

UMA ABORDAGEM PONDERADA EM ANÁLISE MULTIVARIADA DE VARIÂNCIA PARA ESTIMAR UM ÍNDICE DE AVALIAÇÃO DO SISTEMA DE MEDIÇÃO

Rogério Santana Peruchi
Anderson Paulo de Paiva
Pedro Paulo Balestrassi
Michele de Santana Carmelossi
Luiz Gustavo Dias Lopes

Instituto de Engenharia de Produção e Gestão, Universidade Federal de Itajubá
Av. BPS, 1303 Bairro Pinheirinho – Itajubá, MG – CEP: 37500-903

rogerioperuchi@unifei.edu.br, andersonppaiva@unifei.edu.br, pedro@unifei.edu.br,
m.i.c.h.e.l.e@hotmail.com, luizgustavo.lopes@yahoo.com

RESUMO

Este artigo explora a análise do sistema de medição com características correlacionadas através de estudos de repetitividade e reprodutibilidade. A principal contribuição desta pesquisa é a proposta de um método para avaliar sistemas de medição considerando uma abordagem de análise multivariada ponderada de variância (weighted multivariate analysis of variance - WMANOVA). Para provar a eficiência deste método, serão gerados dados com distintas estruturas de correlação entre as características da qualidade, assim como para sistemas de medição inaceitável, marginal e aceitável. O método proposto é comparado com métodos univariados e multivariados. Foi observado que, comparado aos outros métodos, WMANOVA foi mais robusto em estimar o índice de avaliação de sistemas de medição multivariado.

PALAVRAS-CHAVE. Análise do sistema de medição, repetitividade e reprodutibilidade, análise de componentes principais.

EST - Estatística

SIM - Simulação

ABSTRACT

This article explores the analysis of measurement system with correlated characteristics through the study of repeatability and reproducibility. The main contribution of this research is to propose a method for evaluating measurement system by considering an approach of weighted multivariate analysis of variance (WMANOVA). To prove its efficiency, we generate simulated data with different correlation structures for measurement systems that are acceptable, marginal, and unacceptable. The proposed method is compared with classical univariate and multivariate methods. It was observed that, compared to the other methods, the WMANOVA was more robust in estimating the assessment indices of a multivariate measurement system.

KEYWORDS. Measurement system analysis, repeatability and reproducibility, principal component analysis.

EST – Statistics

SIM - Simulation

1. Introdução

Os esforços em projetos de melhoria da qualidade são frequentemente direcionados para a produção com zero defeito através da redução da variabilidade. Se um produto é classificado como não conforme, geralmente, entende-se que a variabilidade é atribuída ao processo, logo ações de melhoria são implementadas para melhorar a capacidade do processo. Infelizmente, pode ser que os esforços não necessariamente resultem em capacidade do processo melhorada, pois é possível que o processo já seja capaz o bastante, no entanto, o erro de medição é ainda inaceitável quando comparado à variabilidade do processo. Portanto, é importante investigar tanto a variabilidade de um processo de medição quanto à variabilidade do processo de manufatura antes de tomar ações para melhorias futuras. Em manufatura, por exemplo, um sistema de medição nem sempre produz a dimensão exata de uma peça, mas ela fornece medições que são desviadas do valor verdadeiro por algum erro. Em qualquer atividade envolvendo medições, uma parte da variabilidade observada será devido ao próprio produto/processo, σ_p^2 , enquanto que o restante será devido ao erro de medição ou variabilidade do sistema de medição, σ_{SM}^2 (AL-REFAIE e BATA, 2010; SENOL, 2004; WANG e YANG, 2007).

O estudo usado para medir as componentes de variação de uma análise do sistema de medição (MSA) é chamado de Estudo de Repetitividade e Reprodutividade do Instrumento de Medição (*Gage Repeatability and Reproducibility – GR&R*), o qual pretende determinar se esta variabilidade é relativamente menor que a do processo monitorado. Repetitividade é a variação nas medições obtidas com um instrumento de medição quando usado diversas vezes por um avaliador que mede a mesma característica em uma mesma peça. Reprodutividade é tipicamente definida como a variação na média das medições feitas por diferentes avaliadores usando o mesmo instrumento de medição para medir a mesma característica em uma mesma peça (AIAG, 2010; BURDICK, BORROR e MONTGOMERY, 2003; ERDMANN, DOES e BISGAARD, 2010; KAJA *et al.*, 2010).

Em processos de manufatura, geralmente, deseja-se trabalhar com mais de uma característica da qualidade (*critical-to-quality characteristic – CTQ*). Quando a correlação entre as CTQs é baixa, o uso de técnicas estatísticas univariadas pode ser satisfatório. Por outro lado, quando as respostas apresentam correlação significativa, este efeito não pode ser negligenciado na análise dos dados. Logo, para tratar com múltiplas características correlacionadas é exigido o uso de técnicas estatísticas multivariadas. Este artigo trata de análise multivariada do sistema de medição através de estudos de repetitividade e reprodutividade do processo de medição. A principal contribuição deste artigo é a proposta de um método para avaliar sistemas de medição considerando uma abordagem de análise multivariada ponderada de variância (*weighted multivariate analysis of variance – WMANOVA*). O método chamado WMANOVA adota uma abordagem de ponderação da relação $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ pelo percentual de explicação dos autovalores extraídos da matriz variação total do sistema de medição. Para provar a eficiência do método foram gerados dados simulados para sistemas de medição inaceitável, marginal e aceitável e diversas estruturas de correlação entre as CTQs. As estimativas do índice de aceitação do sistema de medição, através dos métodos multivariados, foram comparadas com base no intervalo de confiança da média. Este intervalo foi obtido através dos índices estimados pelo método univariado (*analysis of variance – ANOVA*) para as respostas originais. O estudo de simulação concluiu que WMANOVA foi mais robusto que os métodos MANOVA (*multivariate analysis of variance*) de Majeske (2008) e PCA (*principal component analysis*) de Wang e Chien (2010).

