

Programação Dinâmica Determinística versus Estocástica em um Problema de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos

Danilo A. da Silva¹, Luiz H. B. Bertolucci¹, Marinho G. Andrade¹,
Eduardo F. Costa¹, Secundino Soares²

¹*Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
ICMC/USP - Campus de São Carlos
Caixa Postal 668, 13560-970
São Carlos-SP, Brasil*

²*Departamento de Engenharia de Sistemas - FEEC/UNICAMP
Caixa Postal 6101, 13083-852
Campinas-SP, Brasil*

Emails: danilo@icmc.usp.br, bertolucci@icmc.usp.br, marinho@icmc.usp.br,
efcosta@icmc.usp.br, dino@cese.fee.unicamp.br

RESUMO

Algumas abordagens para o problema de Planejamento Ótimo da Operação de Sistemas Hidrotérmicos (POOSH) utilizam modelos estocásticos para representar as vazões afluentes dos reservatórios do sistema. Estas abordagens utilizam em geral técnicas de Programação Dinâmica Estocástica (PDE) para resolver o POOSH. Por outro lado, muitos trabalhos têm defendido o uso dos modelos determinísticos ou, particularmente, a Programação Dinâmica Determinística (PDD) por representar de forma individualizada as usinas hidroelétricas do sistema. Neste contexto, este trabalho tem por objetivo comparar o desempenho da solução do POOSH obtida via PDD com a solução obtida pela PDE, que emprega um modelo Markoviano periódico, com distribuição condicional log-normal truncada para representar as vazões. As comparações foram feitas simulando a operação das usinas hidroelétricas de Furnas e Sobradinho, considerando uma séries de vazões geradas artificialmente.

PALAVRAS CHAVE: Planejamento Ótimo da Operação de Sistemas Hidrotérmicos, Programação Dinâmica Estocástica, Programação Dinâmica Determinística.

ABSTRACT

The problem of Optimal Operation Planning of Hydrothermal Systems (OOPHS) is sometimes solved by employing stochastic models to represent the inflows in the reservoirs that compose the system. These approaches typically use the Stochastic Dynamic Programming (SDP) to solve the OOPHS. On the other hand, many authors propose the use of deterministic models and, particularly, the Deterministic Dynamic Programming (DDP) as it individually represents the interaction between the hydroelectric plants. In this context, this paper aims to compare the performance of the solution for the OOPHS obtained via DDP with the one given by SDP. The SDP employs a Markovian model with conditional truncated log-normal distribution to represent the inflow. We have compared the performances of the DDP and SDP solutions by simulating the hydroelectric plants of Furnas and Sobradinho, employing artificially generated series.

KEYWORDS: Operation Planning of Hydrothermal Systems, Stochastic Dynamic Programming, Deterministic Dynamic Programming.

1 Introdução

O problema do planejamento da operação de um conjunto de usinas hidroelétricas visa estabelecer regras para determinar a turbinagem de cada reservatório de acordo com o volume de água presente no sistema e com os valores observados para as vazões afluentes. Esta é uma tarefa de alta complexidade, uma vez que envolve inúmeras restrições, relacionadas à capacidade de armazenamento e turbinagem dos reservatórios; dependência de variáveis estocásticas, considerando principalmente a aleatoriedade das vazões afluentes; e utilização de equações não lineares, como, por exemplo, para o cálculo da potência gerada pelas usinas.

Para a otimização do problema, pode-se adotar diversas funções objetivo, tais como, minimização da perda de energia potencial armazenada, maximização da energia total produzida, minimização da quantidade de água vertida, dentre outros (Wurbs 1996, Yeh 1985). Porém, neste trabalho foi considerada uma função objetivo relacionada com a minimização dos custos de produção de energia em um sistema hidrotérmico (Pereira 1985, Soares & Carneiro 1991), ou seja, constituído de usinas hidroelétricas e termoelétricas. A produção de energia hidroelétrica, além de menos poluente, apresenta um custo muitas vezes menor que a termoelétrica, uma vez que a primeira utiliza-se da energia potencial gravitacional da água em um reservatório para geração de energia elétrica, enquanto uma usina termoelétrica utiliza-se de combustíveis como carvão, óleo, gás ou combustíveis nucleares. Assim, uma boa estratégia é utilizar prioritariamente hidroelétricas, enquanto termoelétricas devem cumprir um papel de complementação para garantir o atendimento à demanda energética. No Brasil, a criação do Sistema Interligado Nacional (SIN) facilitou o intercâmbio de energia elétrica entre as regiões geográficas brasileiras, favorecendo a implementação desta estratégia, comumente denominada minimização da energia complementar (Barros, Tsai, Yang, Lopes & Yeh 2003). Com isto, este problema passa a ser denominado como planejamento da operação de um sistema hidrotérmico, cuja solução consiste em definir regras para a turbinagem de um sistema de usinas hidroelétricas que promovam o menor custo de complementação energética por termoelétricas.

