UN ALGORITMO PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD GLOBAL DE REDES GENERALES

AN ALGORITHM FOR THE ALL-TERMINAL RELIABILITY EVALUATION OF GENERAL NETWORKS

Jesús Andrés Rodríguez Sarasty
Pontificia Universidad Javeriana - Cali, Calle 18 No. 118-250 Cali, Colombia
jarsarasty@javerianacali.edu.co

Resumen

La confiabilidad global es una de las principales medidas de confiabilidad de redes. En este trabajo se propone un algoritmo que evalúa esta medida de confiabilidad en redes generales, mediante la combinación de diferentes enfoques. El algoritmo evalúa condiciones necesarias y suficientes de conectividad, efectúa reducciones de red y, de acuerdo con las características de la red resultante, selecciona entre métodos exactos de cálculo de confiabilidad o simulación Monte Carlo. En experimentos computacionales, el algoritmo propuesto logra menores tiempos de ejecución que los demás métodos considerados, y tiene una menor varianza que el método Monte Carlo.

Palabras Clave: Confiabilidad global, Monte Carlo, conectividad de redes

Abstract

Global reliability is one of the main network reliability measures. In this work, we propose an algorithm that evaluates this reliability measure in general networks, by combining different approaches. The algorithm evaluates necessary and sufficient conditions, applies network reductions and, according to the characteristics of the resulting network, chooses between exact methods for reliability evaluation and Monte Carlo simulation. In computational experiments, the running times of the proposed algorithm are lower than the average times of the other methods. In addition, the average variance of this algorithm is lower than the variance of the Monte Carlo approach.

Keywords: Global reliability, Monte Carlo, network connectivity

1 Introducción

La confiabilidad global (generalmente referida en inglés como ¨*all-terminal reliability*¨, ¨*overall reliability*¨ o ¨*global reliability*¨), es la probabilidad de que la red esté conectada. Se dice que una red está conectada si existe al menos una ruta entre cada par de nodos (Cormen et al., 1990)**.** En diversos sistemas reales, y particularmente en redes de comunicación, el funcionamiento del sistema depende de su estado de conectividad (Wilkov, 1972).

En redes generales, es decir, en redes que pueden tener una configuración arbitraria, el cálculo exacto de la confiabilidad global es un problema *NP-hard* (Ball, 1986). Por tanto, para obtener evaluaciones en tiempo polinomial se utilizan métodos Monte Carlo, los cuales estiman la confiabilidad mediante el promedio del estado de conectividad de la red.

Dado que la complejidad computacional de la estimación por métodos Monte Carlo depende en gran medida de la disponibilidad de un algoritmo eficiente para la determinación de la conectividad, en este trabajo inicialmente se analizan las condiciones necesarias y suficientes de conectividad y se comparan varios métodos para la determinación de conectividad de redes generales. Luego, estos elementos se integran en un algoritmo para la evaluación de conectividad, el cual posteriormente se utiliza para proponer un algoritmo para la evaluación de confiabilidad global de redes generales. Con el objetivo de aprovechar las ventajas de los diversos enfoques para evaluación de confiabilidad, este algoritmo combina métodos de evaluación exacta, métodos de reducción y métodos Monte Carlo.

2 Conectividad de redes

El incumplimiento de las condiciones necesarias de conectividad, o el cumplimiento de la condición suficiente, permiten determinar de forma abreviada el estado de conectividad de la red. De esta manera, en algunas redes la evaluación de estas condiciones puede evitar el uso de algoritmos más elaborados para evaluación de conectividad.

2.1 Condiciones necesarias

Sea $G(C,V)$ una red G no dirigida con un conjunto C de conexiones y con un conjunto V de nodos o vértices, tal que $n=|V|$, el número de nodos, y $m=|C|$, el número de aristas. Y sea g_i el grado del i-ésimo nodo de la red, es decir, la suma de las aristas que tienen contacto con el nodo i. Si la red G está conectada, entonces es obvio que ningún nodo puede tener grado cero, es decir

$$g_i \geq 1,\ \ \forall\, i \in V \qquad (1)$$

Además, si la red está conectada debe existir por lo menos un árbol de expansión, lo cual implica que en una red conectada con n nodos, debe haber por lo menos $n-1$ aristas. Dado que cada arista conecta dos nodos, en una red conectada se cumple

