

**UM MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES BARREIRA
LOGARÍTMICA MODIFICADA COM ESTRATÉGIAS DE AJUSTE CÚBICO E DE
CONVERGÊNCIA GLOBAL PARA PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR E NÃO-
CONVEXA .**

Ricardo Bento Nogueira Pinheiro

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia de Bauru –
FEB/UNESP.

CEP: 17033-360, Bauru, SP.

ribenopi@hotmail.com

Antonio Roberto Balbo

Depto. de Matemática, Faculdade de Ciências – FC/UNESP.

CEP: 17033-360, Bauru, SP.

arbalbo@fc.unesp.br

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada com estratégias de ajuste cúbico e convergência global (MPIBLMCG-EX) para programação não-linear e não-convexa. O trabalho visa o estudo de uma técnica de ajuste cúbico para funções barreira logarítmica modificada que preserve a continuidade e as derivadas de primeira e de segunda ordem do logaritmo nas proximidades da fronteira da região de viabilidade definida pelas restrições de desigualdades; e de uma técnica de convergência global que gere somente direções de descida mesmo que o problema de otimização seja não-linear e não-convexo. Essas técnicas são combinadas num método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores (MPIBLM). O método resultante é aplicado num problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo cuja função objetivo e o conjunto de restrições são funções não-lineares e não-convexas. Neste trabalho apresentamos os resultados da aplicação do método em destaque sobre o sistema elétrico IEEE-162.

PALAVRAS-CHAVE. Programação Não-linear. Método de Ponto Interior Primal-Dual. Convergência Global.

ABSTRACT

In this paper we present a predictor-corrector primal-dual interior point logarithmic barrier modified method, with global convergence and cubic fitting strategies for non-linear and non-convex programming (MPIBLMCG-EX). The work aims at the study of a cubic fitting technique to modified logarithmic barrier functions that preserves the continuity and the first and second order derivatives of the logarithm near of the feasibility region boundary defined by inequality constraints; and a global convergence technique that generates only descent directions even if the optimization problem is nonlinear and non-convex. These techniques are combined in a predictor-corrector primal-dual interior point method (MPIBLM). This method is applied to a Reactive Optimal Power Flow problem whose objective function and constraint set are non-linear and non-convex functions. In this paper we present the application results of the highlighted method over the IEEE-162 electrical system.

KEYWORDS. Nonlinear Programming. Primal-Dual Interior and Exterior Point Method. Global Convergence.

1. O método previsor-corretor

Para a definição do método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada (MPIBLM), consideramos o seguinte modelo geral de otimização não-linear com restrições de igualdade, de desigualdades canalizadas e de variáveis canalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a:} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad ; \\ \mathbf{u}_1 \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{l}_1 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{l}_2 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

em que: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo, $\mathbf{g}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ são funções de classe C_2 . Considera-se, também, a condição de qualificação de restrições proposta por (Mangasarian & Fromovitz, 1976) para o desenvolvimento do método. O problema (1.1) é transformado em problema de otimização não-linear irrestrito e equivalente, de acordo com (Sousa, 2006) a qual utiliza a função barreira modificada apresentada por (Polyak, 1992), a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } L(\omega) = f(\mathbf{x}) - \mu \sum_{i=1}^r (\delta_1)_i \ln(z_1^\diamond)_i - \mu \sum_{i=1}^r (\delta_2)_i \ln(z_2^\diamond)_i - \mu \sum_{j=1}^n (\delta_3)_j \ln(z_3^\diamond)_j - \mu \sum_{j=1}^n (\delta_4)_j \ln(z_4^\diamond)_j + \\ + \sum_{i=1}^m (\lambda_0)_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^r [(\lambda_1)_i (-h_i(\mathbf{x}) + (u_1)_i + (z_1)_i) + (\lambda_2)_i (h_i(\mathbf{x}) - (u_2)_i + (z_2)_i)] + \\ + \sum_{j=1}^n [(\lambda_3)_j (-x_j + (l_1)_j + (z_3)_j) + (\lambda_4)_j (x_j - (l_2)_j + (z_4)_j)] \end{array} \right. ; \quad (1.2)$$

