

A estatística Média Móvel Exponencialmente Ponderada para o controle preditivo, monitoramento e ajuste de processos

Custodio da Cunha Alves

Universidade da Região de Joinville - UNIVILLE. Depto de Engenharia de Produção Mecânica.
Rua Paulo Malschitzki, 10. Campus Universitário. Zona Industrial. Caixa Postal 246
CEP 89219-710 - Joinville, SC, Brasil.
custodio.alves@gmail.com

Elisa Henning

Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC. Depto de Matemática.
Rua Paulo Malschitzki, s/n. Campus Universitário Prof. Avelino Marcante. Zona Industrial.
CEP 89219-710 - Joinville, SC, Brasil.
elisa.henning@gmail.com

Andréa Cristina Konrath

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Depto de Informática e Estatística.
Campus Universitário Trindade. Caixa Postal 476 - CEP 88040-900 - Florianópolis, SC, Brasil.
andreak@gmail.com

Olga Maria Formigoni Carvalho Walter

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. Depto de Engenharia de Produção e Sistemas.
Campus Universitário Trindade. Caixa Postal 476 - CEP 88040-900 - Florianópolis, SC, Brasil.
olgaformigoni@gmail.com

Robert Wayne Samohyl

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Depto de Engenharia de Produção e Sistemas.
Campus Universitário Trindade. Caixa Postal 476 - CEP 88040-900 - Florianópolis, SC, Brasil.
samohyl@yahoo.com

RESUMO

A estatística Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA) explora o monitoramento de processos e o ajuste de realimentação. Esta estatística pode ser facilmente implementada e é muito eficaz em situações em que as observações são correlacionadas ou quando há muitos pontos fora dos limites de controle. Nestas situações o desvio do valor nominal de uma característica da qualidade pode ser ajustado estabelecendo-se uma previsão com EWMA num determinado período de tempo, para manter o processo no alvo. Neste trabalho, a estatística EWMA é proposta não apenas como uma ferramenta estatística de monitoramento e ajustes de processos, mas, também como controle preditivo. Neste artigo apresenta-se um estudo de caso com as múltiplas aplicações da EWMA, em uma indústria fabricante de artefatos de borracha situada em Santa Catarina. O estudo revela as vantagens das múltiplas aplicações da EWMA, especialmente quando um processo é seriamente atingido por uma causa atribuível continuamente recorrente.

Palavras-chave: EWMA, controle preditivo, monitoramento de processos, ajuste de processos.

Área principal (EST - Estatística)

The use of the Exponentially Weighted Moving Average statistical for the predictive control, monitoring and adjustment processes

ABSTRACT

The statistical Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) explores process monitoring and feedback adjustment. This statistic can be easily implemented and is very effective in

situations where the observations are correlated or when there are many points out-control. For these conditions the deviation from the nominal value of a quality characteristic may be set by establishing a prediction EWMA a period of time, to maintain the process at the target. In this work, the EWMA statistic is proposed not only as a statistical tool for monitoring and adjustment processes, but also as predictive control. In this paper we conducted a case study with multiple applications of the EWMA, in an industrial rubber products manufacturer located in Santa Catarina. The study reveals the advantages of the multiple applications of the EWMA, especially when a process is seriously affected by an assignable cause continually recurring.

Keywords: *EWMA, predictive control, process monitoring, adjustment processes.*

Main area (EST - Statistics)

1. Introdução

A Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA) é uma média ponderada de todas as observações, porém com a característica de atribuir menor peso aos dados mais antigos. Assim, em decorrência do teorema central do limite, esta estatística é robusta a desvios da normalidade, portanto uma boa opção para avaliação da estabilidade estatística de processos não normais (CALZADA; SCARIANO, 2003). Esta estatística pode ser facilmente implementada e é muito eficaz em situações em que as observações são correlacionadas ou quando o processo é muito afetado por pontos fora dos limites de controle.

Este trabalho tem como objetivo explorar as abordagens de aplicação da estatística EWMA para o monitoramento de processos e o ajuste de realimentação. Para tal, analisa-se um exemplo de aplicação proveniente de um processo industrial, sendo que os gráficos foram desenvolvidos em ambiente R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2011). Desta forma, apresenta-se de maneira objetiva uma visão prática de como ambos, monitoramento de processos e ajuste de realimentação, podem ser utilizados. Além disso, expõe-se uma justificativa teórica da contribuição dessa estatística para o controle estatístico de processos.

O artigo está estruturado da seguinte forma: a seção 2 apresenta a estatística EWMA para o monitoramento de processos e aplicação. A seção 3 apresenta a EWMA com a abordagem de previsão. A seção 4 propõe o ajuste de realimentação usando EWMA. A seção 5 mostra como a EWMA pode contribuir para o controle preditivo onde aplicações envolvendo dados reais ilustram esse argumento e o ajuste de realimentação e, finalmente, a seção 6 apresenta as considerações finais.