$$\sum_{\forall\, i \in V} g_i \geq 2(n-1) \qquad (2)$$

2.2 Condición suficiente

Lema: Una red no dirigida está conectada si,

$$\sum_{\forall\, i \in V} g_i \geq n^2-3n+4 \qquad (3)$$

Prueba: En una red no conectada, al menos uno de los n nodos no tiene conexión con los $n-1$ nodos conectados restantes. El máximo número de aristas entre estos $n-1$ nodos conectados es $\mathbb{C}_2^{n-1}$. Si el nodo no conectado se conecta con al menos uno de los nodos restantes, la red estará conectada y tendrá por lo menos $\mathbb{C}_2^{n-1}+1$ aristas. Puesto que la suma del grado de los nodos es igual al doble del total de las aristas,

$$\sum_{\forall\, i\in V} g_i \geq 2\left[\binom{n-1}{2}+1\right]$$

Lo cual equivale a,

$$\sum_{\forall\, i\in V} g_i \geq n^2-3n+4 \qquad \blacksquare$$

La Ecuación 3 se puede reescribir como,

$$D \geq 1+\frac{4-\ 2n}{n(n-1)} \qquad (4)$$

Donde D es la densidad de red, la cual corresponde al número de aristas dividido entre el total de posibles aristas, es decir,

$$D = \frac{2m}{n(n-1)} \qquad (5)$$

La densidad mínima para garantizar conectividad tiende asintóticamente a 1 a medida que incrementa el número de nodos de la red.

2.3 Métodos para determinación de conectividad

Experimentalmente se compararon los tiempos de ejecución de seis métodos para la determinación de conectividad de redes:

- **Rutas Mínimas:** Si existe una distancia finita entre cada par de nodos de la red, entonces la red está conectada. Por lo tanto, la conectividad de una red puede evaluarse a partir de las distancias mínimas entre todos los nodos. Para la comparación, se utilizó el algoritmo de Floyd.

- **Existencia de un árbol de expansión:** Una red conectada tiene por lo menos un árbol de expansión. En la comparación realizada se utiliza el algoritmo de Prim para determinar la existencia del árbol de expansión mínima.

- **Conectividad algebraica:** El segundo menor valor propio de la matriz Laplaciana, también conocida como matriz de Kirchhoff, es una medida de la conectividad del grafo (Fiedler, 1973).

- **Número de árboles de expansión:** De acuerdo con el teorema *Matrix-Tree*, enunciado originalmente por Gustav Kirchhoff en 1847, el número de árboles de expansión de una red no dirigida es igual a cualquiera de los menores principales de la matriz Laplaciana (Abdesselam, 2004).

- **Producto de la matriz de conexión:** La reiterativa multiplicación booleanda de la matriz de conexión por sí misma hasta alcanzar estabilidad, permite determinar la conectividad entre los nodos de la red (Billinton & Allan, 1992). Si en la matriz resultante alguna de las entradas por fuera de la diagonal principal de la matriz resultante es igual a cero, entonces no existe una ruta entre los nodos correspondientes; por lo tanto, la matriz no está conectada.

- Potencia de la matriz de conexión: Es una variante del método anterior. Debido a que como máximo hay $n-1$ aristas entre cualquier par de nodos de la red, el método consiste en obtener directamente la potencia $n-1$ de la matriz de conexión. Si alguna de las entradas por fuera de la diagonal principal de la matriz resultante es igual a cero, la red no está conectada.

Se registró el tiempo de ejecución de los seis métodos, considerando diferentes tamaños de red. Para cada tamaño de red se generaron aleatoriamente 100 réplicas con densidad promedio 0.5. Los métodos *número de árboles de expansión* y *multiplicación booleana de la matriz de conexión* alcanzaron los menores tiempos de ejecución. Estos dos métodos fueron comparados nuevamente en redes con densidades 0.5 y 0.1. De acuerdo con los resultados obtenidos, en la medida en que disminuye la densidad de la red, el método del *número de árboles de expansión* tiende a ser más rápido que el método de *multiplicación booleana de la matriz de conexión* (Figura 1). Para el algoritmo que se presenta en la siguiente sección finalmente se selecciona el método del número de árboles de expansión, debido a que en redes de mediana y baja densidad tiende a ser más rápido que el método de la multiplicación booleana de la matriz de conexión.