onde: $\mu \in \mathbb{R}_*^+$ é o parâmetro de barreira; $\delta_1 = (\delta_1, \dots, \delta_{1_r})^T$, $\delta_2 = (\delta_2, \dots, \delta_{2_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ e $\delta_3 = (\delta_3, \dots, \delta_{3_n})^T$, $\delta_4 = (\delta_4, \dots, \delta_{4_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ são vetores estimadores dos multiplicadores de Lagrange; $\lambda_0 = (\lambda_0, \dots, \lambda_{0_m})^T \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de multiplicador de Lagrange referente às restrições de igualdade; $\lambda_1 = (\lambda_1, \dots, \lambda_{1_r})^T$, $\lambda_2 = (\lambda_2, \dots, \lambda_{2_r})^T \in \mathbb{R}_+^r$ são os vetores de multiplicadores de Lagrange referente às restrições de desigualdade; $\lambda_3 = (\lambda_3, \dots, \lambda_{3_n})^T$, $\lambda_4 = (\lambda_4, \dots, \lambda_{4_n})^T \in \mathbb{R}_+^n$ são os vetores de multiplicadores de Lagrange referente às variáveis canalizadas; $\mathbf{z}_1 = (z_1, \dots, z_{1_r})^T$, $\mathbf{z}_2 = (z_2, \dots, z_{2_r})^T \in \mathbb{R}^r$ e $\mathbf{z}_3 = (z_3, \dots, z_{3_n})^T$, $\mathbf{z}_4 = (z_4, \dots, z_{4_n})^T \in \mathbb{R}^n$ são variáveis de folga; $(z_1^\diamond)_i = \left(1 + \frac{z_1}{\mu}\right)_i$, $(z_2^\diamond)_i = \left(1 + \frac{z_2}{\mu}\right)_i$, $(z_3^\diamond)_j = \left(1 + \frac{z_3}{\mu}\right)_j$ e $(z_4^\diamond)_j = \left(1 + \frac{z_4}{\mu}\right)_j$ são as variáveis primais definidas pela relaxação das restrições de desigualdade de (1.1) em relação às variáveis de folga $\mathbf{z}_1 > \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_2 > \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_3 > \mathbf{0}$ e $\mathbf{z}_4 > \mathbf{0}$ tais que: $\mathbf{z}_1 > -\mu$, $\mathbf{z}_2 > -\mu$, $\mathbf{z}_3 > -\mu$ e $\mathbf{z}_4 > -\mu$; $\omega = (\mathbf{x}, \lambda_0, \lambda_i, \mathbf{z}_i)^T \in \mathbb{R}^{m+5n+4r}$, $i=1, \dots, 4$. é o vetor de variáveis da função lagrangiana

aumentada interior $L(\omega)$. As condições de KKT são recuperadas ao aplicarmos a condição necessária de otimalidade $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$. Essas condições são apresentadas a seguir:

$$\nabla L(\omega) = \begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L = \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \lambda_0 + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T (\lambda_2 - \lambda_1) - \lambda_3 + \lambda_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_0} L = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_1} L = -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1 + \mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_2} L = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_2 + \mathbf{z}_2 = \mathbf{0}; i = 1, \dots, 4 \\ \nabla_{\lambda_3} L = -\mathbf{x} + \mathbf{l}_1 + \mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \\ \nabla_{\lambda_4} L = \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 + \mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \\ \nabla_{z_i} L = \bar{Z}_i \lambda_i - \mu \delta_i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.3)$$

onde: $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ são, respectivamente, as matrizes jacobianas dos funcionais $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ e $\bar{Z}_i^{-1} = \text{diag}((\mu + z_i)^{-1}), i = 1, \dots, 4$. O sistema não-linear $\nabla L(\omega) = \mathbf{0}$ linearizado por um aproximante de Taylor de primeira ordem sobre o ponto $\omega^k + \mathbf{d}_\omega^k$, resulta no sistema linear expresso a seguir:

$$A_k \mathbf{d}_\omega^k = \mathbf{b}^k \quad (1.4)$$

onde:

$$A_k = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T & -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T & -I_n & I_n \\ \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{1_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{2_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{2_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{3_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{3_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{4_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Z}_{4_k} \end{pmatrix}; \quad (1.5)$$

em que: $K = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) + \sum_{t=1}^m [(\lambda_0^k)_t \nabla^2 g_t(\mathbf{x}^k)] + \sum_{i=1}^r [(\lambda_2^k - \lambda_1^k)_i \nabla^2 h_i(\mathbf{x}^k)]$; I_n é a matriz identidade de ordem n ; I_r é a matriz identidade de ordem r e $\Lambda_{i_k} = \text{diag}(\lambda_i^k)$; $\mathbf{d}_\omega^k = (\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k, \mathbf{d}_{\lambda_0}^k, \mathbf{d}_{\lambda_1}^k, \mathbf{d}_{\lambda_2}^k, \mathbf{d}_{\lambda_3}^k, \mathbf{d}_{\lambda_4}^k)^T, i = 1, \dots, 4$ e \mathbf{b}^k é o vetor residual definido por:

$$\mathbf{b}^k = \begin{pmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) - \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k - \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T (\lambda_2^k - \lambda_1^k) + \lambda_3^k - \lambda_4^k \\ \mathbf{t}_0^k : & -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{t}_1^k : & \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_1^k - \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{t}_2^k : & -\mathbf{h}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{z}_2^k + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{t}_3^k : & \mathbf{x}^k - \mathbf{z}_3^k - \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{t}_4^k : & -\mathbf{x}^k - \mathbf{z}_4^k + \mathbf{l}_2 \\ & -\bar{Z}_{i_k}^{-1} \lambda_i^k + \mu \delta_{i_k}^k - D_{z_i^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_i}^k \end{pmatrix}, i=1, \dots, 4; \quad (1.6)$$