2. EWMA para o monitoramento de processos

O gráfico de controle estatístico de processos mais conhecido e amplamente aplicado no setor industrial é ainda, sem dúvida, os tradicional gráfico de Shewhart. No entanto, apesar de eficaz, não é recomendado quando aparecem estruturas correlacionadas ou quando o processo é muito afetado por vários pontos fora de controle uma vez que seus pressupostos de independência se limitam a casos ideais. Nessas situações e, especialmente, nas indústrias químicas essa suposição não se verifica, portanto outros gráficos de controle devem ser utilizados. É o caso dos gráficos de controle com memória.

Os modelos de gráficos de controle com memória, também denominados de gráficos de controle avançados tais como os gráficos CUSUM e o EWMA são aprimoramentos dos gráficos do tipo Shewhart desenvolvidos para em situações específicas minimizar simultaneamente a ocorrência de alarmes falsos e alarmes não dados (SAMOHYL, 2009).

O gráfico de controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA) introduzido por Roberts (1959) é uma boa alternativa ao gráfico de controle do tipo Shewhart, para detectar pequenas mudanças na distribuição característica da qualidade e, fornecer uma estimativa do novo nível do processo ou da nova média.

Hunter (1986) mostra as principais diferenças entre os gráficos de controle com memória EWMA e CUSUM (Soma Acumulada) e o gráfico do tipo Shewhart no monitoramento de processos. Ilustra como cada modelo de gráfico dispõe os dados em função dos pesos das observações. O gráfico de Shewhart depende inteiramente do último ponto demarcado. O gráfico CUSUM atribui peso igual para a sequência inteira de dados, desde o mais antigo ao mais recente. O gráfico EWMA acumula informações sucessivas ponderando as amostras atribuindo maior peso para as observações mais recentes e peso menor para as mais remotas, isto é, o peso dado às amostras decresce geometricamente da primeira até a última amostra. Esse gráfico é considerado uma ferramenta estatística de fácil implementação e efetiva em situações em que as observações do processo são correlacionadas (MASTRANGELO; MONTGOMERY, 1995).

O procedimento de controle baseado na estatística EWMA (Z_i) para monitorar o valor médio de um processo é dado por

$$Z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 10$ e $x_j = 1, 2, 3, \dots, i$ são observações de uma característica de qualidade utilizadas no monitoramento de processos, e λ é a constante de ponderação ou fator de alisamento. Esta constante expressa quão remota é a memória do gráfico e o valor inicial desta estatística (exigido com a primeira amostra em $i = 1$) é o alvo do processo, de modo que $Z_0 = \mu_0$. O valor de λ é determinado através de tabelas ou a partir de gráficos baseados no desempenho de ARL desejado. Quando $\lambda = 1$, o gráfico EWMA reduz-se ao gráfico de Shewhart, assim como $\lambda = 0$, $Z_0 = \mu_0$.

Sejam as observações x_j ($j = 1, 2, 3, \dots, i$) decorrentes de variáveis aleatórias X_j ($j = 1, 2, 3, \dots, i$), independentes e normalmente distribuídas com média fixada em μ e desvio padrão σ , ou seja, $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$. Neste procedimento, as observações x_i , sequencialmente coletadas, tanto podem ser observações individuais do processo, como também médias amostrais obtidas através de um plano de amostragem. Se desejarmos a estatística EWMA para médias amostrais usa-se na equação (1) \bar{x}_i ao invés de x_i .

Assim, se as observações são variáveis aleatórias independentes com variância σ^2 , então a variância de Z_i é dada por

$$\sigma_{Zi}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]. \quad (2)$$

Uma vez obtido o valor da variância σ_{Zi}^2 , os limites de controle do gráfico EWMA não são fixos, dependem de i e são normalmente obtidos com o valor assintótico $\lambda/(2-\lambda)$ da variância. À medida que i cresce, a variância se aproxima do valor assintótico.

Para monitorar o processo, as observações Z_i são demarcadas no gráfico EWMA cujos limites de controle são obtidos por

$$LSC = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}; \quad (3)$$

$$LC = \mu_0; \quad (4)$$

$$LIC = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2i}]}; \quad (5)$$

onde o fator L (equações 3 e 5) é a extensão dos limites de controle, ou seja, o número de múltiplos de desvio padrão em que os limites de controle estarão distante da linha central (LC).

