:

i) *O tempo máximo disponível de mão de obra é 30 horas, ou seja:*

$$\boxed{\sum (\text{quantidade de horas x quantidade de peças}) \leq 30}$$

Analisando o quadro da primeira etapa tem-se que 0,5x é a expressão que representa a quantidade de horas para produzir x peças do tampo A e 1y é a expressão que representa a quantidade de horas para produzir y peças do tampo B.
Logo a inequação desta restrição é $0{,}5x + y \leq 30$.

ii) *Matéria prima máxima disponível é 90m².*

$$\boxed{\sum (\text{quantidade de matéria prima x quantidade de peças}) \leq 90}$$

Analisando o quadro da primeira etapa tem-se que 3x é a expressão que representa a quantidade de matéria prima utilizada na produção de x peças do tampo A e 2y é a expressão que representa a quantidade de matéria prima utilizada na produção de y peças do tampo B.
Como se produz os tampos A e B com a mesma matéria prima, tem-se a seguinte inequação: $3x + 2y \leq 90$.

iii) *A empresa pode produzir os dois tipos de tampo ou apenas um deles.*

Dessa forma, a quantidade mínima é zero, logo: $0 \leq x$ *e* $0 \leq y$.

5ª etapa) Representações das inequações da etapa anterior em um mesmo plano cartesiano.

As duas primeiras inequações estão representadas, separadamente nas figuras 8a e 8b, mas como aqui se quer a intersecção delas, essas são apresentadas na figura 09 a seguir, sendo que tal interseção resulta na região mais escura.

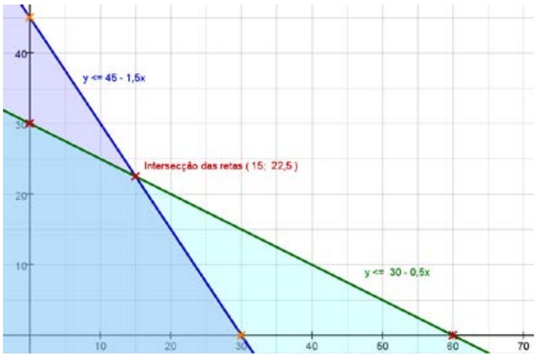


Figura 09 – Representação gráfica da interseção das duas primeiras inequações.

Já a figura 10 apresenta a intersecção das quatro inequações, ou seja, a região do plano em que os pontos satisfazem todas inequações da 4ª etapa da etapa anterior.

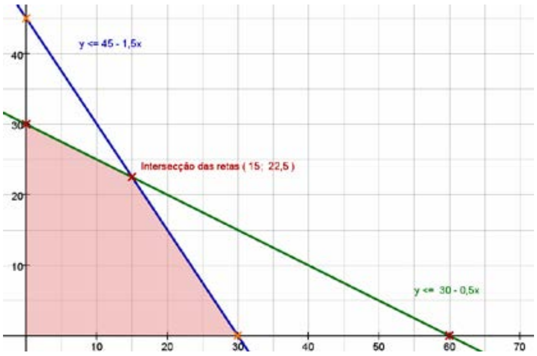


Figura 10 – Representação gráfica da interseção das quatro inequações

A região indicada na figura 10 anterior mostra que qualquer ponto dessa satisfaz as quatro inequações. No entanto, estamos em busca do ponto que fornece o lucro máximo.

Um teorema da Pesquisa Operacional indica que o lucro máximo é obtido por um dos vértices do polígono formado por esta região.
Este teorema é parte integrante do método simplex, proveniente da área da Pesquisa Operacional. Assim, sugerimos que leitura aprofundada sobre tal método e sua formalização, bem como seu método de resolução gráfica, pode ser encontrada em Puccini (1975).

O polígono formado pela intersecção das inequações neste problema é um quadrilátero que possui como vértices os seguintes pontos: (0,0), (0,30), (30,0) e (15, 22,5). Com isso, vamos substituir as coordenadas destes vértices na função objetivo e verificar qual produz maior valor para a função lucro.
Cabe lembrar que as coordenadas dos pontos indicam a quantidade de cada tampo que deve ser produzida, conforme definido na 2ª etapa.