O restante deste artigo está estruturado como segue. O Capítulo 2 mostra como avaliar um sistema de medição usando os métodos multivariados. Em seguida, no Capítulo 3 foi realizado um estudo de simulação para comparar o desempenho dos métodos multivariados em diversas estruturas de correlação entre as CTQs e classificações de sistemas de medição. Por fim, o Capítulo 4 apresentará as principais conclusões envolvendo as análises usando os métodos multivariados MANOVA, PCA e WMANOVA.

2. Análise de sistemas de medição através de estudo GR&R

2.1 Estudo GR&R multivariado baseado em MANOVA

De acordo com Majeske (2008), quando um estudo GR&R considera dois fatores com interação para múltiplas características da qualidade (q características), o modelo é dado por:

$$CTQ = \begin{bmatrix} CTQ_{11} & CTQ_{12} & \dots & CTQ_{1q} \\ CTQ_{21} & CTQ_{22} & \dots & CTQ_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CTQ_{n1} & CTQ_{n2} & \dots & CTQ_{nq} \end{bmatrix} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, o \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (1)$$

onde $CTQ = (CTQ_1, CTQ_2, \dots, CTQ_q)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q)$ são vetores constantes; $\alpha_i \sim N(0, \Sigma_\alpha)$, $\beta_j \sim N(0, \Sigma_\beta)$, $\alpha\beta_{ij} \sim N(0, \Sigma_{\alpha\beta})$, e $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$ são vetores aleatórios estatisticamente independentes um dos outros. Os componentes de variância do modelo na Eq. (1) podem ser estimados usando o método MANOVA, proposto por Majeske (2008). Segundo este autor, estes componentes de variância são estimados para obter um índice que avalia a aceitação do sistema de medição, denominado $\%R\&R_m$ (percentagem de variação devido à repetitividade e reprodutividade). Este índice pode ser calculado por:

$$\%R \& R_m = \left(\prod_{i=1}^q \sqrt{\frac{\lambda_{SM_i}}{\lambda_{T_i}}} \right)^{1/q} 100\% \quad (2)$$

onde λ_{SM} e λ_T são os autovalores extraídos das matrizes variância-covariância sistema de medição ($\hat{\Sigma}_{SM}$) e variação total ($\hat{\Sigma}_T$), respectivamente. $\%R\&R_m$ menor que 10% determina que o sistema de medição é considerado aceitável. Se o valor do índice estiver em uma região marginal entre 10% e 30%, indica que o sistema de medição pode ser considerado aceitável dependendo da aplicação, custo do dispositivo de medição, custo de reparo ou outros fatores. Além disso, o sistema de medição é considerado inaceitável se o valor do índice exceder 30% e deverá ser melhorado (AIAG, 2010; HE, WANG e COOK, 2011; LI e AL-REFAIE, 2008; WOODALL e BORROR, 2008).

2.2 Estudo GR&R multivariado baseado em PCA

Segundo Wang e Chien (2010), para tratar com múltiplas características da qualidade (q características) em um estudo GR&R, PCA é um método alternativo ao método MANOVA proposto por Majeske (2008). O modelo que representa um estudo GR&R multivariado através do método PCA é dado por:

$$PC_n = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, o \\ k = 1, 2, \dots, r \\ n = 1, 2, \dots, q \end{cases} \quad (3)$$

onde PC_n são os escores de componentes principais PC_1, PC_2, \dots, PC_q . O índice $\%R\&R_m$ de avaliação do sistema de medição é obtido pela Eq. (4) através do método PCA. Para mais detalhes de como obter os escores de componentes principais e como avaliar o sistema de medição usando o método PCA, ver Wang e Chien (2010). Os critérios de aceitação do sistema de medição são os mesmos descritos na seção 2.1.