A escolha dos parâmetros λ e L para o procedimento de planejamento ótimo de um gráfico EWMA consistem na seleção adequada desta combinação (λ, L) capaz de fornecer o melhor desempenho de ARL. Quando $L = 3$ (os limites 3σ usuais) funciona razoavelmente bem, particularmente com valores maiores de λ . No entanto, quando λ é pequeno, por exemplo, $\lambda = 0,1$ existe uma vantagem de reduzir a amplitude do limite de controle pela utilização de um L entre 2,6 e 2,8. O analista de processos deve ter em mente qual o menor valor de λ escolher para detectar pequenos deslocamentos. Assim, se um valor λ pequeno for utilizado, como $\lambda = 0,01$, então L deve ser reduzido, por exemplo, para $L = 2$. Outro aspecto importante é o comportamento dos limites de controle. Como $|1-\lambda| < 1$ a sequência $(1-\lambda)^{2i}$ tende para zero e i tende para o infinito. Já o termo $[1 - (1-\lambda)^{2i}]$ aproxima-se da unidade i tornando-se grande. Isto significa que, após o gráfico de controle EWMA ter percorrido diversos períodos de tempo, os limites de controle têm a forma assintótica e aproximam-se dos valores de posição fixa, dados por

$$LSC = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}; \quad (6)$$

$$LC = \mu_0; \quad (7)$$

$$LSC = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}; \tag{8}$$

As equações (6), (7) e (8) são mais simples para efetuar o cálculo. No entanto, utilização das equações (3), (4) e (5) são altamente recomendável para pequenos valores de i .

Os limites de controle no gráfico EWMA podem ser utilizados para sinalizar quando um ajuste é necessário, e a diferença entre o alvo e a previsão da média μ_{i+1} pode ser usada para determinar quanto de ajuste é necessário (MONTGOMERY, 2004).

2.1 Aplicação do gráfico de controle EWMA

Neste trabalho, o gráfico de controle EWMA é aplicado a um conjunto de dados de um processo de fabricação de artefatos de borracha, cuja característica de qualidade é a dureza da banda (X_i), monitorada através de observações individuais. Esses dados são referentes a um processo de produção de um modelo de bandas de uma indústria líder em tecnologia da borracha do norte de Santa Catarina.

As bandas compactadoras de sementes e niveladoras de terreno da linha agrícola são componentes de borracha semelhantes a um pneu que, montadas em um aro são acopladas à máquina agrícola. Tem como função fazer o sulco uniforme no solo para compactar e semear simultaneamente, finalidade esta que requer como propriedade principal à resistência a abrasão.

A característica da qualidade monitorada neste processo é a “dureza” da banda que possui valor nominal 70 ± 5 Shore A. O monitoramento da dureza desse componente de borracha se faz necessário para que se possa garantir a flexibilidade da borracha nas diferentes aplicações de produtos que exigem dureza específica.

Para ilustrar a sistemática de desenvolvimento do gráfico de controle EWMA é apresentada a Figura 1.

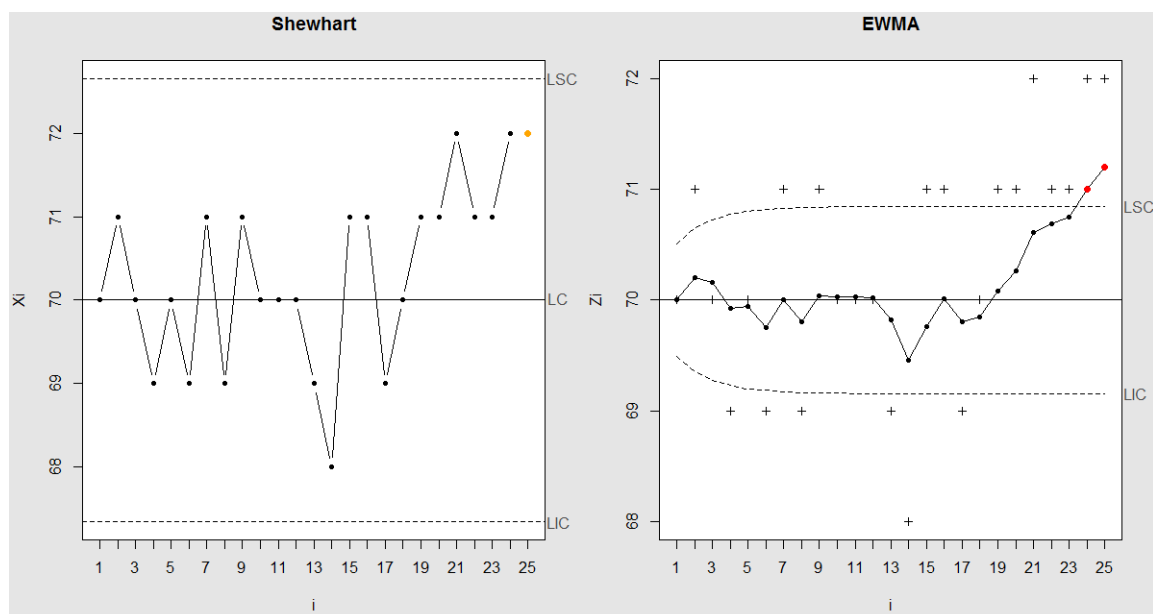


Figura 1 - Gráficos de controle de Shewhart e EWMA e para os dados do processo

Conforme a Figura 1, ambos os gráficos sinalizam um deslocamento no nível médio do processo a partir da 20ª amostra e apenas o gráfico EWMA apresenta pontos fora dos limites de controle.