em que: $D_{z_i^k}^k = \text{diag}(d_{z_i}^k)$, $i=1, \dots, 4$. Para a definição do procedimento predictor, desprezamos os resíduos não-lineares $D_{z_i^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_i}^k$, $i=1, \dots, 4$, isto é, a priori definimos esses resíduos como nulos, pois desconhecemos essas direções. Essa estratégia é uma variante do método predictor-corrector de (Wu, Debs, & Marsten, 1994), diferenciando-se do procedimento definido por esses autores, pois consideramos o parâmetro de barreira, definido nas condições de complementaridade apresentadas em (1.3), no procedimento predictor, para o cálculo das direções de busca. Assim, com procedimentos algébricos, definimos, a seguir, o quadro de direções primais e duais:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\lambda_0}^k &= -\left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T\right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \theta_k^{-1} (\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu \phi^k) + \mathbf{t}_0^k\right) - \lambda_0^k; \\ \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k &= -\theta_k^{-1} \left(\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{c}^k + \mu \phi^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \lambda_0^k + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^T \mathbf{d}_{\lambda_0}^k\right); \\ \mathbf{d}_{z_1}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_1^k; \\ \mathbf{d}_{z_2}^k &= -\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_2^k; \\ \mathbf{d}_{z_3}^k &= \mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_3^k; \\ \mathbf{d}_{z_4}^k &= -\mathbf{d}_{\mathbf{x}}^k + \mathbf{t}_4^k; \\ \mathbf{d}_{\lambda_i}^k &= -\bar{Z}_{i_k}^{-1} \Lambda_{i_k} \mathbf{d}_{z_i}^k + \mu \bar{Z}_{i_k}^{-1} \delta_{i_k}^k - \lambda_i^k, i=1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde: $\theta_k = \mathbf{K} + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k}\right) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k}$;

$\mathbf{c}^k = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k\right) + \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k$ e

$\phi^k = \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(-\bar{Z}_{1_k}^{-1} \delta_{1_k}^k + \bar{Z}_{2_k}^{-1} \delta_{2_k}^k\right) - \bar{Z}_{3_k}^{-1} \delta_{3_k}^k + \bar{Z}_{4_k}^{-1} \delta_{4_k}^k$. Com as direções do procedimento predictor calculadas, inicia-se o procedimento corrector considerando os resíduos não-lineares $D_{z_i^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_i}^k$, $i=1, \dots, 4$, pois agora conhecemos essas direções. O quadro de direções do procedimento corrector é análogo ao do procedimento predictor. A diferença está na complementação de expressões algébricas sobre o vetor \mathbf{c}^k , em que, para distingui-lo do procedimento predictor, o definiremos por $\tilde{\mathbf{c}}^k$ apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}^k &= \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^T \left(\bar{Z}_{1_k}^{-1} \Lambda_{1_k} \mathbf{t}_1^k + \bar{Z}_{1_k}^{-1} D_{z_1^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_1}^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} \Lambda_{2_k} \mathbf{t}_2^k - \bar{Z}_{2_k}^{-1} D_{z_2^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_2}^k\right) + \\ &+ \bar{Z}_{3_k}^{-1} \Lambda_{3_k} \mathbf{t}_3^k + \bar{Z}_{3_k}^{-1} D_{z_3^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_3}^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} \Lambda_{4_k} \mathbf{t}_4^k - \bar{Z}_{4_k}^{-1} D_{z_4^k}^k \mathbf{d}_{\lambda_4}^k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O cálculo do tamanho do passo primal $\bar{\alpha}_p$ e do tamanho do passo dual $\bar{\alpha}_d$ definidos para a direção $\tilde{\mathbf{d}}_{\omega}^k = (\tilde{\mathbf{d}}_x^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_i}^k, \tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k)^T, i=1, \dots, 4$, são dados pela variante da regra apresentada em (Granville, 1994). Esta é apresentada a seguir:

$$\bar{\alpha}_p = 1,01 \times \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{(z_1)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_1)_i < 0} -\frac{(z_1)_i}{(\tilde{d}z_1)_i}, \quad \min_{(z_2)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_2)_i < 0} -\frac{(z_2)_i}{(\tilde{d}z_2)_i}, \\ \min_{(z_3)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_3)_j < 0} -\frac{(z_3)_j}{(\tilde{d}z_3)_j}, \quad \min_{(z_4)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}z_4)_j < 0} -\frac{(z_4)_j}{(\tilde{d}z_4)_j}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i=1, \dots, r; \\ j=1, \dots, n; \end{array} \quad (1.9)$$

$$\bar{\alpha}_d = 1,01 \times \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{(\lambda_1)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_1)_i < 0} -\frac{(\lambda_1)_i}{(\tilde{d}\lambda_1)_i}, \quad \min_{(\lambda_2)_i > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_2)_i < 0} -\frac{(\lambda_2)_i}{(\tilde{d}\lambda_2)_i}, \\ \min_{(\lambda_3)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_3)_j < 0} -\frac{(\lambda_3)_j}{(\tilde{d}\lambda_3)_j}, \quad \min_{(\lambda_4)_j > 0 \text{ e } (\tilde{d}\lambda_4)_j < 0} -\frac{(\lambda_4)_j}{(\tilde{d}\lambda_4)_j}, 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i=1, \dots, r; \\ j=1, \dots, n; \end{array} \quad (1.10)$$

então, atualizamos o vetor ω^{k+1} da seguinte maneira:

$$\omega^{k+1} = (\mathbf{x}^{k+1}, \lambda_0^{k+1}, \lambda_i^{k+1}, \mathbf{z}_i^{k+1})^T = (\mathbf{x}^k, \lambda_0^k, \lambda_i^k, \mathbf{z}_i^k)^T + (\bar{\alpha}_p \tilde{\mathbf{d}}_x^k, \bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_0}^k, \bar{\alpha}_d \tilde{\mathbf{d}}_{\lambda_i}^k, \bar{\alpha}_p \tilde{\mathbf{d}}_{z_i}^k)^T. \quad (1.11)$$