$$\%R \& R_m = \left(\frac{\sigma_{SM}}{\sigma_T} \right) 100\% \quad (4)$$

2.2 Estudo GR&R multivariado baseado em WMANOVA

O método WMANOVA proposto pelos autores desta pesquisa estima o índice $\%R\&R_m$ considerando uma abordagem de análise multivariada ponderada de variância (*weighted*

multivariate analysis of variance - WMANOVA). O modelo que representa um estudo GR&R multivariado para o método WMANOVA é o mesmo descrito na Eq. (1). Para obter o índice %R&R_m estimam-se as matrizes variância-covariância da Eq. (1), que representam os componentes de variação de um sistema de medição. Antes de estimar as matrizes variância-covariância, estimam-se as matrizes de médias quadráticas para os fatores peça (**MSP**), operador (**MSO**), interação (**MSPO**), assim como para o termo de erro (**MSE**). Logo, as matrizes das médias quadráticas são estimadas por:

$$\mathbf{MSP}_{ab} = \frac{or}{p-1} \sum_{i=1}^p (\bar{m}_{a_i..} - \bar{m}_{a...}) (\bar{m}_{b_i..} - \bar{m}_{b...}) \quad (5)$$

$$\mathbf{MSO}_{ab} = \frac{pr}{(o-1)} \sum_{j=1}^o (\bar{m}_{a..j} - \bar{m}_{a...}) (\bar{m}_{b..j} - \bar{m}_{b...}) \quad (6)$$

$$\mathbf{MSPO}_{ab} = \frac{r}{(p-1)(o-1)} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o (\bar{m}_{a_{ij}.} - \bar{m}_{a_i..} - \bar{m}_{a..j} + \bar{m}_{a...}) (\bar{m}_{b_{ij}.} - \bar{m}_{b_i..} - \bar{m}_{b..j} + \bar{m}_{b...}) \quad (7)$$

$$\mathbf{MSE}_{ab} = \frac{1}{po(r-1)} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (\bar{m}_{a_{ijk}} - \bar{m}_{a_i..} - \bar{m}_{a..j} - \bar{m}_{a...k} + \bar{m}_{a...}) (\bar{m}_{b_{ijk}} - \bar{m}_{b_i..} - \bar{m}_{b..j} - \bar{m}_{b...k} + \bar{m}_{b...}) \quad (8)$$

Em seguida, estimam-se as matrizes variância-covariância para processo ($\hat{\Sigma}_P$), repetitividade ($\hat{\Sigma}_{\text{repetitividade}}$), reprodutividade ($\hat{\Sigma}_{\text{reprodutividade}}$), sistema de medição ($\hat{\Sigma}_{SM}$) e variação total ($\hat{\Sigma}_T$), com base nas matrizes de médias quadráticas das Eqs. (5)-(8):

$$\hat{\Sigma}_P = \hat{\Sigma}_\alpha = \frac{\mathbf{MSP} - \mathbf{MSPO}}{or} \quad (9)$$

$$\hat{\Sigma}_{\text{repetitividade}} = \hat{\Sigma}_\epsilon = \mathbf{MSE} \quad (10)$$

$$\hat{\Sigma}_{\text{reprodutividade}} = \hat{\Sigma}_\beta + \hat{\Sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{MSO} - \mathbf{MSPO}}{pr} + \frac{\mathbf{MSPO} - \mathbf{MSE}}{r} \quad (11)$$

$$\hat{\Sigma}_{SM} = \hat{\Sigma}_{\text{repetitividade}} + \hat{\Sigma}_{\text{reprodutividade}} \quad (12)$$

$$\hat{\Sigma}_T = \hat{\Sigma}_P + \hat{\Sigma}_{SM} \quad (13)$$

Se o efeito de interação não é significativo, o modelo da Eq. (1) pode ser reduzido para o modelo da Eq. (14). Neste caso, a matriz de médias quadráticas MSE é estimada pela Eq. (15) e as matrizes variância-covariância para peça (processo), repetitividade e reprodutividade (operador) são estimadas usando as Eqs. (16)-(18). **MSP**, **MSO**, $\hat{\Sigma}_{SM}$ e $\hat{\Sigma}_T$ são estimadas de acordo com as Eqs. (5), (6), (12) e (13), respectivamente.

$$\mathbf{CTQ} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, o \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathbf{MSE}_{ab} = \frac{1}{por - p - o + 1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (\bar{m}_{a_{ijk}} - \bar{m}_{a_i..} - \bar{m}_{a..j} - \bar{m}_{a...k} + \bar{m}_{a...}) (\bar{m}_{b_{ijk}} - \bar{m}_{b_i..} - \bar{m}_{b..j} - \bar{m}_{b...k} + \bar{m}_{b...}) \quad (15)$$

$$\hat{\Sigma}_P = \hat{\Sigma}_\alpha = \frac{\mathbf{MSP} - \mathbf{MSE}}{or} \quad (16)$$

$$\hat{\Sigma}_{\text{repetitividade}} = \hat{\Sigma}_\epsilon = \mathbf{MSE} \quad (17)$$

$$\hat{\Sigma}_{\text{reprodutividade}} = \hat{\Sigma}_\beta = \frac{\mathbf{MSO} - \mathbf{MSE}}{pr} \quad (18)$$

De acordo com a Eq. (2), o método MANOVA aplica média geométrica na relação $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ para obter o índice de avaliação do sistema de medição. Esta estratégia não considera maior importância para os autovalores mais significativos, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq 0$, extraídos das matrizes variância-covariância. Em decorrência disso, o método WMANOVA adota uma abordagem de

ponderação da relação $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ pelo percentual de explicação dos autovalores extraídos da matriz variação total do sistema de medição:

$$\%R \& R_m = \sum_{i=1}^q \left(W_i \sqrt{\frac{\lambda_{SM_i}}{\lambda_{T_i}}} \right) \quad (19)$$

onde $W_i = (\lambda_{T_i} / \sum_{j=1}^q \lambda_{T_j}) 100\%$; λ_{SM} e λ_T são os autovalores extraídos das matrizes variância-covariância sistema de medição ($\hat{\Sigma}_{SM}$) e variação total ($\hat{\Sigma}_T$), respectivamente. Os critérios de aceitação do sistema de medição são os mesmos descritos na seção 2.1.