3. EWMA com abordagem de previsão

O processo de estabelecer previsão constitui-se em uma das mais importantes atividades no que se refere a tomada de decisões no dia a dia de uma organização. No setor industrial, por

exemplo, a mensuração da qualidade da previsão é fundamental para reduzir de forma significativa a variabilidade de um processo produtivo, uma vez que produtos devem ser fabricados dentro das medidas de conformidade. Isso significa tanto as médias no alvo quanto a dispersão das medições também em torno de valores mínimos (SOUZA; SAMOHYL; MIRANDA, 2008).

Hunter (1986) menciona que a estatística EWMA é a melhor opção para uma posição a frente do tempo da observação mais recente, ou seja, $i + 1$. Como a EWMA é igual ao valor previsto mais o produto do fator de alisamento λ pelo erro de previsão observado no tempo t , $e_i = z_i - \hat{z}_i$, então temos:

$$\hat{z}_{i+1} = \hat{z}_i + \lambda(z_i - \hat{z}_i), \quad (9)$$

onde \hat{z}_i é o valor previsto no tempo i e \hat{z}_{i+1} é o valor previsto no tempo $i + 1$.

A equação 9 pode ser reescrita como

$$\hat{z}_{i+1} = \lambda \hat{z}_i + (1 - \lambda)z_i, \quad (10)$$

com $0 < \lambda \leq 1$.

Deste modo, como a estatística EWMA fornece uma previsão de onde o processo deverá estar próximo ao instante (\hat{z}_{i+1}) seu gráfico pode se constituir uma excelente ferramenta para o controle de processos.

O método para uma posição a frente do tempo da observação mais recente pode então ser descrito como:

- i. Defina o valor inicial previsto \hat{z}_i igual ao valor alvo e calcular o valor observado pela primeira vez;
- ii. O próximo valor previsto é obtido usando a equação 11.
- iii. Em seguida, calcular o valor observado z_2 e o valor previsto \hat{z}_3 pode ser estimado.
- iv. Assim, o EWMA previsto, \hat{z}_{i+1} é atualizado pela adição λe_i com o antigo EWMA \hat{z}_i .
- v. Quando o valor \hat{z}_{i+1} for previsão, podemos também prever um passo à frente do valor \hat{x}_{i+1} de acordo com a seguinte equação de previsão

$$\hat{z}_{i+1} = \lambda \hat{x}_i + (1 - \lambda)z_i. \quad (11)$$

Neste artigo utiliza-se a estatística EWMA para estabelecer previsões do valor da média de um processo num determinado período com objetivo de avaliar tendências de afastamento dos valores estimados em relação ao valor alvo desse processo. Por esta razão, a estatística EWMA, além de ser uma excelente ferramenta utilizada principalmente para o monitoramento de processo, apresenta na verdade uma interpretação mais ampla. A estatística EWMA fornece uma previsão de onde estará a média do processo no próximo intervalo de tempo, isto é, z_{i+1} é na verdade, uma previsão do valor da média do processo, μ , no período $i + 1$. Assim, a EWMA pode ser utilizada como base de um algoritmo dinâmico de controle do processo. Esta estatística pode ser ajustada para realçar sua capacidade de prever a média.

Suponha que a média do processo apresente uma tendência de se afastar uniformemente do alvo. O desempenho de previsão da EWMA pode ser melhorado neste caso (MONTGOMERY, 2004). Supondo que as observações k de uma característica de qualidade estão disponíveis. O objetivo é encontrar os valores de previsão para cada $k > 1$ usando a equação (1). Suponha-se também que as observações x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ são independentes e normalmente distribuídas com média μ e desvio padrão σ . A equação (1) pode ser escrita como

$$z_{i+1} = \lambda x_{i+1} + (1 - \lambda)z_i, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (12)$$

E, a equação (12) pode assumir a forma

$$z_{i+1} = z_i + \lambda(x_{i+1} - z_i), \tag{13}$$

tal que $x_{i+1} \sim N\{\mu, \sigma^2\}$ e $z_i \sim \left\{ \mu, \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \right\}$, onde a diferença $x_{i+1} - z_i$ é

$$x_{i+1} - z_i \sim N \left\{ 0, \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \right\}. \tag{14}$$

Assim, a quantidade $x_{i+1} - z_i$ é muito pequena, correspondendo ao erro de previsão e_{i+1} , de acordo com a equação (13). Assim, a partir do exposto anteriormente, $\sigma_{e_i}^2$ indica a variância dos erros com $\sigma^2 < \sigma_{e_i}^2 < 2\sigma^2$. Além disso, para grandes valores de i , a equação (14) torna-se

$$x_{i+1} - z_i \sim N \left\{ 0, \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) \right\}.$$

A equação (13) pode ser escrita como $z_{i+1} = z_i + \lambda e_{i+1}$ e, portanto, o valor de previsão \hat{z}_{i+1} para o valor real z_{i+1} , corresponde ao anterior z_i . Por esta razão, é recomendável que a definição de erros seja ligeiramente modificada de modo que não existam erros negativos, ou seja, $e_{i+1} = |x_{i+1} - z_i|$.