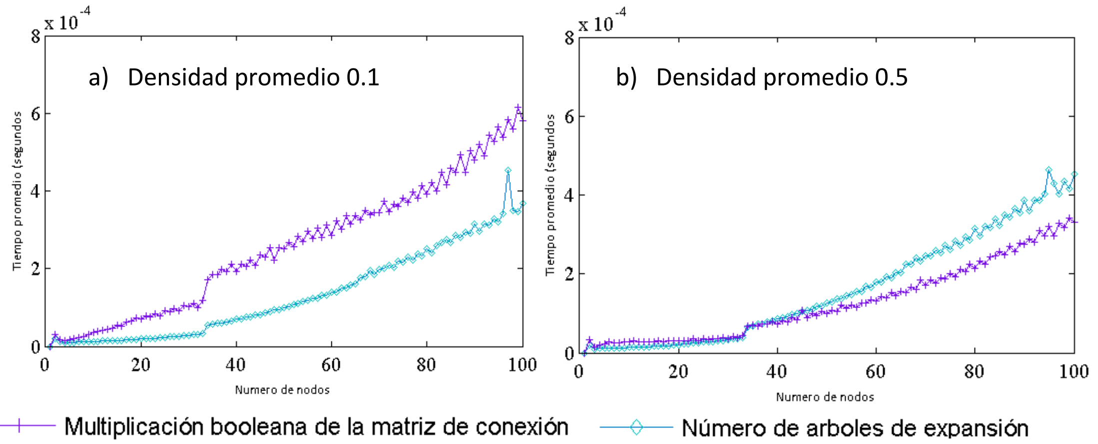

Figura 1. Tiempos de ejecución de cuatro métodos para determinación de conectividad considerando diferentes tamaños de red

2.4 Algoritmo general para determinación de conectividad

Para el cálculo del número de árboles de expansión la operación más demandante computacionalmente es el cálculo del determinante de la matriz Laplaciana. En algunas redes, esta operación puede evitarse al evaluar las condiciones necesarias y suficientes, tal como se indica el algoritmo de la Figura 2, donde A representa la matriz de adyacencia de la red, L la matriz Laplaciana, y L_1 el primer menor principal de la matriz laplaciana.

3 Evaluación de la confiabilidad de redes

En esta sección se discuten los métodos de cálculo exacto y el método Monte Carlo con variables antitéticas.