3. Estudo de simulação

O objetivo desta simulação é avaliar diversas situações possíveis em análises multivariadas de um sistema de medição e comparar os resultados alcançados pelos métodos multivariados. Serão gerados dados simulados para sistemas de medição inaceitável ($\%R\&R > 30\%$), marginal ($10\% < \%R\&R < 30\%$) e aceitável ($\%R\&R < 10\%$), assim como para correlações muito baixa ($W_1 \leq 65\%$), baixa ($65\% < W_1 \leq 75\%$), média ($75\% < W_1 \leq 85\%$), alta ($85\% < W_1 \leq 95\%$) e muito alta ($W_1 > 95\%$). W_1 é o resultado obtido de $W_1 = (\lambda_{T_1} / \sum_{j=1}^q \lambda_{T_j}) 100\%$.

Este estudo de simulação assumirá 15 cenários, totalizando 1.800 medições simuladas. A Figura 1 exemplifica dois casos extremos, correlação muito alta (Figura 1a) e correlação muito baixa (Figura 1b) entre duas variáveis respostas **CTQ₂** e **CTQ₄**. Para este exemplo foram selecionados os cenários 1 e 5 da Tabela 1. Observa-se que quanto maior for a similaridade do padrão de alteração dos níveis dos fatores (peças e operadores), maior será a correlação entre as respostas. Além disso, se forem definidos valores médios muito distintos para dois operadores medindo a mesma peça, a análise de variância indicará diferença entre operadores e/ou termo de interação (peça*operador) estatisticamente significativo. A Figura 2 apresenta um fluxograma que detalha como obter os dados simulados. Estes foram gerados a partir das informações da Tabela 1, obedecendo à mesma quantidade de peças e operadores em Majeske (2008), $p=5$, $o=2$, $r=3$ e $q=4$. Estes dados podem ser encontrados em <http://www.pedro.unifei.edu.br/download/tables.rar>.

As análises foram focadas apenas na comparação entre os métodos multivariados. Para entender como calcular o índice univariado $\%R\&R$ usando o método ANOVA, ver AIAG (2010). O cálculo do índice multivariado $\%R\&R_m$ através dos métodos MANOVA e PCA podem ser encontrados em Majeske (2008) e Wang e Chien (2010), respectivamente. Assim, os índices $\%R\&R_m$ e $\%R\&R$ foram calculados para a comparação dos métodos, onde para cada cenário tentou-se obter valores próximos de índices $\%R\&R$ para cada resposta. Desta forma, espera-se que os índices obtidos pelos métodos multivariados estejam próximos dos obtidos pelo método univariado. O critério utilizado para determinar se a estimativa do índice multivariado, $\%R\&R_m$, está correta foi baseado nos intervalos de confiança da média calculados a partir dos resultados de $\%R\&R$ obtidos através do método univariado. Os limites inferiores (LIC) e superiores (LSC) dos intervalos de confiança foram calculados usando as Eqs. (20) e (21):

$$LIC = \overline{CTQ} - t_{N-1, \alpha/2} (s/\sqrt{N}) \quad (20)$$

$$LSC = \overline{CTQ} + t_{N-1, \alpha/2} (s/\sqrt{N}) \quad (21)$$

onde \overline{CTQ} é a média de $\%R\&R$ para **CTQ₁**, **CTQ₂**, **CTQ₃** e **CTQ₄**; s é o desvio-padrão; N é o tamanho da amostra e $t_{N-1, \alpha}$ é o $(1-\alpha)100\%$ percentil de uma distribuição t com $(N-1)$ graus de liberdade. A Tabela 2 apresenta os resultados dos cálculos do índice $\%R\&R$, assim como a média e os intervalos para 95% de confiança, obtidos através do método univariado. Os índices $\%R\&R_m$ calculados através dos métodos PCA, MANOVA e WMANOVA estão na Tabela 3. A análise e comparação serão realizadas de duas formas: intramétodo e intermétodo. A análise intramétodo fornecerá uma visão geral do desempenho dos métodos ao estimar os índices $\%R\&R_m$. A análise intermétodos terá o objetivo de justificar os desvios de estimativas de $\%R\&R_m$ pelos métodos.