Após isso, levando-se em conta que ela é definida por $\hat{z}_1 = z_1 = x_1$ conforme é mostrado na Tabela 1, que sumariza o que foi discutido acima.

Casos	Observações	Previsão	Erros
i	x_i	\hat{z}_i	e_i^2
1	x_1	$z_1 = x_1$	0
2	x_2	z_1	$(x_2 - z_1)^2$
3	x_3	z_2	$(x_3 - z_2)^2$
...
k	x_k	z_{k-1}	$(x_k - z_{k-1})^2$

Tabela 1 – Previsão utilizando o modelo EWMA

A escolha de λ pode ser realizada de forma que seja mínimo $\sum_{i=1}^k e_i^2$, isto é, a partir da Soma de Quadrados dos Erros (SQE). A desvantagem deste método, no entanto, é a sua sensibilidade quanto à existência de observações que apresentam um grande afastamento em relação às restantes (*outliers*).

4. Ajuste de realimentação usando EWMA

O gráfico de controle é uma ferramenta estatística apropriada para avaliar se um processo está ou não sob controle estatístico e agir com relação a sua conformidade. Por exemplo, se um ponto fora dos limites de controle é sinalizado no gráfico, o processo pode ser finalizado, ou as variáveis de entrada para mantê-lo sob controle devem ser alteradas. Este método de controle é sem dúvida, bom e aceitável quando tal ação é possível ou quando não há indicação de muitos pontos fora dos limites de controle. No entanto, muitos processos requerem um método flexível usando informações de dados passados, com o intuito de ajustar o processo. Segundo Triantafvllokjulos (2007), esse método é conhecido como ajuste de realimentação (*feedback adjustment*).

Seja um processo onde se considera uma variável de entrada, uma variável de saída e uma variável de compensação. Esta última utilizada para ajustar a variável de entrada permanece entre os limites de controle. Na verdade, o objetivo é manter como possível esta variável de saída próximo do valor alvo. O valor alvo é denotado por T e corresponde a linha central em gráficos

de controle. Assim, no tempo t a variável de entrada é indicada por x_t , a variável de saída por y_t , e a variável de compensação por X_t . Além disso, um fator para medir a mudança na saída produzida por uma unidade de mudança na variável de compensação é chamado de ganho de processo e indicado por g . Isso significa que um aumento de 1 (uma) unidade na variável de compensação leva a um aumento de g unidades na variável de saída.

Assim, o erro após o ajuste é definido como o desvio do alvo após o ajuste no tempo t é definido por $e_t = y_t^a - T$ onde y_t^a é a variável de saída ajustada. O ajuste é sempre uma função da variável de compensação. O caso mais prático é considerado quando o ajuste tem a forma $x_t = X_t - X_{t-1}$. Conforme as definições de g e ajustes anteriormente mencionadas é possível estabelecer a seguinte equação

$$gx_t = -e_t, \quad (15)$$

onde o sinal (negativo) na equação se justifica, pois x_t precisa cancelar o erro. Isto é conhecido como o ajuste completo. No entanto, na prática um ajuste de amortecimento é normalmente usado. Isto implica que um fator de amortecimento G afetará o ajuste de acordo com

$$gx_t = -e_t \Leftrightarrow x_t = -\frac{G}{g}e_t. \quad (16)$$

Esta expressão é denominada equação de ajuste, sendo o análogo discreto para o Controle Integral utilizado no Controle de Engenharia de Processos. Este Controle Integral é definido como

$$gX_t = k_0 + k_1 \int e_t dt, \quad (17)$$

onde k_0 e k_1 são constantes. Da equação (16) e da definição de ajuste $x_t = X_t - X_{t-1}$, a equação (17) pode ser reescrita como

$$gX_t = k_0 + k_1 \sum_{i=1}^t e_t, \quad (18)$$

onde $k_0 = gX_0$ e $k_1 = -G$.

5. EWMA para o controle preditivo do nível do processo

O modelo EWMA além de ser uma ferramenta estatística para monitorar processo é amplamente utilizado como preditor do nível do processo. Em situações em que o analista de processo tem conhecimento dos erros que ele pode aplicar ao ajuste e colocar a resposta novamente ao alvo, a solução para tal é utilizar o controle preditivo. Para que o ajuste no controle preditivo tenha sucesso, duas tarefas são essenciais: um processo de identificação e a aplicação apropriada das regras de ajuste (SOUZA; SAMOHYL; MIRANDA, 2008).