Os modelos matemáticos utilizados para representar o Planejamento Ótimo da Operação de Sistemas Hidrotérmicos (POOSH) têm como uma de suas principais características a modelagem da natureza estocástica das vazões que chegam aos reservatórios. Em vista disto, muitos trabalhos têm utilizado técnicas de Programação Dinâmica Estocástica (PDE) para resolver o POOSH. No entanto, em todos estes trabalhos, com o intuito de contornar o problema de dimensionalidade da PDE, esta técnica é empregada considerando-se um modelo agregado das usinas hidroelétricas, ou seja, as usinas hidroelétricas que compõem o sistema não são representadas de forma individualizada, o que acarreta um certo grau de subotimalidade na solução do problema. Por outro lado, ao abrir mão da representação estocástica das vazões empregando-se a Programação Dinâmica Determinística (PDD), é possível tratar de forma mais coerente a interação individualizada entre as usinas hidroelétricas do sistema. Assim, a PDD por um lado diminui a subotimalidade introduzida pelo modelo agregado de usinas da PDE, mas por outro introduz a perda de otimalidade ao não considerar a estocasticidade das vazões afluentes. Neste contexto, torna-se imprescindível fazer uma comparação entre estas duas técnicas para avaliar a subotimalidade provocada pela representação determinística das vazões.

Considerando o exposto, neste trabalho tem-se por objetivo fazer comparações entre as soluções da PDE e a PDD para o problema de POOSH, considerando um sistema composto por uma usina hidroelétrica e uma termoelétrica, em um cenário com demanda de potência conhecida. É importante apresentar os custos relativos à PDE pois, desconsiderando a necessária discretização das variáveis, a solução dada por esta técnica em um sistema com uma

única usina pode ser considerada como ótima para o problema (Ouarda & Labadie 2001). Na PDE, o modelo proposto para as vazões afluentes ao reservatório, é um processo de Markov periódico (modelo periódico autorregressivo, PAR(1)) com distribuição condicional log-normal truncada. Para avaliar o grau de subotimalidade da solução obtida via PDD em relação à PDE, são feitas simulações da operação do sistema considerando séries de vazões geradas artificialmente com o modelo PAR(1). Nos estudos realizados neste trabalho foram considerados dados reais das usinas hidroelétricas de Furnas e Sobradinho.

2 Modelagem do Problema

Na formulação deste problema é considerado a discretização mensal com horizonte de planejamento T e as seguintes variáveis:

- x_t : volume de água (hm^3) armazenado no reservatório, $t = 0, \dots, T$. Em geral, estes volumes devem atender às restrições físicas da capacidade de armazenamento do reservatório, tal que, $x_{min} \leq x_t \leq x_{max}$.
- y_t : vazão afluente (m^3/s) ao reservatório, $t = 0, \dots, T - 1$. Esta vazão é de natureza aleatória e modelada como um processo de Markov com função densidade de probabilidade condicional, $f(y_t|y_{t-1})$, definida para todo $t = 0, \dots, T - 1$ com y_{-1} conhecido.
- u_t : vazão turbinada (m^3/s), $t = 0, \dots, T - 1$. A vazão u_t é a variável de decisão do problema de POOSH e, em geral, deve atender às restrições físicas da turbina, ou seja, $u_{min} \leq u_t \leq u_{max}$.
- v_t : vazão vertida (m^3/s), $t = 0, \dots, T - 1$. O vertimento ocorre para manter o volume do reservatório abaixo do volume máximo de operação, ou seja, $x_t \leq x_{max}$. Em geral, as vazões vertidas devem atender as restrições físicas do vertedouro, tal que $0 \leq v_t \leq v_{max}$.
- q_t : vazão defluente (m^3/s), $t = 0, \dots, T - 1$. A vazão q_t corresponde a soma das vazões turbinadas u_t e vertida v_t , ou seja, $q_t = u_t + v_t$.