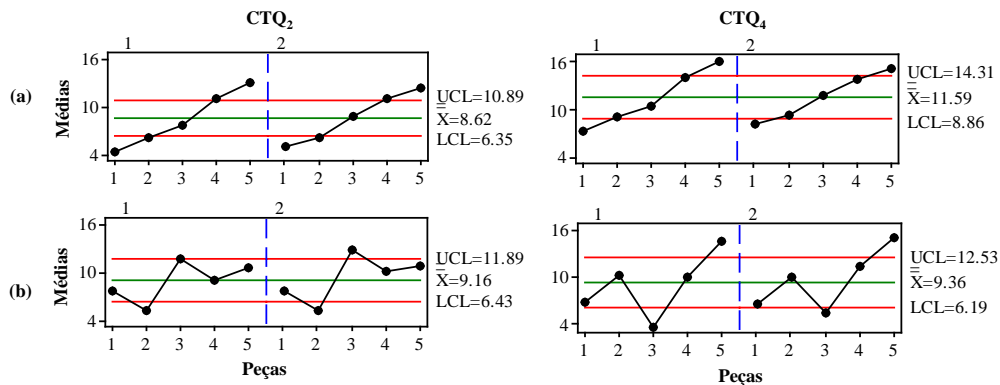


Figura 1: gráfico Xbar por operador: (a) exemplo de correlação muito alta (0,999) entre CTQ₂ e CTQ₄; (b) exemplo de correlação muito baixa (0,088) entre CTQ₂ e CTQ₄

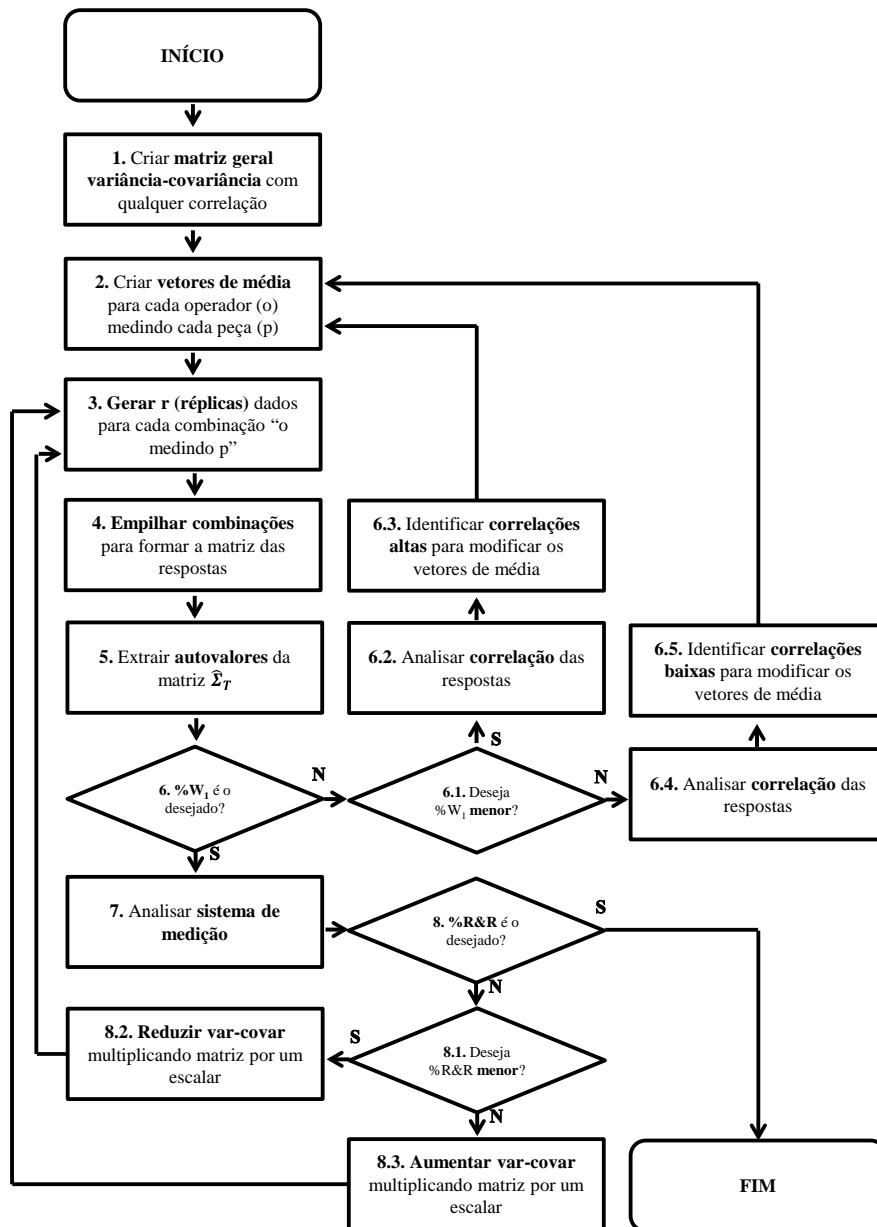


Figura 2: Fluxograma detalhado que explica como obter os dados simulados para um estudo GR&R multivariado

Tabela 1: Vetor de medias e matrizes variância-covariância usadas para gerar os dados simulados com diferentes correlações e sistemas de medição (SM)