Para o procedimento de controle preditivo é necessário considerar o erro antes do ajuste que é o erro que poderia acontecer se nenhuma ação de controle tenha sido tomada. Denota-se por z_t este erro no tempo t , de modo que $z_t = y_t - T$. Então se o valor de z_{t+1} é conhecido no tempo presente t , o ajuste x_t é tal que cancela z_{t+1} . Isto é impossível, pois o futuro não é conhecido. No entanto, z_{t+1} pode ser antecipado, ou seja, predito empregando a equação de ajuste

$$gX_t = -\hat{z}_{t+1}, \quad (19)$$

onde \hat{z}_{t+1} é o valor de previsão do erro z_{t+1} . Este valor de previsão do erro, de acordo com Box e Luceño (1997), é definido por

$$\hat{z}_{t+1} = Gz_t + (1 - G)\hat{z}_t, \quad (20)$$

onde G e $(G - 1)$ são respectivamente os fatores de amortecimento e de desconto da estatística EWMA. Agora, a variável de saída após o ajuste é

$$y_{t+1}^a = y_{t+1} + gX_t. \quad (21)$$

Assim, previsões de erro EWMA podem acontecer e se nenhum ajuste for aplicado o erro anula essa previsão. O único erro que ainda existe é o erro de previsão EWMA conhecido como o erro após o ajuste

$$e_t = z_t - \hat{z}_t. \quad (22)$$

Utilizando o ajuste $x_t = X_t - X_{t-1}$ e a equação (18) é possível observar que

$$gx_t = -(\hat{z}_{t+1} - \hat{z}_t). \quad (23)$$

Desta forma, partindo da definição para o tempo presente t , sabe-se que $e_t = y_t^a - T$ e $z_t = y_t - T$.

No entanto, para o tempo $t + 1$ define-se

$$e_t = y_{t+1}^a - T, \quad (24)$$

e

$$z_{t+1} = y_{t+1}^a - T. \quad (25)$$

Agora então

$$e_t - z_{t+1} = y_{t+1}^a - y_{t+1} = y_{t+1} + gX_t - y_{t+1} = gX_t. \quad (26)$$

Finalmente da equação (4) a expressão (11) pode então ser definida como

$$e_{t+1} = z_{t+1} - \hat{z}_{t+1}. \quad (27)$$

Um exemplo de aplicação a partir de dados reais ilustra como esse tipo de controle de realimentação pode ser utilizado. Esses dados, conforme Tabela 2, são resultantes de 60 medições da “dureza” da banda, característica de qualidade monitorada no processo de fabricação de artefatos de borracha, mencionada na seção 2.1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_i	70	69	71	69	70	71	70	69	70	71	70	71
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X_i	70	70	71	71	71	70	71	70	70	71	69	71
i	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
X_i	71	70	71	70	70	71	71	70	70	70	71	72
i	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
X_i	72	71	73	72	72	73	72	74	72	73	74	74
i	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
X_i	72	72	73	72	72	73	74	72	74	73	74	73

Tabela 2 - Dureza da banda (em Shore A)

A Figura 2 mostra para os valores iniciais da dureza (Tabela 2) como esse processo se comporta.

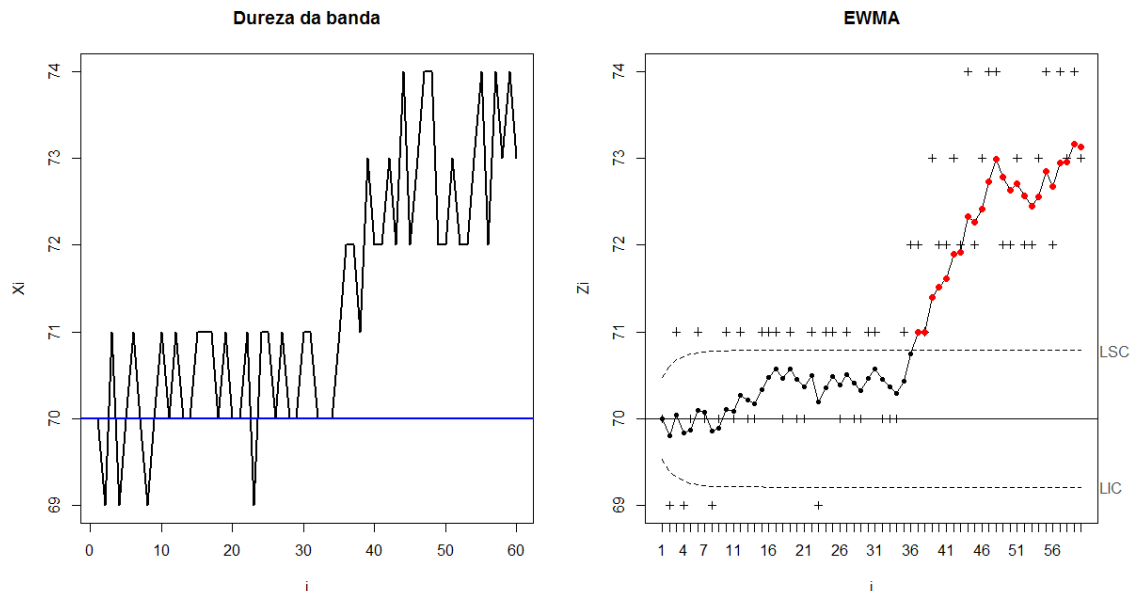


Figura 2 - Trajetória das medidas da dureza da banda a partir do valor nominal $T=70$ do processo