Dado um escalar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, verificamos se o critério de parada do MPIBLM é satisfeito se a seguinte condição está satisfeita: $\|\nabla L(\omega^{k+1})\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Caso o critério não seja satisfeito, atualizamos o parâmetro de barreira μ^k por uma heurística definida por:

$$\mu^{k+1} = \alpha_{\mu} \mu^k; \quad (1.12)$$

em que $\alpha_{\mu} \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ é definido previamente; atualizamos os estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^k pela seguinte regra variante da técnica de (Polyak, 1992):

$$\delta_i^{k+1} = \lambda_i^{k+1}, i=1, \dots, 4; \quad (1.13)$$

Em que $\lambda_i^{k+1}, i=1, \dots, 4$, está definido em (1.11) e reiniciamos o procedimento predictor-corrector.

2. A estratégia de convergência global

Se $\theta_k = \nabla_{\mathbf{xx}} L$ é definida positiva, então a Decomposição de Cholesky (DC) é possível de ser realizada. Caso a DC não seja possível uma estratégia, que pode ser encontrada em (Benson, Shanno, & Vanderbei, 2000) e em (Bazaraa, Sherali, & Shetty, 2006), é aplicada ao método. Essa estratégia consiste em uma perturbação sobre a matriz θ_k a qual é definida da seguinte maneira:

$$\hat{\theta}_k = \theta_k + \beta I_n; \quad (1.14)$$

onde $\beta > 0$ é denominado por parâmetro de *damping* ou parâmetro de amortecimento do método de Levenberg-Marquardt, o qual foi desenvolvido para a resolução de problemas de quadrados mínimos. Assim, enquanto a DC não for satisfeita, a perturbação (1.14) é aplicada, isto é, essa estratégia transforma o MPIBLM de tal forma a determinar e garantir uma sequência de direções

de descida para a determinação de novos pontos, convertendo-o em um método primal-dual com estratégia de convergência global (CG), isto é, o MPIBLM transforma-se em MPIBLMCG.

O parâmetro β influencia tanto na direção quanto no tamanho do passo, assim, a variante do procedimento de Levenberg-Marquardt aplicado ao MPIBLM é interessante, pois não necessitamos de uma busca linear para descobrir o tamanho do passo a ser dado em cada direção de busca em uma iteração qualquer e há o tratamento do mau condicionamento da matriz θ_k em todo o procedimento, principalmente quando ω^k tende a solução ótima do problema.

Seja lm o número de iterações necessárias para tornar a matriz θ_k em definida positiva, então temos o processo iterativo definido a seguir:

$$\beta^{lm+1} = \beta^{lm} \left(\frac{\mu_1 + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2 \mu^2 + \mu_1^2}}{2\mu_1} \right); \quad (1.15)$$

em que: $\mu_1 = \mu^{k-1}$ e β^k é definido por $\beta^k = \beta^{lm+1}$. Para uma iteração que passa do procedimento corretor para o procedimento previsor, ou seja, para uma iteração $k+1$, podemos atualizar o valor de β de acordo com as definições a seguir, que propõe uma modificação na definição do parâmetro de amortecimento em relação àquela encontrada em (Bazaraa, Sherali, & Shetty, 2006): i) Se $L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) < 0,25$, então β é atualizado pela heurística $\beta^{k+1} = \frac{\beta^k}{3}$;

ii) Se $L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) > 0,25$, então β é atualizado pela heurística (1.15);

iii) Se $0,25 \leq L(\omega^k) - L(\omega^{k+1}) \leq 0,75$, então β não será alterado.

3. A estratégia de ajuste cúbico

Na definição do algoritmo proposto, a função logarítmica modificada existe e auxilia o MPIBLMCG em seu procedimento com pontos viáveis que pertencem à região de viabilidade relaxada (ampliada ou aumentada). Porém, a inviabilidade pode ocorrer em pontos que estão próximos ou que não pertençam à região relaxada, conseqüente, implicando na não-existência da função barreira logarítmica modificada nesse ponto. Para suprir essa dificuldade, um ajuste cúbico, que preserva a continuidade e as derivadas de primeira e de segunda ordem do logaritmo a partir de um ponto viável, é aplicada ao MPIBLMCG. Esse ajuste é uma variante do ajuste quadrático para funções barreiras modificadas que pode ser encontrado em (Pereira, 2007) e, com mais detalhes, em (Matioli, 2001). Por simplicidade, definiremos por z uma componente qualquer dos vetores $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ ou \mathbf{z}_4 .