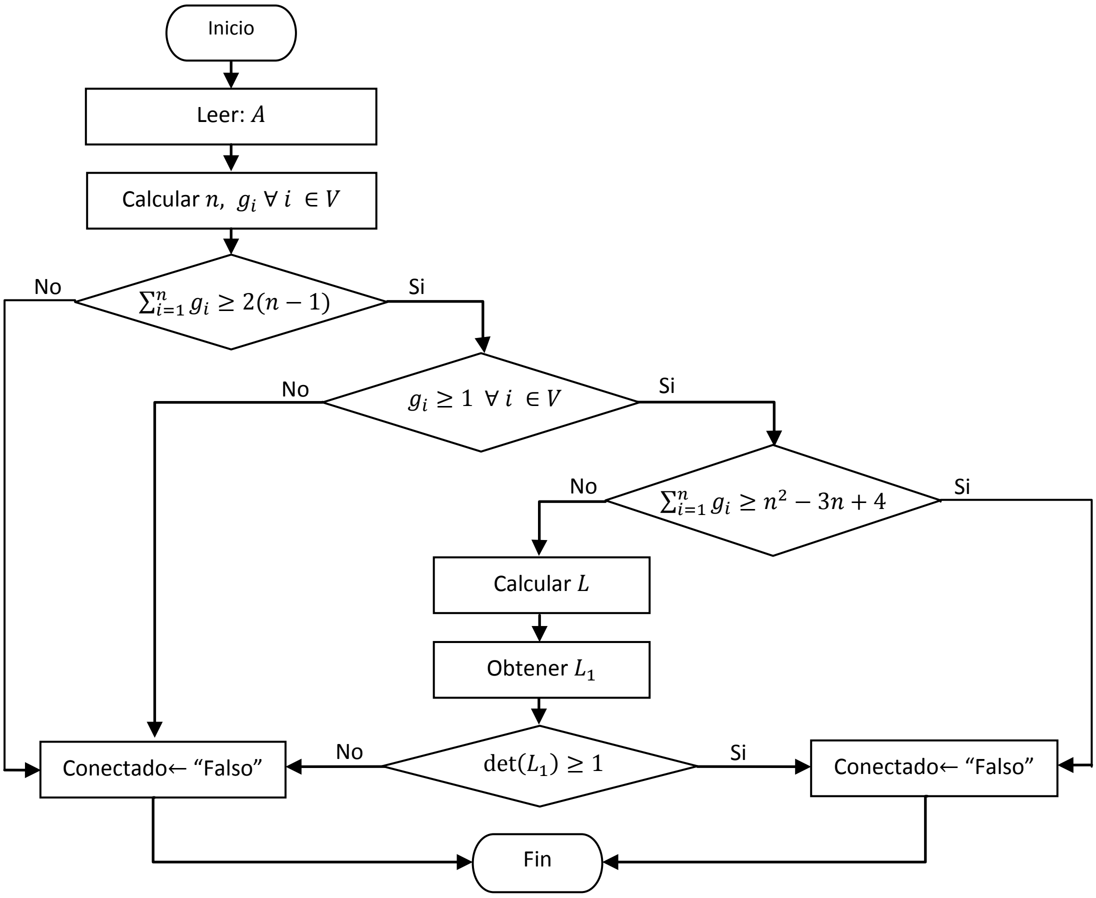

Figura 2. Algoritmo para determinación de conectividad de redes generales no dirigidas

3.1 Métodos exactos

Los métodos de cálculo exacto de confiabilidad de redes generales requieren la enumeración de los estados de la red, los cortes mínimos o el listado de árboles de expansión [véase por ejemplo Aggarwal y Rai (1981), Satyanarayana & Hagstrom (1981) , Liu, Dai, & Wu (1999), Cancela *et al*. (2001)]. En una red con n nodos y m aristas, el total de posibles estados es 2^m. Si la red está completamente conectada tiene n^{n-2} árboles de expansión y $2^{n-1}-1$ cortes mínimos (Rubino, 1998, pp. 281-282). Por lo tanto, los tiempos de ejecución de estos métodos tienden a crecer exponencialmente, lo cual los hace imprácticos en redes de mediano o gran tamaño. A pesar de esta limitación, en redes pequeñas o de topologías simples, los tiempos de ejecución de estos métodos exactos pueden ser menores que los tiempos requeridos por los métodos Monte Carlo.

Se describen a continuación dos métodos exactos para el cálculo de la confiabilidad: enumeración completa y principio de inclusión-exclusión con el listado de árboles de expansión de la red.

Enumeración completa: En redes bi-estado, el valor esperado de la función de estructura $\phi(\mathrm{s})$ corresponde a la confiabilidad R_s del sistema. Es decir,

$$R_s = E[\phi(\mathrm{s})] = \sum_{\forall\, j} \Pr(\mathrm{s_j})\phi(\mathrm{s_j}) \qquad (6)$$

Donde,

- $\mathrm{s_j}$: el j-ésimo vector de estado del sistema, para $j = 1, 2, \dots, 2^m$
- $\phi(\mathrm{s_j})$: Función de estructura evaluada en el estado $\mathrm{s_j}$, tal que $\phi(\mathrm{s_j}) = 1$ si hay conectividad, y $\phi(\mathrm{s_j}) = 0$ en caso contrario.
- $\Pr(\mathrm{s_j})$: la probabilidad de cada vector de estado de la red, donde cada conexión tiene una probabilidad de funcionar p_i (Rubino, 1998),

$$\Pr(\mathrm{s_j}) = \left(\prod_{i \mid s_{ij}=1} p_i\right)\left(\prod_{i \mid s_{ij}=0} (1-p_i)\right) \quad ,\forall j \qquad (7)$$