Estas variáveis definem a equação dinâmica do reservatório, também chamada de equação de balanço hídrico, dada para $t = 0, \dots, T - 1$, por

$$x_{t+1} = x_t + \alpha (y_t - q_t), \quad (1)$$

em que α é uma constante que converte unidades de vazão (m^3/s) em unidades de volume (hm^3).

Como é visto abaixo, um fator importante a ser considerado no cálculo da potência hidroelétrica gerada, é a altura de queda bruta, pois é com o uso desta que se obtém a capacidade de produção da usina hidroelétrica. Esta variável é definida como a diferença entre os níveis de água do reservatório (cota de montante) e do canal de fuga (cota jusante). A cota de montante é uma função do volume armazenado no reservatório x_t . Costuma-se utilizar polinômios para representar esta função. A obtenção desses polinômios é feita a partir de estudos topográficos da região alagada pela construção da barragem. Neste trabalho denota-se o polinômio de cota de montante por $h_1(x_t)$. Assim como a cota de montante do reservatório, a cota do canal de fuga também é representada por um polinômio.

O polinômio de cota do canal de fuga depende da defluência q_t e será representado por $h_2(q_t)$. Desta forma, a altura de queda bruta da usina pode ser calculada como

$$h(x_t, q_t) = h_1(x_t) - h_2(q_t). \quad (2)$$

A função de geração da usina hidroelétrica, denotada por $H_t(x_t, u_t, v_t)$, representa a quantidade de energia gerada pela hidroelétrica (em MW-mês) em cada mês $t = 0, \dots, T-1$, em função do volume de água armazenado no reservatório, da vazão turbinada e da vazão vertida. Após algumas simplificações, esta função é representada por

$$H_t(x_t, u_t, v_t) = \rho h(x_t, q_t) u_t, \quad (3)$$

em que ρ representa a produtividade específica da usina, que corresponde ao produto da aceleração da gravidade pela densidade da água e pelo rendimento médio do conjunto turbina-gerador, neste trabalho considerada constante.

Denota-se por D_t a demanda de energia elétrica (em MW-mês) a ser atendida pelo sistema a cada mês $t = 0, \dots, T-1$ e denota-se por G_t a geração térmica complementar, necessária para o atendimento da demanda D_t , tal que $G_t = D_t - H_t(x_t, u_t, v_t)$. Associada a estas variáveis define-se uma função, que representa o custo da geração térmica em um horizonte T , dada por

$$J_u = \sum_{t=0}^{T-1} \{D_t - H_t(x_t, u_t, v_t)\}^2 + \Psi(x_T), \quad (4)$$

em que $\Psi(x_T)$ representa o custo terminal, com $x_T = x_{max}$.

Com isso, tem-se a formulação do POOSH como um problema de otimização estocástico, considerando x_0 e y_{-1} conhecidos e as equações (1)-(4), para $t = 0, \dots, T-1$. A modelagem desse problema é dada por

$$V_0(x_0, y_{-1}) = \text{Min}_{u_0, \dots, u_{T-1}} E \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} [D_t - H_t(x_t, u_t, v_t)]^2 + \Psi(x_T) \right\}$$

sujeito a:

$$x_{t+1} = x_t + \alpha(y_t - q_t), \quad (5)$$

$$H_t(x_t, u_t, v_t) = \rho h(x_t, q_t) u_t, \quad (6)$$

$$x_{min} \leq x_t \leq x_{max}, \quad (7)$$

$$u_{min} \leq u_t \leq u_{max}, \quad (8)$$

$$v_t = \max(0, x_t + \alpha(y_t - u_t) - x_{max}), \quad (9)$$

$$q_t = u_t + v_t, \quad (10)$$

$$0 \leq v_t \leq v_{max}, \quad (11)$$

em que o valor esperado em (5) é calculado com relação as densidades de probabilidade condicional das vazões $f(y_t|y_{t-1})$ para $t = 0, \dots, T-1$.

3 Programação Dinâmica

Basicamente, a proposta da Programação Dinâmica é fragmentar o problema original em sub-problemas cujas soluções podem ser obtidas mais facilmente. Para detalhes sobre o método e discussão sobre diferentes formas de implementação da programação dinâmica

no gerenciamento de reservatórios, consulte (Nandalal & Bogardi 2007), e, para excelente revisão sobre o tema, consulte (Yakowitz 1982). Para resolver o problema (5)-(11) usando o algoritmo da PDE, é necessário obter a equação de Bellman, ou seja, calcular a função recursiva definida por

$$V_t(x_t, y_{t-1}) = \underset{u_t}{\text{Min}} E \left\{ [D_t - H_t(x_t, u_t, v_t)]^2 + V_{t+1}(x_{t+1}, y_t) \mid x_t, y_{t-1} \right\}$$

sujeito as restrições (5)-(11),
para $t = 0, \dots, T - 1$, com $V_T(x_T, y_{T-1}) = \Psi(x_T)$.