Seja $\tau \in (0,1) \subset \mathbb{R}$: o parâmetro de proximidade da variável de folga z à fronteira interior relaxada. Se $z \geq -\tau\mu$, então a função barreira modificada $\Psi(z)$ é definida por:

$\Psi(z) = \ln\left(1 + \frac{z}{\mu}\right)$. Caso contrário, se $z < -\tau\mu$, um ajuste cúbico é definido pelo polinômio a

seguir: $\Psi(z) = \frac{q_3}{6} z^3 + \frac{q_2}{2} z^2 + q_1 z + q_0$; em que: $q_0 = \ln(1-\tau) + \frac{11\tau^3 - 15\tau^2 + 6\tau}{6(1-\tau)^3}$,

$q_1 = \frac{(3\tau^2 - 3\tau + 1)}{\mu(1-\tau)^3}$, $q_2 = \frac{3\tau - 1}{\mu^2(1-\tau)^3}$ e $q_3 = \frac{2}{\mu^3(1-\tau)^3}$. Quando há a necessidade de ajuste, a

matriz \bar{Z}^{-1} é definida por $\Psi'(z) = \text{diag}\left(\frac{q_3}{2}z^2 + q_2z + q_1\right)$. Neste trabalho, o parâmetro de barreira μ é atualizado, se $\|\nabla L(\omega^{k+1})\|_{\infty} > \varepsilon$, atribuindo-se $\alpha_{\mu} = 0,382$, ou seja:

$$\mu^{k+1} = 0,382\mu^k; \quad (1.16)$$

e faça-se o teste: se para todo z obtermos que $z^{k+1} \geq -\tau\mu^{k+1}$, a heurística (1.16) permanece. Caso contrário, se para algum z obtermos $z^{k+1} < -\mu^{k+1}$, então μ^{k+1} recebe o seguinte incremento ou penalização:

$$\mu^{k+1} = -1,382 \times \min(\mathbf{z}_i), i = 1, \dots, 4. \quad (1.17)$$

O sinal "-" na expressão (1.17) é devido ao sinal de z ser negativo. Com a estratégia de ajuste cúbico (EX) definido e aplicado sobre o método MPIBLMCG, temos o método MPIBLMCG-EX.

4. O MPIBLMCG-EX aplicado ao problema de fluxo de potência ótimo reativo

Aplicamos, através de uma implementação construída em MATLAB 6.1, o MPIBLMCG-EX ao problema de fluxo de potência ótimo reativo (FPO-Reativo). O FPO-Reativo é um fenômeno observado e estudado no âmbito da engenharia elétrica em uma subárea denominada por sistemas de potências. O Modelo de um FPO-Reativo é definido, segundo (Monticelli, 1983), a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{V}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{i=1}^{NL} (g_{km})_i (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \\ \text{s.a:} \\ \Delta P_{t_1} = P_k^{esp} - V_k^2 G_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m) + B_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m)) = 0 \\ \Delta Q_{t_2} = Q_k^{esp} + V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) = 0 \\ u_{1cr} \leq -V_k^2 B_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega} V_m (G_{km} \sin(\gamma_k - \gamma_m) - B_{km} \cos(\gamma_k - \gamma_m)) \leq u_{2cr} \\ l_{1bar} \leq V_{bar} \leq l_{2bar} \end{array} \right. ; \quad (1.18)$$

em que: $f(\mathbf{x})$: é a função objetivo, que representa as perdas de transmissão de potência ativa na transmissão na rede; NL : é o número de linhas de transmissão que compõe o sistema; $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{NB}$: é o vetor de tensões, tal que, NB é o número de barras do sistema; $\boldsymbol{\gamma} \in NB$: Vetor de ângulos; V_k : é a tensão na barra k a conectar; γ_k : é o ângulo da tensão da barra k a conectar; V_m : é a tensão na barra m a ser conectada; γ_m : é o ângulo da tensão da barra m a ser conectada; $(g_{km})_i$: é a condutância da linha i a qual conecta as barras k e m ; ΔP_{t_1} : é a equação de balanço de potência ativa. O sistema contém $(NB - 1)$ equações; P_k^{esp} : é a diferença entre a Potência ativa gerada e a Potência ativa consumida na barra k ; ΔQ_{t_2} : é a equação de balanço de potência reativa. O sistema contém NBC equações, onde NBC é o número de barras de carga; Q_k^{esp} : é a diferença entre a Potência reativa gerada e a Potência reativa consumida na barra k ;

cr : é o número de barras de controle de reativos ($NBCR$); bar : é o número de barras do sistema; Ω : é o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k ; $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$, $j^2 = -1$: é a matriz de Admitância das linhas as quais k conecta com $m \in \Omega$.

Os $taps$ dos transformadores são todos fixos e, na existência de tap em uma linha de transmissão, utilizamos o inverso numérico desse valor para a construção da matriz Y_{km} ; utilizamos a potência de base 100 megawatts (MW), isto é, 1 unidade (pu) equivale a $100MW$.