Cenários	Vetor de médias										Matrizes variância-covariância			
	P ₁ O ₁	P ₂ O ₁	P ₃ O ₁	P ₄ O ₁	P ₅ O ₁	P ₁ O ₂	P ₂ O ₂	P ₃ O ₂	P ₄ O ₂	P ₅ O ₂				
1 Corr. muito baixa SM inaceitável	4,00	8,00	6,00	10,00	5,00	4,10	8,10	5,90	9,90	4,90	[1.10 1.27 1.39 1.50] [1.27 1.50 1.63 1.76] [1.39 1.63 1.80 1.92] [1.50 1.76 1.92 2.10]			
	8,00	6,00	13,00	9,00	11,00	7,90	6,10	12,90	9,10	10,90				
	9,00	10,00	13,00	16,00	7,00	9,10	10,10	12,90	15,90	7,10				
2 Corr. baixa SM inaceitável	4,00	8,00	6,00	10,00	5,00	4,10	8,10	5,90	9,90	4,90	[1.10 1.27 1.39 1.50] [1.27 1.50 1.63 1.76] [1.39 1.63 1.80 1.92] [1.50 1.76 1.92 2.10]			
	8,00	7,00	9,00	12,00	11,00	7,90	6,90	9,10	12,10	10,90				
	9,00	10,00	7,00	13,00	15,00	9,10	10,10	6,90	13,10	14,90				
3 Corr. média SM inaceitável	9,00	7,00	5,00	12,00	10,00	9,01	6,99	5,01	12,01	9,99	[1.10 1.27 1.39 1.50] [1.27 1.50 1.63 1.76] [1.39 1.63 1.80 1.92] [1.50 1.76 1.92 2.10]			
	8,00	7,00	9,00	12,00	11,00	7,99	6,99	9,01	12,01	10,99				
	9,00	10,00	7,00	13,00	15,00	9,01	10,01	6,99	13,01	14,99				
4 Corr. alta SM inaceitável	6,00	4,00	8,00	10,00	12,00	6,01	4,01	7,99	9,99	12,01	[1.50 1.58 1.63 1.67] [1.58 1.70 1.73 1.78] [1.63 1.73 1.80 1.83] [1.67 1.78 1.83 1.90]			
	3,00	6,00	9,00	11,00	15,00	3,01	6,01	9,01	10,99	14,99				
	6,00	8,00	11,00	15,00	13,00	6,01	8,01	11,10	15,10	13,10				
5 Corr. muito alta SM inaceitável	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	4,01	6,01	7,99	9,99	12,01	[1.10 1.27 1.39 1.50] [1.27 1.50 1.63 1.76] [1.39 1.63 1.80 1.92] [1.50 1.76 1.92 2.10]			
	5,00	7,00	9,00	11,00	13,00	5,01	7,01	9,01	10,99	12,99				
	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	6,01	8,01	9,99	11,99	13,99				
6 Corr. muito baixa SM marginal	4,00	8,00	6,00	10,00	5,00	4,10	8,10	5,90	9,90	4,90	[0.22 0.25 0.28 0.30] [0.25 0.30 0.33 0.35] [0.28 0.33 0.36 0.38] [0.30 0.35 0.38 0.42]			
	8,00	6,00	13,00	9,00	11,00	7,90	6,10	12,90	9,10	10,90				
	5,00	8,00	9,00	14,00	12,00	5,10	8,10	8,90	13,90	12,10				
7 Low corr. SM marginal	6,00	8,00	4,00	11,00	10,00	6,10	8,10	3,90	10,90	9,90	[0.22 0.25 0.28 0.30] [0.25 0.30 0.33 0.35] [0.28 0.33 0.36 0.38] [0.30 0.35 0.38 0.42]			
	8,00	7,00	9,00	12,00	11,00	7,90	6,90	9,10	12,10	10,90				
	7,00	13,00	10,00	11,00	15,00	7,10	13,10	9,90	11,10	14,90				
8 Corr. média SM marginal	9,00	7,00	5,00	12,00	10,00	9,01	6,99	5,01	12,01	9,99	[0.22 0.25 0.28 0.30] [0.25 0.30 0.33 0.35] [0.28 0.33 0.36 0.38] [0.30 0.35 0.38 0.42]			
	8,00	7,00	9,00	12,00	11,00	7,99	6,99	9,01	12,01	10,99				
	9,00	10,00	7,00	13,00	15,00	9,01	10,01	6,99	13,01	14,99				
9 Corr. alta SM marginal	6,00	4,00	8,00	10,00	12,00	6,01	4,01	7,99	9,99	12,01	[0.22 0.25 0.28 0.30] [0.25 0.30 0.33 0.35] [0.28 0.33 0.36 0.38] [0.30 0.35 0.38 0.42]			
	3,00	6,00	9,00	11,00	15,00	3,01	6,01	9,01	10,99	14,99				
	6,00	8,00	11,00	15,00	13,00	6,01	8,01	11,10	15,10	13,10				
10 Corr. muito alta SM marginal	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	4,01	6,01	7,99	9,99	12,01	[0.22 0.25 0.28 0.30] [0.25 0.30 0.33 0.35] [0.28 0.33 0.36 0.38] [0.30 0.35 0.38 0.42]			
	5,00	7,00	9,00	11,00	13,00	5,01	7,01	9,01	10,99	12,99				
	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	6,01	8,01	9,99	11,99	13,99				
11 Corr. muito baixa SM aceitável	4,00	8,00	6,00	10,00	5,00	4,10	8,10	5,90	9,90	4,90	[0.04 0.04 0.05 0.05] [0.04 0.05 0.05 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.07]			
	8,00	6,00	13,00	9,00	11,00	7,90	6,10	12,90	9,10	10,90				
	5,00	8,00	9,00	14,00	12,00	5,10	8,10	8,90	13,90	12,10				
12 Corr. baixa SM aceitável	6,00	8,00	4,00	11,00	10,00	6,01	8,01	3,99	10,99	9,99	[0.04 0.04 0.05 0.05] [0.04 0.05 0.05 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.07]			
	7,00	5,00	9,00	13,00	11,00	6,99	4,99	9,01	13,01	10,99				
	7,00	13,00	10,00	11,00	15,00	7,01	13,01	9,99	11,01	14,99				
13 Corr. média SM aceitável	9,00	7,00	5,00	12,00	10,00	9,01	6,99	5,01	12,01	9,99	[0.04 0.04 0.05 0.05] [0.04 0.05 0.05 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.07]			
	8,00	7,00	9,00	12,00	11,00	7,99	6,99	9,01	12,01	10,99				
	9,00	10,00	7,00	13,00	15,00	9,01	10,01	6,99	13,01	14,99				
14 Corr. alta SM aceitável	6,00	4,00	8,00	10,00	12,00	6,01	4,01	7,99	9,99	12,01	[0.04 0.04 0.05 0.05] [0.04 0.05 0.05 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.07]			
	3,00	6,00	9,00	11,00	15,00	3,01	6,01	9,01	10,99	14,99				
	6,00	8,00	11,00	15,00	13,00	6,01	8,01	11,10	15,10	13,10				
15 Corr. muito alta SM aceitável	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	4,01	6,01	7,99	9,99	12,01	[0.04 0.04 0.05 0.05] [0.04 0.05 0.05 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.06] [0.05 0.06 0.06 0.07]			
	5,00	7,00	9,00	11,00	13,00	5,01	7,01	9,01	10,99	12,99				
	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	6,01	8,01	9,99	11,99	13,99				
	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	7,99	10,01	12,01	14,01	15,99				