Analisando a Figura 2 pode-se observar que o gráfico de dureza da banda (esquerda) assinala um processo fora de controle estatístico e o gráfico de controle EWMA sem ajuste, (a direita) mostra que o processo está fora de controle estatístico. No entanto, se o ajuste de realimentação for utilizado, o processo poderá gerar uma situação sob controle. Para justificar isso, propõe-se para esse processo a escolha de um ganho equivalente a 1,2 ($g=1,2$) e de um fator de amortecimento 0,2 ($G=0,2$). O valor nominal é de 70 ($T=70$). Os valores obtidos deste ajuste de processo passaram por um ciclo de ajuste de realimentação. No $t=1$ não é realizado tanto o ajuste quanto a previsão. Assim $y_1^a = y_1 = 70$ e $z_1 = y_1 - 70 = 0$. Então o valor de partida para a EWMA \hat{z}_i é definido como 0 (zero) bem como $\hat{z}_2 = G(0) + (1 - G)0 = 0$ e assim nenhum ajuste acontece no instante $t = 2$. Então $y_2^a = y_1 = 69$ e $z_2 = -1$. E $\hat{z}_3 = Gz_2 + (1 - G)\hat{z}_2 = -0,20$, com a variável de compensação $X = -0,20$, que é utilizada para ajustar y_3 . Assim, $y_3 = 73$, e a alteração antes do ajuste é $z_3 = 71 - 70 = 1$. Assim, o valor ajustado para $t = 3$ é $y_3^a = y_3 - \hat{z}_3 = 71 - (-0,20) = 71,20$.

A Figura 3 apresenta os valores ajustados para a “dureza” da banda deste processo.

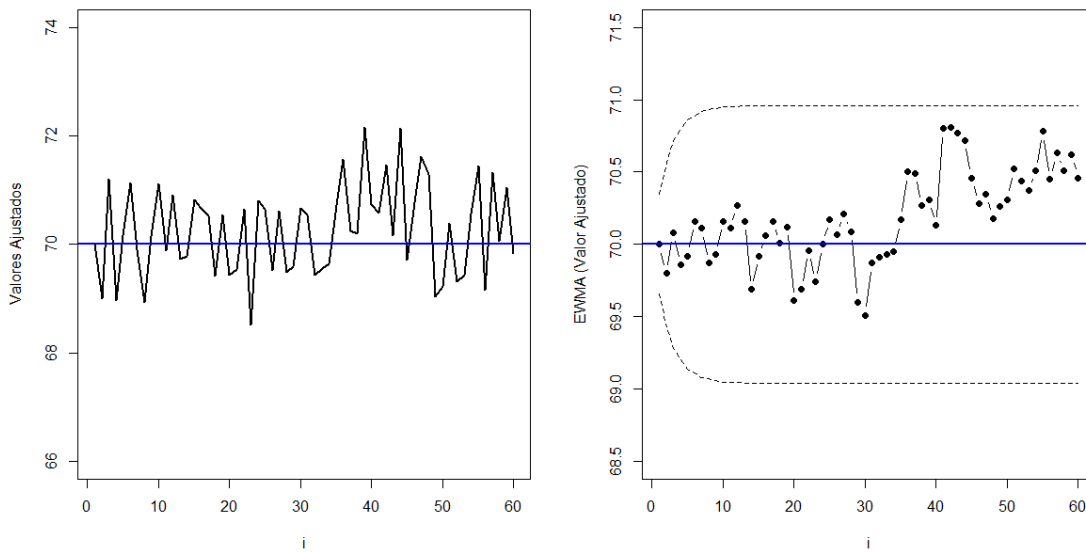


Figura 3 – Ajuste do Processo – Valores ajustados para a dureza da banda do processo

Constata-se que a média para os valores iniciais deste processo de 71,3 reduz para 70,3 com a realização do ajuste. O gráfico de controle EWMA (ajustado) assinala um processo sob controle estatístico.

Assim, para estabelecer previsões do nível médio do processo utiliza-se a metodologia desenvolvida na seção 4 para os valores ajustados desse processo. A otimização desse fator foi obtida com a ferramenta Solver que minimiza a Soma de Quadrados dos Erros (SQE) e calcula a previsão otimizada. A Figura 4 apresenta a previsão do valor médio para a “dureza” da banda estimado a partir desses valores ajustados.