5. Resultados para o sistema IEEE-162.

O sistema IEEE-162 barras, cujo banco de dados foi encontrado em (University Washington Electrical Engineering), contém 150 são barras de carga, 12 barras geradoras com controle de reativo e 284 linhas de transmissão. O sistema contém 311 restrições de igualdade, dentre as quais, 161 são do tipo ΔP e 150 são do tipo ΔQ , e 12 restrições de desigualdades canalizadas; em que as canalizações das tensões e ângulos são definidas respectivamente por $0,95 \leq V \leq 1,1$ e $-99 \leq \gamma \leq 99$.

Iniciamos o método com V^0 e γ^0 definidos pelo banco de dados; cada componente dos vetores dos estimadores dos multiplicadores de Lagrange δ_i^0 $i=1, \dots, 4$, é definida por $0,1 pu$, $\mu_0 = 5$, $\beta_0 = 0,1$, $\tau = 0,45$. Utilizamos (1.3) para obtermos z_i^0 e λ_j^0 , $i=1, \dots, 4$, e $j=0, \dots, 4$. A dimensão do vetor ω é 1979, isto é, esse contém 1979 variáveis. A precisão utilizada é $\varepsilon = 10^{-5} pu$ para a verificação das condições de KKT é o critério de parada do método. A matriz $\hat{\theta}_k$ contém 104976 elementos, dentre os quais 3080 são não-nulos, isto é, a matriz contém 2,93% de elementos não-nulos.

O método convergiu em 37 iterações. As perdas de potência ativa na transmissão são avaliadas em $f(\mathbf{x}^*) = 146,1992165736827 MW$, a imagem pela função lagrangiana está avaliada em $L(\omega^*) = 146,1992165737511 MW$, as avaliações nas restrições de igualdades são avaliadas em: $\max(\Delta P) = 2,241336 \times 10^{-10} pu$ e $\max(\Delta Q) = 2,096101 \times 10^{-12} pu$; a avaliação do gap dual (condições de complementaridade) é avaliada em $\max(gap) = 6,789761 \times 10^{-13} pu$; a precisão da solução ótima é avaliada em $\|\nabla L(\omega^*)\|_{\infty} = 7,527881 \times 10^{-6} pu$; Os parâmetros μ e β são avaliados em $6,196731 \times 10^{-9}$ e $0,144280$, respectivamente. A tabela 1 apresenta os controles de reativos ótimos. Destacamos a barra geradora 114, pois essa está operando em seu limitante superior. Por ser restrição ativa em \mathbf{x}^* , seu respectivo multiplicador de Lagrange é não-nulo e é avaliado em $0,001008 \$/pu$.

Tabela 1: Os controles de reativos ótimos para o sistema IEEE-162 obtidos pelo método MPIBLMCG-EX.

AVALIAÇÃO DOS CONTROLES DE REATIVOS (em pu)

Barra k	u_{1_k}	$h(x^*)$	u_{2_k}
6	-2,000000	1,20040283644821	4,000000
73	-0,720000	1,30771730858596	2,670000
76	-1,700000	-0,61005947586423	6,050000
99	-0,606000	0,49403862531498	0,756000
101	-0,244000	0,05055332746489	0,386000
108	99,000000	-0,47059736635888	99,000000
114	-0,250000	0,32999999999951	0,330000
118	-0,440000	0,42687618386109	1,000000
121	-1,200000	1,76643756403453	2,500000
125	-10,990000	-0,19320201532760	99,000000
130	-1,440000	0,83978749078570	2,880000
131	-2,650000	0,82572545941872	3,200000

Notamos na figura 1 que as tensões V_{12} , V_{18} e V_{62} estão operando em seus limites máximos. Por serem restrições ativas em V^* , seus respectivos multiplicadores de Lagrange são não-nulos. Esses estão avaliados, em $\$/pu$, respectivamente por: 0,001099; 0,009987 e 0,009205.

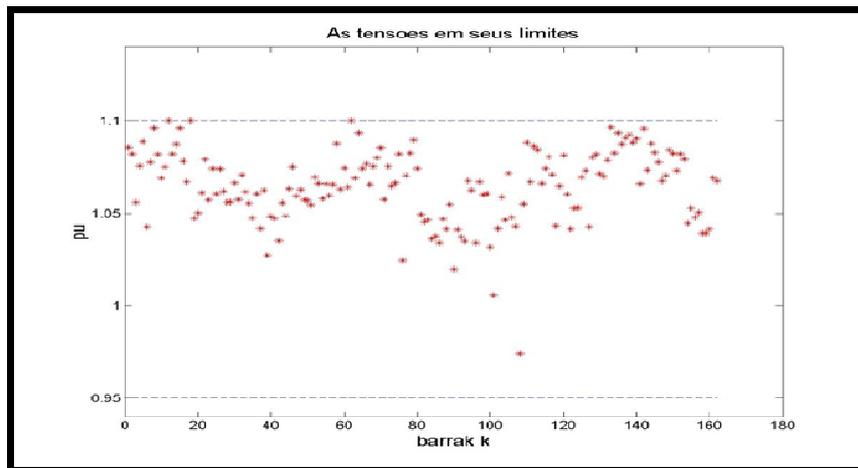


Figura 1: As tensões ótimas determinadas pelo MPIBLMCG-EX em seus limites de definição para o sistema IEEE-162.