Ponto (0,0) $\Rightarrow L = 150.0 + 180.0 = 0$
Ponto (0,30) $\Rightarrow L = 150.0 + 180.30 = 5400{,}00$
Ponto (30,0) $\Rightarrow L = 150.30 + 180.0 = 4500{,}00$
Ponto de intersecção das inequações (15, 22,5) $\Rightarrow L = 150.15 + 180.22{,}5 = 6300{,}00$

Assim, o ponto que indica a produção que fornecerá o lucro máximo é (15, 22,5), ou seja, 15 tampos A e 22,5 tampos B.

e) Considerações sobre a situação contextualizada apresentada

Por meio da resolução gráfica do método simplex, devem ser produzidos 15 tampos da mesa A e 22,5 tampos da mesa B.
No entanto, não se pode produzir meio tampo. Com isso, deve ser determinado um valor inteiro para a produção dos tampos B.
Para que as restrições de matéria prima e mão de obra continuem sendo satisfeitas, a resposta para este problema é 15 e 22, pois 23 unidades estão fora do domínio em questão, o que pode ser verificado se substituirmos os valores x = 15 e y = 23 nas duas primeiras inequação da 4ª etapa.

$$
\begin{array}{ll}
0{,}5x + y \le 30 & 3x + 2y \le 90 \\
0{,}5.15 + 23 \le 30 & 3.15 + 2.23 \le 90 \\
7{,}5 + 23 \le 30 & 45 + 46 \le 90 \\
30{,}5 \le 30(\,falso) & 91 \le 90(\,falso)
\end{array}
$$

4. Considerações Finais

As situações contextualizadas despertam nos alunos interesse pelo conteúdo, já a representação gráfica (*Expressão Gráfica*) torna a matemática não abstrata. Quanto a resolução gráfica do método simplex, esta atividade mostra que se pode resolver situações reais também no Ensino Médio, não somente no Ensino Superior onde geralmente o método é apresentado aos estudante. Além disto, se for utilizado *softwares* de Geometria Dinâmica a parte algébrica não é necessária e assim, mostra que *Expressão Gráfica* também pode ser utilizada como método para resolução de problemas matemáticos.

Cabe ressaltar que existem diversos cursos técnicos (cursos em que se espera mais aplicações dos conteúdos escolares) onde pode ser introduzidas técnicas da Pesquisa Operacional para problemas de otimização específicos, por exemplo, no curso Técnico em Agroindústria, é possível desenvolver problemas em relação à produção agrícola, como iogurtes, doces e queijos, que, certamente, levarão a problemas de otimização.

Assim, é possível tornar o ensino com significado para os estudantes, basta que os professores saiam da zona de conforto e pesquisem outras áreas onde se tem a aplicação, mesmo que o formalismo da técnica não seja apresentado em um nível de abstração menor dos alunos.

Referências

Amorin, A. L.; Rego, R. M. (1998) *O profissional de desenho e as novas tecnologias. In: Congresso Internacional de Engenharia Gráfica nas Artes e no Desenho.* Feira de Santana/BA.

Barreto Filho, B. (2000) *Matemática aula por aula: volume único: ensino médio* – São Paulo: FTD.

Calvino, I. (1990) *Seis propostas para o próximo milênio.* São Paulo: Companhia das Letras.

Gomes, L. V. N. (1996) *Desenhismo.* Santa Maria, RS: Universidade Federal de Santa Maria.

Marcondes, S. G. (2000) *Matemática. Volume único: ensino médio***.** Editora Ática. São Paulo, SP. p. 348 a 350.

Montenegro, G. (2001) *A Expressão Gráfica e Conhecimento – Pensamento visual e inteligência.* Revista Escola de Minas, vol.54 no.1 Ouro Preto Jan./Mar.

Pereira, L. T. K. (2010) *O desenho infantil e a construção da significação: um estudo de caso.* Disponível no portal da UNESCO <http://portal.unesco.org/culture/en/files/29712/11376608891lais-krucken-pereira.pdf/lais-krucken-pereira.pdf> Acessado em 12 de out. de 2010.

Pillar, A. D. (1996) *Desenho e escrita como sistemas de representação.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Poi, T. M.; Luz, A. A. B. S.; Góes, A. R. T. (2011) *Análise do ensino da Expressão Gráfica no currículo do curso de Matemática da UFPR. In: XX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico / IX International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design - GRAPHICA*, Rio de Janeiro.

Puccini, A. de L. (1975) *Introdução a Programação Linear*. LTC, Rio de Janeiro, Brasil.

Struik, D. J. (1989) *História concisa das matemáticas.* Lisboa/Portugal: Gradiva Publicações.

Vygotsky, L. L. (1984) *A formação social da mente.* São Paulo, Martins Fontes.