Cálculo mediante el principio de inclusión-exclusión: Sea P_{T_j} la probabilidad de que el j-ésimo árbol de expansión esté funcionando. La confiabilidad global de la red se puede calcular como la unión de las probabilidades P_{T_j} (Rubino, 1998). Debido a que estas probabilidades no corresponden a eventos disjuntos, se debe aplicar el principio de inclusión-exclusión, también conocido como teorema de Poincaré y Sylvester [(Rubino, 1998), (Kuo & Zuo, 2003)]. Si q es el total de árboles de expansión de la red,

$$R_s = \sum_{i=1}^{q}\left(\prod_{h\in T_i} r_h\right) - \sum_{i,j:1\le i<j\le q}^{q}\left(\prod_{h\in T_i\cup T_j} r_h\right) + \sum_{i,j,k:1\le i<j<k\le q}^{q}\left(\prod_{h\in T_i\cup T_j\cup T_k} r_h\right) - \cdots + (-1)^{q-1}\left(\prod_{h\in T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_q} r_h\right) \qquad (8)$$

Donde T_i es el conjunto de las aristas que componen el i-ésimo árbol de expansión y r_h es la confiabilidad de la arista h.

El listado de árboles de expansión puede generarse mediante el el producto cartesiano de $n-1$ cortes mínimos de la red (Aggarwal & Rai, 1981). Al operar el producto cartesiano pueden obtenerse circuitos, los cuales se caracterizan por tener un número par de apariciones. Estos circuitos deben ser identificados y removidos. También se deben suprimir los elementos que tienen menos de $n-1$ aristas, ya que estos no tienen un número suficiente de aristas para conformar un árbol de expansión. Después de realizar estas operaciones, el conjunto resultante está conformado por el listado de árboles de expansión de la red (Aggarwal & Rai, 1981).

3.2 Método Monte Carlo con variables antitéticas

El enfoque crudo de simulación Monte Carlo consiste en calcular el valor promedio de la función de estructura de la red, a partir de una muestra aleatoria de vectores de estado de los componentes. Para disminuir el número de iteraciones necesarias para la estimación de la confiabilidad por métodos Monte Carlo, se utilizan técnicas que permitan disminuir la varianza del estimador.

Las técnicas de reducción de varianza parten del principio de que la simulación es un experimento estadístico controlado, y que como tal, se puede reducir la varianza de un cierto número de réplicas, mediante la aplicación de principios probabilísticos (Lewis & Orav, 1989). Rubino (1998) describe algunos de los métodos de reducción de varianza que se han aplicado para la estimación de la confiabilidad de redes. Algunos de dichos métodos requieren información complementaria, tal como listas de árboles o cortes mínimos, lo cual puede incrementar el esfuerzo computacional (Rubino, 1998, p. 288).

Uno de los métodos de reducción de varianza más utilizados es la técnica de variables antitéticas, la cual busca generar pares de observaciones con una alta correlación negativa, con el fin de disminuir la varianza total. En sistemas monótonos la correlación entre pares de observaciones antitéticas es negativa (Lemieux, 2009). Puesto las redes que se analizan en este trabajo se caracterizan por tener una función de estructura no decreciente en cada uno de sus argumentos (Kuo et al., 2001), son sistemas monótonos. Por tanto, en este tipo de redes la varianza del método de variables antitéticas es inferior a la varianza del método crudo de simulación Monte Carlo. Adicionalmente el método de variables antitéticas requiere sólo la mitad de números aleatorios que utiliza el método de simulación cruda, y por lo tanto, demanda un menor esfuerzo computacional.

4 Técnicas de reducción

Estas técnicas buscan reducir el tamaño de la red original mediante la sustitución de conjuntos de arcos en serie o paralelo, preservando la confiabilidad de la red. En muchos casos el esfuerzo computacional requerido por las técnicas de simplificación se compensa con significativos ahorros de tiempo al evaluar la confiabilidad de la red resultante (Rubino, 1998).

En redes de confiabilidad global existen tres tipos básicos de transformaciones: reducciones de arcos en paralelo, reducciones grado 1 y reducciones grado 2 (Konak, 2007). En las reducciones de grado 1 y 2, un factor λ de preservación de confiabilidad permite calcular la confiabilidad R_s de la red original G, a partir de la red reducida G',

$$R_s(G) = \lambda R_s(G') \qquad (10)$$

Konak (2007) propone un algoritmo que combina los tres tipos de reducción:

- Reducción de arcos en paralelo: Los arcos en paralelo entre dos nodos pueden reemplazarse por una arista de confiabilidad equivalente.