A formulação do problema de PDE exige a determinação de um modelo estocástico para a série de vazões, que consiste na escolha e ajuste das funções densidade de probabilidade condicional $f(y_t \mid y_{t-1})$ para $t = 0, \dots, T - 1$. Para obter o controlador da PDD, emprega-se a mesma formulação que a PDE, no entanto, admite-se que a vazão y_t seja conhecida, de modo que é possível sumprimir o valor esperado da equação acima.

3.1 Modelo de Vazão

Para desenvolver o modelo de vazões LN-Truncada, algumas considerações devem ser feitas. Dado que y_t é a vazão do mês corrente m , tem-se:

- i) $y_t \in (y_m^{\min}, y_m^{\max})$;
- ii) Seja $z_t \in \mathbb{R}$, então $z_t = \ln \left(\frac{y_t - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_t} \right)$;
- iii) $z_t \sim N(\mu_m^{(z)}, \sigma_m^{(z)2})$,

onde $t = t(r, m) = s(r - 1) + m$, $s = 12$, $m = 1, \dots, 12$ e $r = 1, 2, \dots, n$, na qual r refere-se aos anos e n o número de anos a ser considerado.

Além disso, é razoável supor que z_t e as observações anteriores, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots , estejam relacionadas por um modelo periódico autorregressivo de ordem p_m , no entanto, a utilização desse modelo terá forte impacto na distribuição condicional utilizada na PDE, tornando o problema intratável quanto ao tempo computacional, este fenômeno é conhecido como “maldição da dimensionalidade” (Bertsekas 2000). Sendo assim, é necessário utilizar-se de um modelo de baixa ordem, nesse caso, será adotado um modelo periódico autorregressivo de ordem $p_m = 1$, PAR(1), dado por

$$\left(\frac{z_t - \mu_m^{(z)}}{\sigma_m^{(z)}} \right) = \phi_m \left(\frac{z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \right) + a_t,$$

onde a_t são ruídos independentes identicamente distribuídos (i.i.d.) com distribuição normal $N(0, \sigma_m^{(a)2})$ e $\phi_m(\cdot)$ um polinômio do primeiro grau, descrito como: $\phi_m(A) = 1 - \phi_m A$, com $|\phi_m| < 1$, para cada m .

A partir do modelo PAR(1), tem-se que:

$$a_t = \left(\frac{z_t - \mu_m^{(z)}}{\sigma_m^{(z)}} \right) - \phi_m \left(\frac{z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \right).$$

$$\sigma_m^{(z)} a_t = z_t - \mu_m^{(z)} - \phi_m \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)} \right),$$

então

$$\sigma_m^{(z)2} E(a_t^2) = E \left\{ z_t - \mu_m^{(z)} - \phi_m \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)} \right) \right\}^2,$$

portanto

$$\mu_{m|m-1}^{(z)} = \mu_m^{(z)} + \phi_m \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)} \right) \quad (12)$$

e

$$\sigma_{m|m-1}^{(z)2} = \sigma_m^{(z)2} E(a_t^2) = \sigma_m^{(z)2} \sigma_m^{(a)2}. \quad (13)$$

Mostra-se, facilmente, que

$$\sigma_m^{(a)2} = 1 - \phi_m \rho_{1,m}^{(z)}. \quad (14)$$

Para o modelo PAR(1), tem-se:

$$\rho_{1,m}^{(z)} = \phi_m.$$

Portanto, em (13), tem-se:

$$\sigma_m^{(a)2} = 1 - \rho_{1,m}^{(z)2}. \quad (15)$$

Substituindo (14) em (12), tem-se:

$$\sigma_{m|m-1}^{(z)2} = \sigma_m^{(z)2} \sigma_m^{(a)2} = \sigma_m^{(z)2} \left(1 - \rho_{1,m}^{(z)2} \right). \quad (16)$$