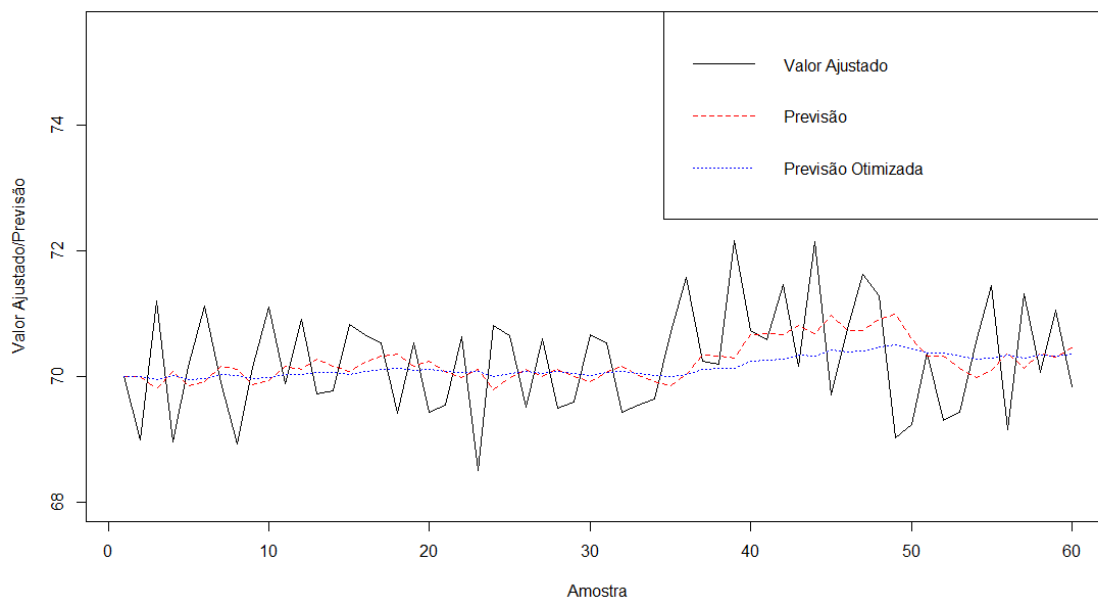


Figura 4 – EWMA para estabelecer previsões do nível médio do processo

Assim, a previsão do nível médio do processo a partir dos valores ajustados reduz levemente a média do processo de 70,26 para 70,23. No entanto, esta redução é maior com a otimização da previsão, com a média do processo alcançando 70,15. Nesse caso o novo valor do fator de ajuste

calculado passa de $\lambda = 0,2$ para $\lambda = 0,05$, minimizando assim a Soma de Quadrados dos Erros (SQE) de 44,03 para 42,84.

6. Considerações finais

A estatística EWMA é um modelo simples que produz bons resultados e sua utilização pode ser tão eficaz na previsão como no monitoramento de processos. O ajuste de processos utilizando uma previsão EWMA num determinado período é útil, pois o desvio do alvo de uma característica de qualidade pode ser cancelado, a fim de manter o processo no alvo.

A escolha e utilização de forma adequada de programas de computador existentes pode reduzir o esforço do usuário na implementação da EWMA.

No decorrer do trabalho, a partir de uma aplicação, foi observado como a estatística EWMA pode contribuir para o ajuste de realimentação. Comprova-se que após o ajuste, o único erro remanescente é o erro de previsão EWMA, considerado sob controle estatístico. O estudo de caso, a partir de dados reais de um processo de fabricação de artefatos de borracha, justifica este resultado. E serviu também para ilustrar como a estatística EWMA pode ser utilizada em procedimentos de monitoramento, ajuste de realimentação e controle preditivo.

Referências

BOX, G. E. P.; LUCEÑO, A. *Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment*. New York: Wiley, 1997.

CALZADA, M. E.; SCARIANO, S. M. The robustness of the MaxEWMA chart to non-normality. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, v. 32, n. 2, p. 573-590, 2003.

HUNTER, J.S. *The Exponentially Weighted Moving Average*, Journal of Quality Technology, v. 18, p. 203-210, 1986.

MASTRANGELO, C. M.; MONTGOMERY, D. C. *SPC with correlated observations for the chemical and process industries*. Quality and Reliability Engineering International, v. 11, p.79-89, 1995.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, 2011. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 10 mai. 2012.

ROBERTS, S. W. *Control Charts Tests Based on Geometric Moving Averages*. Technometrics, v.1, p. 239-250, 1959.

SAMOHYL, R.W. *Controle Estatístico de Qualidade*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

SOUZA, G. P.; SAMOHYL, R. W.; MIRANDA, R. G. *Métodos Simplificados de Previsão Empresarial*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. 181p.

TRIANAFVLLKJULOS, K. On feedback quality control with EWMA. *Math. Scientist*, v. 32, p. 110-117, 2007.