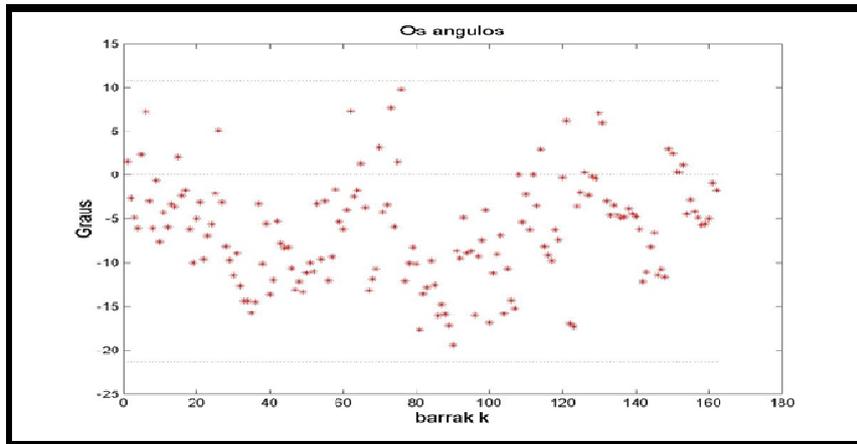


Figura 2: Os ângulos ótimos determinados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-162.

A figura 3 apresenta a sequência de multiplicadores de Lagrange λ_0^k gerados pelo método:

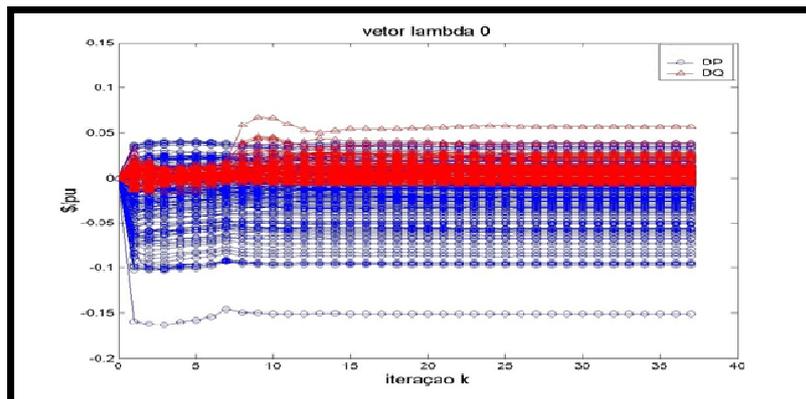


Figura 3: Sequências de pontos λ_0^k gerados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-162.

A figura 4 apresenta a sequência de multiplicadores de Lagrange $\lambda_i^k, i = 1, \dots, 4$, geradas pelo método.

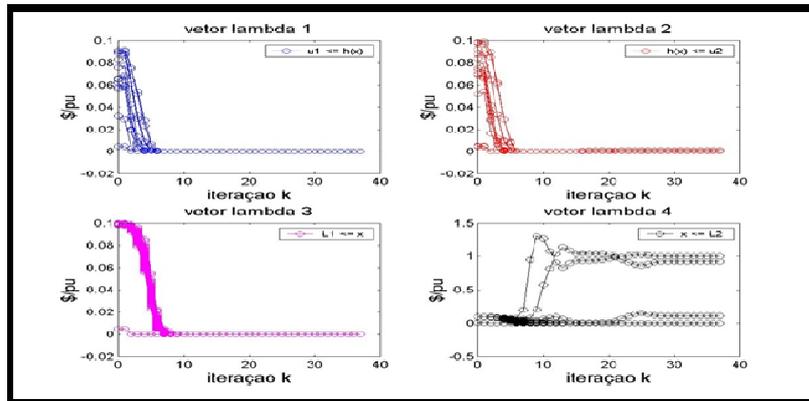


Figura 4: Sequências de pontos λ_i^k , $i = 1, \dots, 4$, geradas pelo método MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-162.

A figura 5 apresenta a sequência de valores da função objetivo obtida pelo método em cada iteração.

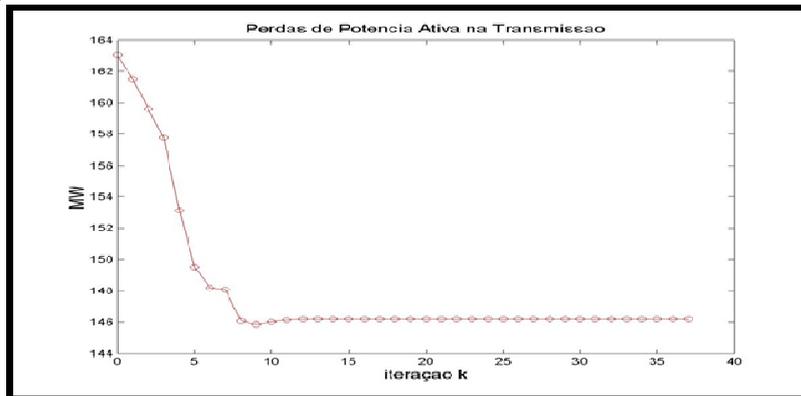


Figura 5: Sequência de valores da função objetivo gerados pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-162.