- Reducciones grado 1: Si un nodo i tiene una sola arista incidente (i,j), tanto el nodo como la arista incidente pueden ser removidos de la red original G, para obtener una red reducida G'. En este caso, $\lambda = p_{(i,j)}\lambda$ (Konak, 2007), donde $p_{(i,j)}$ es la confiabilidad de la arista removida.

- Reducciones grado 2: Esta reducción se puede aplicar a nodos que tienen solamente dos nodos incidentes. En la red G de la Figura 3, el nodo i y sus respectivas aristas incidentes (i,j) e (i,k), pueden ser reemplazados por la arista (j,k), para obtener la red G'. En esta reducción, $\lambda = (p_{(i,j)} + p_{(i,k)} - p_{(i,j)}p_{(i,k)})\lambda$

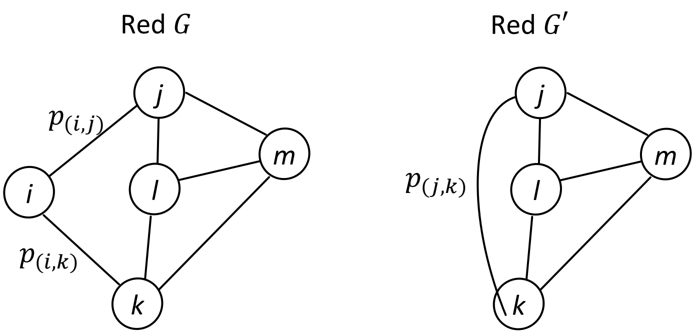

Figura 3. Reducción de grado 2

La confiabilidad de la nueva arista es (Konak, 2007),

$$p_{(j,k)} = \frac{p_{(i,j)}p_{(i,k)}}{p_{(i,j)} + p_{(i,k)} - p_{(i,j)}p_{(i,k)}} \qquad (3.12)$$

Experimentalmente Konak (2007) encontró que al combinar técnicas de reducción de varianza con métodos de reducción de redes, el factor de reducción de varianza puede ser significativo. Por lo tanto, la inclusión del algoritmo de reducción en el procedimiento de evaluación de confiabilidad de redes, no sólo permite reducir el tamaño de la red, sino que también disminuye el número de iteraciones requeridas para la estimación.

5 Algoritmo para la evaluación de confiabilidad de redes generales no dirigidas

El algoritmo que se propone inicialmente utiliza el algoritmo de la Sección 2.4 para descartar las redes que no están conectadas. En las redes que cumplen la condición de conectividad, se aplica el algoritmo de Konak (2007) para la reducción de la red (Sección 4), y se almacena el factor de reducción λ. Si la red reducida no tiene ningún nodo, la confiabilidad es igual al factor de reducción λ, y se finaliza el algoritmo.

Dado que ninguno de los métodos discutidos en las secciones anteriores es adecuado para todos los tipos de red, el algoritmo debe seleccionar el método más adecuado, de acuerdo con las características de la red reducida. Empíricamente se encontró que el método de enumeración completa alcanza tiempos competitivos en redes con un máximo de 10 conexiones, y el método basado en el principio de inclusión-exclusión en redes con menos de 8 árboles de expansión. En redes que no caen en esos rangos el algoritmo utiliza simulación Monte Carlo con variables antitéticas. Después de calcular la confiabilidad de la red reducida, se utiliza el factor de reducción λ para calcular la confiabilidad de la red original. La Figura 4 muestra el algoritmo propuesto para la estimación de confiabilidad de redes generales. Para este algoritmo se han definido las siguientes funciones:

- $C(G)$: Evaluación de conectividad de la red G
- $T(G)$: Cálculo del número de árboles de expansión de la red G
- $L(G)$: Listado de los árboles de expansión de la red G
- $R(G)$: Evaluación de la confiabilidad de la red G

6 Resultados computacionales

En redes generadas aleatoriamente se registró el tiempo promedio de ejecución de tres métodos para evaluación de confiabilidad: el algoritmo propuesto en este artículo (Sección 5), el método de enumeración completa (Sección 3.1) y la simulación Monte Carlo con variables antitéticas (Sección 3.2). Se generaron redes entre 3 y 7 nodos, con 10 réplicas para cada tamaño de red. Para esta comparación no se consideraron redes de mayor tamaño debido a que el método de enumeración completa desborda la capacidad de cómputo. Las corridas fueron realizadas en un computador MacBook Pro i5, de 2.4 GHz y 4 GB de memoria RAM.