Como $z_t \sim N(\mu_m^{(z)}, \sigma_m^{(z)2})$, a densidade de probabilidade condicional $f(z_t|z_{t-1})$ é dada por:

$$f(z_t|z_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{m|m-1}^{(z)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{m|m-1}^{(z)2}} (z_t - \mu_{m|m-1}^{(z)})^2 \right\},$$

empregando as equações (11) e (15), tem-se:

$$f(z_t|z_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m^{(z)} (1-\rho_{1,m}^{(z)2})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{m|m-1}^{(z)2}} \left[z_t - \mu_m^{(z)} - \rho_{1,m}^{(z)} \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(z_{t-1} - \mu_{m-1}^{(z)} \right) \right]^2 \right\}.$$

Com isso, usando a relação $z_t = \ln \left(\frac{y_t - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_t} \right)$, pode-se obter a densidade de probabilidade condicional $f(y_t|y_{t-1})$ da seguinte forma:

$$f(y_t|y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m^{(z)} (1-\rho_{1,m}^{(z)2})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{m|m-1}^{(z)2}} \left[\ln \left(\frac{y_t - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_t} \right) - \mu_m^{(z)} - \rho_{1,m}^{(z)} \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(\ln \left(\frac{y_{t-1} - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_{t-1}} \right) - \mu_{m-1}^{(z)} \right) \right]^2 \right\} Z(z_t, y_t),$$

onde o termo $Z(z_t, y_t)$ refere-se ao jacobiano da transformação e é dado por:

$$Z(z_t, y_t) = \left| \frac{dz_t}{dy_t} \right| = \frac{(y_m^{\max} - y_m^{\min})}{(y_t - y_m^{\min})(y_m^{\max} - y_t)}.$$

Portanto, tem-se a densidade de probabilidade condicional $f(y_t|y_{t-1})$, dada por:

$$f(y_t|y_{t-1}) = \frac{(y_m^{\max} - y_m^{\min})}{\sqrt{2\pi}\sigma_m^{(z)} (1-\rho_{1,m}^{(z)2})^{1/2} (y_t - y_m^{\min})(y_m^{\max} - y_t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{m|m-1}^{(z)2}} \left[\ln \left(\frac{y_t - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_t} \right) - \mu_m^{(z)} - \rho_{1,m}^{(z)} \frac{\sigma_m^{(z)}}{\sigma_{m-1}^{(z)}} \left(\ln \left(\frac{y_{t-1} - y_m^{\min}}{y_m^{\max} - y_{t-1}} \right) - \mu_{m-1}^{(z)} \right) \right]^2 \right\}.$$

Note que para cada valor de afluência no mês anterior (y_{t-1}), tem-se uma função distribuição de probabilidade no mês atual ($f(y_t|y_{t-1})$) diferente. Considerar estas funções densidade de probabilidade variando em função de y_{t-1} na PDE deve reproduzir adequadamente a estocasticidade das vazões.

4 Métodos e Casos de Estudos

Para cumprir o objetivo deste trabalho, emprega-se a Usina Hidroelétrica de Furnas, localizada no curso médio do rio Grande, no trecho denominado “Corredeiras das Furnas”, entre os municípios de São José da Barra e São João Batista do Glória, em Minas Gerais; e a Usina Hidroelétrica de Sobradinho, localizada no município de Sobradinho, Bahia, no curso médio do rio São Francisco. Os parâmetros necessário para construir o modelo destes reservatório foram obtidos diretamente do sítio eletrônico da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE).

Para avaliar o modelo estocástico utilizado na solução do problema POOSH, foi comparado, via simulação, o uso das tabelas de decisão obtidas com a PDE e PDD. Para modelar as vazões, foram utilizadas as séries históricas obtidas do sitio eletrônico do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) que se estendem de Janeiro de 1931 a Dezembro de 2010. Nos experimentos, consideram-se as vazões mínimas e máximas do histórico como limitantes para truncar a função densidade de probabilidade do modelo de vazões. Com isto, foi estimado os 12 modelos Log-normal trucados PAR(1) e gerou-se uma série sintética de 4000 anos. Cabe destacar que foi empregado este mesmo modelo como distribuição condicional para as vazões no cálculo da PDE. Em seguida, foi considerado a primeira metade da série como um pseudo-histórico de vazões e empregou-se sua média como o modelo de vazões para PDD. Vale ressaltar aqui que não foram constatadas diferenças significativas entre as médias obtidas dos históricos de vazões e as do pseudo-histórico. Após, utilizou-se da segunda metade da série, com 2000 anos de vazões, para comparar os modelos determinístico e estocástico, ou seja, o desempenho da PDE em relação à PDD.