Tabela 2: Resultados dos cálculos do índice %R&R, média e intervalo de confiança de 95%

C	CENÁRIO		UNIVARIADO (%R&R)				IC da Média		
	SM	Correlação	CTQ ₁	CTQ ₂	CTQ ₃	CTQ ₄	Média	LIC	LSC
C1	Inaceitável	Muito baixa	49,9	39,3	38,3	34,1	40,42	29,69	51,14
C2		Baixa	42,2	55,5	44,3	39,8	45,44	34,42	56,47
C3		Média	40,8	52,4	42,6	36,9	43,18	32,63	53,72
C4		Alta	45,3	33,2	41,2	47,8	41,86	31,70	52,03
C5		Muito alta	31,1	34,9	37,8	41,1	36,21	29,45	42,97
C6	Marginal	Muito baixa	15,8	14,1	13,7	10,2	13,48	9,75	17,21
C7		Baixa	18,6	27,2	21,3	24,1	22,82	16,95	28,69
C8		Média	15,5	23,7	17,0	14,6	17,69	11,16	24,21
C9		Alta	13,2	10,3	13,6	16,9	13,50	9,19	17,80
C10		Muito alta	15,2	19,0	19,7	20,9	18,70	14,80	22,59
C11	Aceitável	Muito baixa	8,4	6,3	4,9	5,3	6,22	3,67	8,77
C12		Baixa	5,6	4,6	6,7	5,4	5,54	4,15	6,92
C13		Média	6,2	9,6	6,6	5,9	7,07	4,37	9,76
C14		Alta	5,7	4,5	5,9	7,3	5,84	4,00	7,69
C15		Muito alta	6,5	7,6	8,6	9,2	7,95	6,07	9,83

Tabela 3: Resultados dos cálculos de média, intervalo de confiança de 95% e índice %R&R_m

C	IC da Média			MULTIVARIADO (%R&R _m)					
	Média	LIC	LSC	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₄	MAN	WMAN
C1	40,42	29,69	51,14	52,24 (55,8)	19,55 (29,1)	15,32 (14,1)	42,08 (1,0)	10,78	31,62
C2	45,44	34,42	56,47	53,84 (70,7)	10,48 (17,5)	20,91 (8,1)	19,32 (3,7)	13,30	36,50
C3	43,18	32,63	53,72	47,79 (79,4)	11,21 (9,4)	17,65 (7,5)	9,64 (3,7)	11,32	38,27
C4	41,86	31,70	52,03	44,38 (88,3)	8,94 (8,4)	29,62 (3,1)	75,92 (0,2)	28,15	42,95
C5	36,21	29,45	42,97	36,10 (99,7)	97,05 (0,2)	100,00 (0,0)	100,00 (0,0)	64,09	35,81
C6	13,48	9,75	17,21	18,46 (44,9)	6,92 (29,9)	2,79 (23,5)	32,43 (1,7)	4,97	9,62
C7	22,82	16,95	28,69	24,97 (66,2)	2,77 (17,8)	8,37 (15,9)	46,89 (0,2)	10,04	19,86
C8	17,69	11,16	24,21	19,71 (79,8)	6,01 (9,2)	11,78 (7,5)	7,19 (3,5)	5,40	15,38
C9	13,50	9,19	17,80	14,17 (89,8)	6,01 (7,6)	9,99 (2,5)	54,07 (0,1)	14,31	14,37
C10	18,70	14,80	22,59	18,63 (99,9)	93,87 (0,1)	100,00 (0,0)	100,00 (0,0)	47,23	16,95
C11	6,22	3,67	8,77	6,41 (45,5)	6,39 (35,9)	4,59 (17,4)	15,83 (1,1)	4,08	5,00
C12	5,54	4,15	6,92	6,69 (67,6)	1,15 (18,3)	2,25 (13,8)	5,33 (0,4)	2,01	4,70
C13	7,07	4,37	9,76	7,87 (79,7)	1,95 (8,9)	5,75 (7,8)	3,08 (3,6)	2,28	6,07
C14	5,84	4,00	7,69	5,99 (90,3)	3,34 (7,1)	3,96 (2,6)	33,24 (0,1)	7,22	6,58
C15	7,95	6,07	9,83	7,92 (100,0)	96,68 (0,0)	100,00 (0,0)	100,00 (0,0)	39,35	7,78