Tiempo promedio (segundos)			
Nodos	Simulación Monte Carlo	Enumeración completa	Algoritmo general
3	2.5755	0.0068	0.0027
4	2.9712	0.0027	0.0005
5	3.036	0.0452	0.0053
6	3.4051	1.6236	0.2108
7	3.5685	111.1317	0.9551

En los tamaños de red analizados, el algoritmo propuesto se desempeño más rápidamente que los demás métodos considerados. El menor tiempo de corrida de este algoritmo es atribuible a la reducción de la red y a la evaluación de las condiciones necesarias de conectividad. Se requieren estudios adicionales para analizar el desempeño de este algoritmo en redes de mayor tamaño.

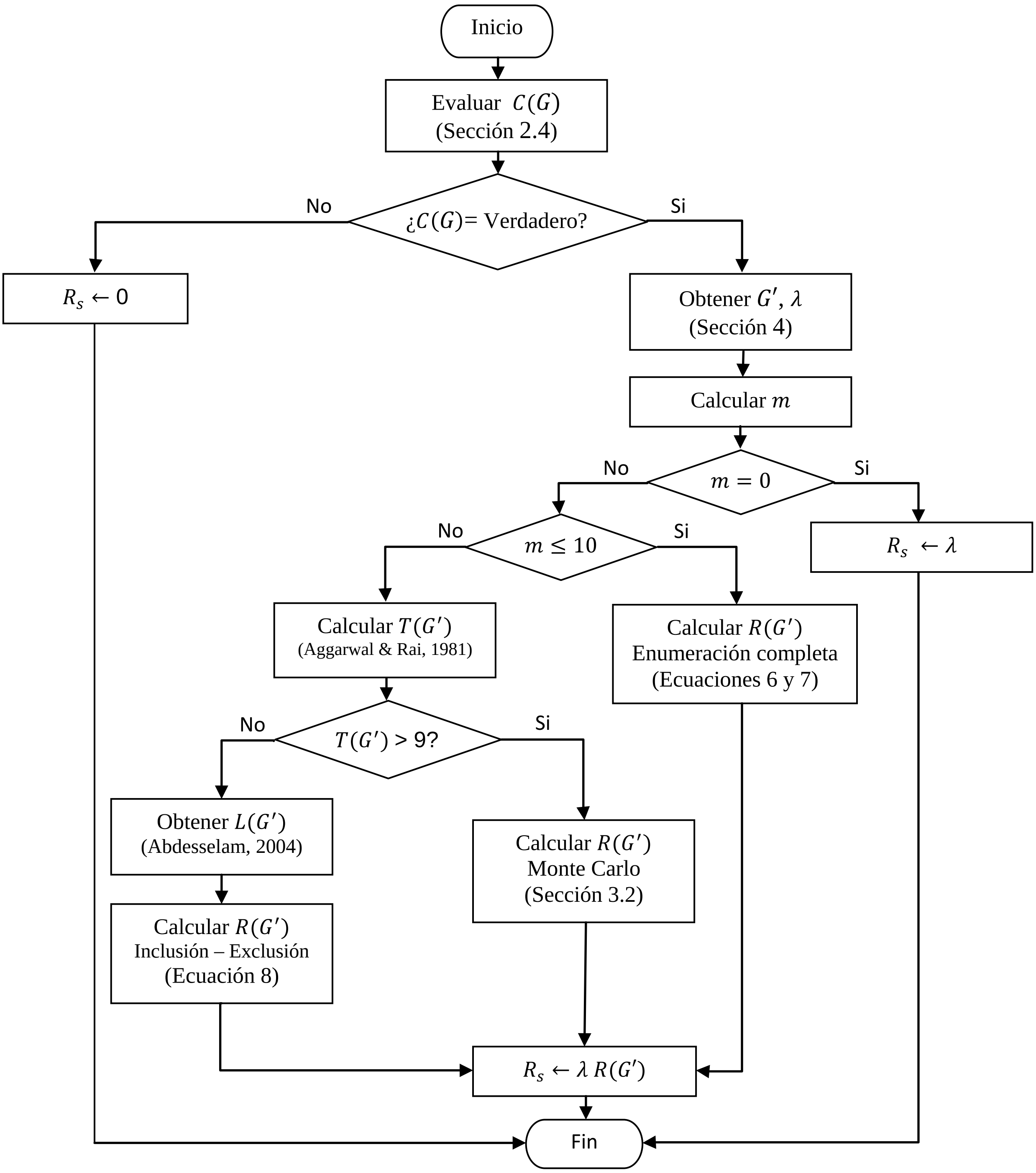

Figura 4. Algoritmo para evaluar la confiabilidad global de redes generales no dirigidas