Para o cálculo dos controladores via PDD e PDE, empregou-se um horizonte de tempo de 45 meses, suficientes para a convergência das tabelas da Programação Dinâmica. É interessante ressaltar que estes resultados estão de acordo com, por exemplo, (Archibald, McKinnon & Thomas 1997), em que os autores obtiveram convergência da Programação Dinâmica após 30 meses. Para obter estes controladores, utilizou-se ainda 100 pontos para discretizar a variável de estado (x_t) e 50 pontos para discretizar a variável de controle (u_t). Especificamente para a PDE, utilizou-se 50 pontos para discretizar a variável de vazão no período anterior (y_{t-1}) e, para o cálculo do valor esperado, 100 pontos para discretizar a variável de vazão no período atual (y_t). Em nosso primeiro caso de estudos, foi considerado que a demanda de energia a ser atendida pela usina de Furnas é de $D_t = 2100$ MW-mês, para $t = 0, \dots, T - 1$, já para o sistema hidrotérmico de Sobradinho empregou-se $D_t = 1650$ MW-mês. É importante mencionar ainda que foi considerado como nulo o limite inferior para a turbinagem, ou seja, $u_{min} = 0$. Esta modificação do problema real se faz necessária para que a solução da PDE seja ótima para todo o espaço amostral das vazões.

5 Resultados e Discussões

Os resultados da simulação obtidos com as duas técnicas são apresentados nas Figuras 1 a 3. Na Figura 1 são apresentadas as trajetórias do volume médio dos dois reservatórios. Nota-se que para o reservatório de Furnas, a PDE apresenta uma operação com níveis de reservatório mais baixo do que a PDD. Como consequência a PDD apresenta mais vertimento do que a PDE, como pode ser observado pela Figura 2. Uma situação parcialmente oposta pode ser observada para o Reservatório de Sobradinho. Neste caso, a PDE apresenta uma trajetória média do volume acima da PDD na maior parte do tempo. Porém, esta situação não leva esta técnica a verter mais que a PDD, como pode-se notar na Figura 2, o vertimento médio entre ambas é semelhante.

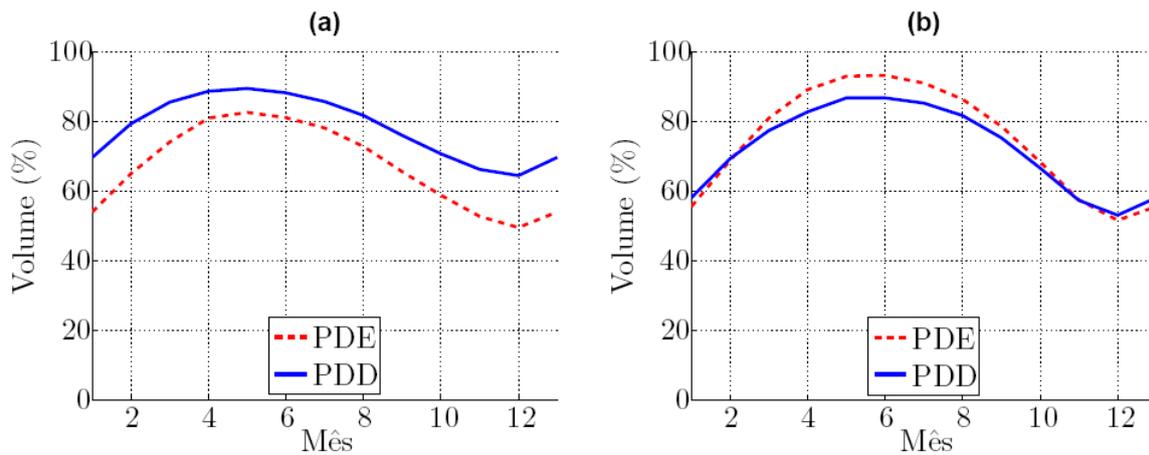


Figura 1: Trajetórias médias de volume para (a) Furnas e (b) Sobradinho, obtidas com as técnicas PDD e PDE.

Esta figura também ilustra as trajetórias médias de turbinagem obtidas com as duas técnicas. Destaca-se que, apesar da operação feita com o uso da PDD resultar em mais vertimento, isto não afeta de forma significativa o rendimento das usinas, como pode ser observado pelas trajetórias de geração hidrelétrica (e complementação térmica) da Figura 3.