A figura 6 apresenta a evolução do parâmetro de amortecimento β_k ao longo das iterações.

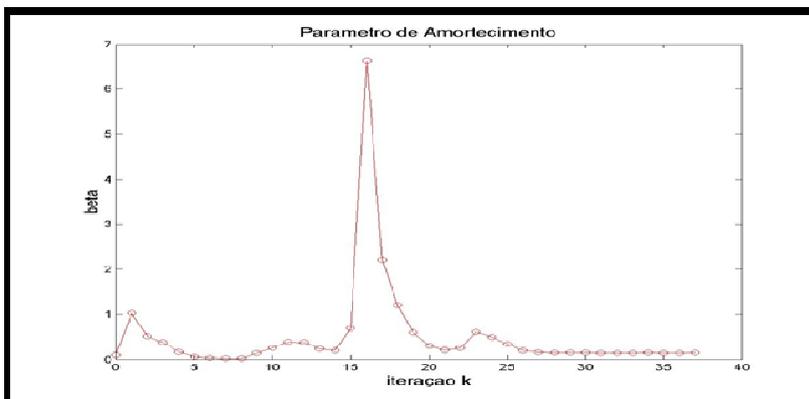


Figura 6: Evolução do parâmetro de amortecimento β_k gerado pelo MPIBLMCG-EX para o sistema IEEE-162.

6. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado o método predictor-corretor primal-dual de pontos interiores barreira logarítmica modificada, com estratégias de ajuste cúbico e de convergência global (MPIBLMCG-EX). A eficiência do método foi comprovada devido aos seguintes aspectos:

i) ao procedimento predictor-corretor, por considerar todos os resíduos condizentes às viabilidades primal, dual e condição de complementaridade, isto é, o vetor residual \mathbf{b}^k é não-nulo cujas componentes são não-nulas. Portanto, esse contribuiu ao refinamento das direções de busca, ao tratamento da esparsidade da matriz dos coeficientes A_k do sistema (1.5) e também por explicitar as equações de cada uma das direções de busca;

ii) à estratégia de convergência global, a qual é uma variante do método de Levenberg-Marquardt, que ajustou os autovalores da matriz hessiana θ_k , tornando-os positivos de tal forma que θ_k tornou-se definida positiva mesmo que a região de viabilidade seja não-convexa, e tratou a instabilidade numérica ao definirmos um $\varepsilon > 0$ muito pequeno;

iii) à estratégia de ajuste cúbico, a qual auxiliou ao MPIBLMCG em ocasiões extremas em que uma variável de folga z viesse a transpor a região de viabilidade já relaxada pelo método de barreira modificada ou a não atender o critério de que $z \geq -\tau\mu$. Essa estratégia nos permitiu a aplicação de uma nova heurística para a atualização do parâmetro de barreira em problemas de programação não-linear e não-convexo, de modo a incrementá-lo ou penalizá-lo na iteração em que o ajuste cúbico fosse necessário.

Considerando-se os aspectos apresentados acima, o MPIBLMCG-EX apresentou robustez ao solucionar o problema de FPO-Reativo, que é um problema de otimização não-linear e não-convexo, sobre o sistema elétrico de potência com 162 barras, realizando 37 iterações para obtermos a solução ótima, de maneira que o critério de parada fosse satisfeito em relação à precisão $\|\nabla L(\omega^{37})\|_{\infty} \leq 10^{-5}$.

Referências

- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M.** (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms* (3 ed.). New Jersey: Wiley Interscience.
- Benson, H. Y., Shanno, D. F., & Vanderbei, R. J.** (2000). Interior-Point Methods for nonconvex nonlinear programming: Jamming and comparative numerical testing. (P. U. ORFE-00-02, Ed.) *Operations Research and Financial Engineering*.
- Granville, S.** (1994). Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9, 136-146.
- Mangasarian, O. L., & Fromovitz, S.** (1976). The Fritz-John necessary optimality conditions in the Presence of Equality and Inequality Constraints. *Journal of mathematical analysis and applications*, 17, 37-47.
- Matioli, L.** (2001). *Uma nova metodologia para construção de funções de penalização para algoritmos de lagrangeano aumentado*. Florianópolis, Santa Catarina: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Monticelli, A.** (1983). *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. São Paulo: Edgard Blücher.
- Pereira, A. A.** (2007). *O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Polyak, R.** (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v.54 (2), 177 – 222.
- Sousa, V. A.** (2006). *Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Via Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada. Tese (Doutorado)*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- University Washington Electrical Engineering.** (s.d.). Acesso em 26 de Março de 2012, disponível em <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>
- Wu, Y., Debs, A. S., & Marsten, R. E.** (1994). A Direct Nonlinear Predictor- Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9, 876-883.