7 Conclusiones

Se estudiaron las condiciones de conectividad de redes y se derivó una ecuación para evaluar la condición suficiente de conectividad a partir de la densidad de la red. Se discutieron y evaluaron varios métodos para determinación de conectividad de redes, de los cuales el método basado en el número de árboles de expansión de la red resultó ser el más rápido. Al combinar este método con las condiciones necesarias y suficientes para determinación de conectividad se obtuvo un algoritmo general para evaluación de conectividad que supera los demás métodos para evaluación de conectividad en diferentes densidades de red.

Posteriormente este algoritmo para evaluación de conectividad se utilizó para desarrollar un algoritmo general para evaluación de confiabilidad global de redes. Para lograr una rápida ejecución, este algoritmo inicialmente evalúa la conectividad de la red, luego la reduce y, de acuerdo con el número de nodos y el número de árboles de expansión, selecciona el método más conveniente para la evaluación de confiabilidad: enumeración completa, inclusión-exclusión con el listado de árboles de expansión de la red, o simulación Monte Carlo con variables antitéticas. Para acelerar los cálculos, se hizo una implementación paralelizada del algoritmo Monte Carlo.

8 Referencias

Abdesselam, A. (2004). Grassmann-Berezin Calculus and Theorems of the Matrix-Tree Type. *Advances in Applied Mathematics , 33* (1), 51-70.

Aggarwal, K. K., & Rai, S. (1981). Reliability evaluation in computer-communication networks. *IEEE Transactions on Reliability , 30* (1), 32-35.

Ball, M. O. (1986). Computational complexity of network reliability analysis: an overview. *IEEE Transactions on Reliability , 35* (3), 230-239.

Billinton, R., & Allan, R. N. (1992). *Reliability Evaluation of Engineering Systems. Concepts and Techniques* (2nd ed. ed.). New York: Plenum Press.

Cancela, H., Rubino, G., & Urquhart, M. E. (2001). An algorithm to compute the all-terminal reliability measure. *Journal of the Indian Operational Research Society (OPSEARCH) , 38* (6).

Cormen, T., Leiserson, C., & Rivest, R. (1990). *Introduction to Algorithms.* MIT Press and McGraw-Hill.

El Khadiri, M., & Rubino, G. (1992). *A Monte Carlo method based on antithetic variates for network reliability computations. Rapports de Recherche No. 1609.* Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

Fiedler, M. (1973). Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal , 23* (2), 298–305.

Konak, A. (2007). Combining network reductions and simulation to estimate network reliability. In S. G. Henderson, B. Biller, M.-H. Hsieh, J. Shortle, J. D. Tew, & R. R. Barton (Ed.), *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference.* (pp. 2301-2305). IEEE.

Kuo, W., & Zuo, M. J. (2003). *Optimal reliability modeling: principles and applications.* Hoboken, NJ: Jhon Wiley & Sons.

Kuo, W., Pradad, V. R., Tillman, F. A., & Hwang, C.-L. (2001). *Optimal reliability design: fundamentals and applications.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling* . Springer.

Lewis, P. A., & Orav, E. (1989). *Simulation methodology for statisticians, operations analysts, and engineers.* CRC Press.

Liu, C., Dai, M., & Wu, X.-Y. (1999). A new algorithm for computing the overall network reliability. *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems , VI,* 149-152.

Rubino, G. (1998). Network Reliability Evaluation. In K. Bagchi, & J. Walrand, *State-of-the art in performance modeling and simulation* (pp. 275-302). Gordon and Breach Books.

Satyanarayana, A., & Hagstrom, J. N. (1981). A new algorithm for the reliability analysis of multi-terminal networks. *IEEE Transactions on Reliability* , *30* (4), 325-333.

Wilkov, R. S. (1972). Analysis and design of reliable computer networks. *IEEE Transactions on Communications* , *20* (3), 660-678.