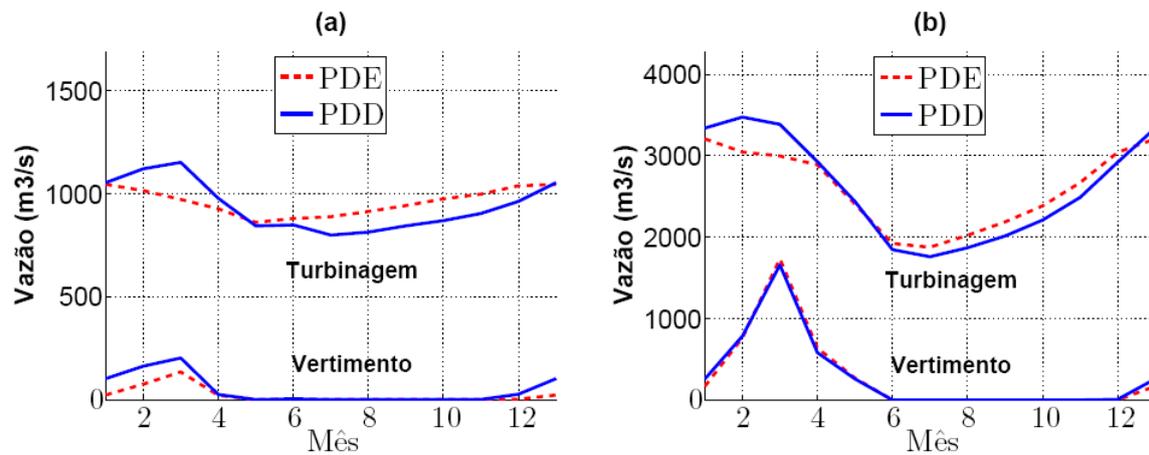


Figura 2: Trajetórias médias das turbinagens (curvas acima) e vertimentos (curvas abaixo) para (a) Furnas e (b) Sobradinho, obtidas com as técnicas PDD e PDE.

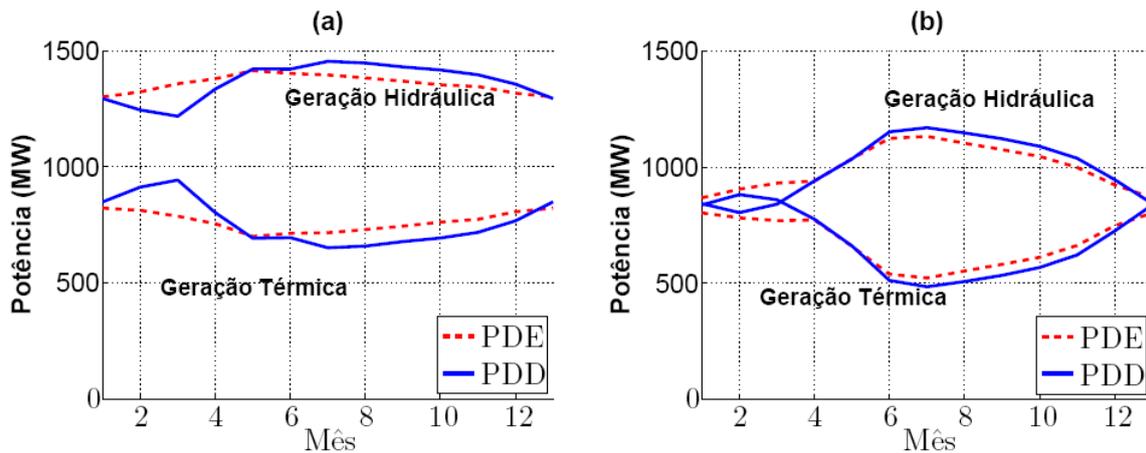


Figura 3: Geração hidroelétrica média (curvas acima) e complementação térmica média (curvas abaixo) para as usinas de (a) Furnas e (b) Sobradinho, obtidas com as técnicas PDD e PDE.

Na Tabela 1 é apresentado os valores totais de geração e custo de operação para os dois reservatórios considerados. Analisando estes resultados, constata-se que a PDE apresenta uma vantagem de aproximadamente 1,5% em relação a PDD no tocante aos custos, e de 0,7% e 0,4%, respectivamente para Furnas e Sobradinho, em termos de geração hidroelétrica.

Tabela 1: Resultados para a operação de Furnas e Sobradinho (GH = Geração Hidráulica Média; GT = Geração Térmica Média).

Furnas	PDD	PDE	PDD/PDE
GH (MW-mês)	754,2752	759,5221	0,9930
GT (MW-mês)	1345,6373	1340,3904	1,0039
Custo (Milhões)	1,8802	1,8539	1,0142
Sobradinho	PDD	PDE	PDD/PDE
GH (MW-mês)	663,4995	666,3106	0,9957
GT (MW-mês)	986,4318	983,6207	1,0029
Custo (Milhões)	1,0369	1,0209	1,0157

Uma análise semelhante foi feita para os períodos de maior escassez hídrica, que é denominado períodos críticos, identificados na série de vazões empregada nas simulações. Para o reservatório de Furnas foram identificados 8 períodos críticos que tiveram em média uma janela de aproximadamente 39 meses, para Sobradinho foram obtidos 12 períodos críticos com extensão de aproximadamente 22 meses. Nestes períodos, em média, a PDE mantém uma margem significativa de ganho em relação à PDD, como pode-se observar na Tabela 2, com destaque para o custo no reservatório de Sobradinho em que a PDD obteve um valor de 2.6% maior que a PDE.

A análise dos resultados apresentados nesta seção revelam que a vantagem da PDE em frente a PDD é em torno de 1,5% em termos de custo e que uma margem positiva de ganho se mantém nos períodos críticos. Devido ao grande porte do sistema de energia elétrica brasileiro, esta vantagem pode representar um ganho significativo na operação do sistema.

Tabela 2: Resultados para o período crítico de Furnas e Sobradinho (GH = Geração Hidráulica Média; GT = Geração Térmica Média).

Furnas	PDD	PDE	PDD/PDE
GH (MW-mês)	457,6976	464,4562	0,9855
GT (MW-mês)	1644,0116	1638,9058	1,0031
Custo (Milhões)	2,7034	2,6867	1,0062
Sobradinho	PDD	PDE	PDD/PDE
GH (MW-mês)	363,1436	380,0843	0,9554
GT (MW-mês)	1291,8626	1274,8805	1,0133
Custo (Milhões)	1,6694	1,6258	1,0268

6 Conclusões

Neste trabalho foi comparado o desempenho da solução do POOSH obtida via PDD com a solução obtida pela PDE, que emprega um modelo Markoviano periódico, com distribuição condicional log-normal truncada para representar as vazões. Com isto, foram apresentados resultados no sentido de avaliar o ganho obtido com a utilização de um modelo estocástico na formulação do problema de POOSH. A partir dos resultados obtidos foi observado que a PDE pode apresentar uma vantagem significativa em relação à PDD, com uma diferença de custo médio em torno de 1,5% nos casos de estudo avaliados (hidroelétricas de Furnas e Sobradinho). Considerando ainda a vantagem apresentada pela PDE também nos períodos críticos e o grande porte do sistema de energia elétrica brasileiro, conclui-se que o ganho obtido com a utilização de um modelo estocástico no POOSH pode ser significativo na operação do sistema.

7 Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES (Processo 306466/2010-4) e FAPESP (Processos 2010/12360-3 e 2011/14585-5) pelo apoio financeiro concedido.

Referências

Archibald, T., McKinnon, K. & Thomas, L. (1997). An aggregate stochastic dynamic programming model of multireservoir systems, *Water Resources Research* **33**(2): 333–340.

Barros, M. T. L., Tsai, F. T.-C., Yang, S., Lopes, J. E. G. & Yeh, W. W.-G. (2003). Optimization of large-scale hydropower system operations, *Journal of Water Resources Planning and Management* **129**(3): 178–188.

Bertsekas, D. P. (2000). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Vol. 1, 2 edn.

Nandalal, K. D. W. & Bogardi, J. J. (2007). *Dynamic programming based operation of reservoirs: applicability and limits*, Cambridge University Press.

Ouarda, T. & Labadie, J. (2001). Chance-constrained optimal control for multireservoir system optimization and risk analysis, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **15**(3): 185–204.

Pereira, M. (1985). Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems - An Overview, *IFAC - Symposium on Planning and Operation of Electric Energy System* pp. 1–9.

Soares, S. & Carneiro, A. (1991). Optimal Operation of Reservoirs for Electric Generation, *Power Delivery, IEEE Transactions on* **6**(3): 1101–1107.

Wurbs, R. (1996). *Modeling and Analysis of Reservoir System Operations*, Prentice-Hall.

Yakowitz, S. (1982). Dynamic-Programming Applications in Water-Resources, *Water Resources Research* **18**(4): 673–696.

Yeh, W. W. G. (1985). Reservoir Management and Operations Models: A State-of-the-Art Review, *Water Resources Research* **21**(12): 1797–1818.