Na análise intramétodo verifica-se que o WMANOVA foi mais robusto que MANOVA e PCA para estimar os índices %R&R_m. O método MANOVA foi capaz de estimar o índice multivariado dentro do intervalo de confiança apenas nos cenários C9, C11 e C14. No trabalho de Wang e Chien (2010) foram avaliadas as componentes principais que apresentaram um percentual de explicação acumulado de pelo menos 95% para as variáveis originais. Sendo assim, o método PCA foi capaz de estimar o índice multivariado dentro do intervalo de confiança apenas nos cenários C5, C10, C11 e C15. Já o método WMANOVA estimou o índice %R&R_m dentro do intervalo de confiança em 14 dos 15 cenários avaliados.

Para a análise intermétodo por PCA, a Tabela 3 apresenta as análises dos sistemas de medições simulados para as quatro componentes principais. Os valores entre parênteses mostram a porcentagem de explicação da variabilidade das CTQs para cada componente principal. Recomenda-se avaliar os escores das componentes principais que representam variabilidade acumulada de pelo menos 95% para as CTQs. Logo, para os cenários com estrutura de correlação:

- muito baixa, baixa e média: **PC₁**, **PC₂** e **PC₃** foram analisadas;
- alta: **PC₁** e **PC₂** foram analisadas;
- muito alta: apenas **PC₁** foi analisada.

Para os cenários C5, C10 e C15, apenas PC_1 foi analisada, os resultados mostraram que PCA foi capaz de estimar os índices $\%R\&R_m$ dentro do intervalo de confiança. Para os outros cenários, PC_1 foi insuficiente em proporcionar uma explicação razoável da variabilidade das CTQs. Assim, quando outras componentes principais foram analisadas, o índice $\%R\&R_m$ foi estimado fora do intervalo de confiança (exceção para o cenário C11). Resumindo, quando a estrutura de correlação entre as CTQs exigir que outras componentes principais, além de PC_1 , sejam analisadas, o método PCA pode falhar (ver Tabela 3).

Para a análise intermétodo por MANOVA, a Tabela 4 mostra como o índice multivariado é estimado. Verifica-se que este método foi capaz de estimar o índice $\%R\&R_m$ dentro do intervalo de confiança apenas nos cenários C9, C11 e C14. Para estimar este índice foi usada média geométrica $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ de acordo com a quantidade de características da qualidade. Neste estudo de simulação tratamos com 4 características, logo, foram extraídos quatro autovalores das matrizes $\hat{\Sigma}_{SM}$ e $\hat{\Sigma}_T$. Se a relação individual $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ para cada par de autovalores, 1, 2, 3 e 4 em $\hat{\Sigma}_{SM}$ e $\hat{\Sigma}_T$, proporcionar interpretações distintas, o índice $\%R\&R_m$ estimado por MANOVA poderá não representar bem o desempenho do sistema de medição. Isto acontece devido ao fato de que a média geométrica fornece o mesmo grau de importância na análise de cada par de autovalores. No entanto, sabe-se que os primeiros autovalores possuem percentual de explicação do fenômeno avaliado maior que os últimos autovalores. Portanto, confirma-se a necessidade de usar alguma forma de ponderação para o cálculo deste índice.

Tabela 4: índice $\%R\&R_m$ para a análise intermétodo por MANOVA

C	Média	LIC	LSC	$\sqrt{\frac{\lambda_{SM_1}}{\lambda_{T_1}}}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{SM_2}}{\lambda_{T_2}}}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{SM_3}}{\lambda_{T_3}}}$	$\sqrt{\frac{\lambda_{SM_4}}{\lambda_{T_4}}}$	$\left(\prod_{i=1}^4 \sqrt{\frac{\lambda_{SM_i}}{\lambda_{T_i}}}\right)^{1/4}$
C1	40.42	29.69	51.14	49.07 (61.2)	3.29 (27.4)	5.13 (10.5)	16.34 (0.9)	10.78
C2	45.44	34.42	56.47	45.90 (74.6)	9.35 (13.9)	8.32 (7.7)	8.76 (3.9)	13.30
C3	43.18	32.63	53.72	45.97 (80.4)	5.81 (10.8)	7.80 (5.2)	7.87 (3.6)	11.32
C4	41.86	31.70	52.03	43.30 (87.3)	52.70 (8.6)	14.66 (3.1)	18.78 (1.1)	28.15
C5	36.21	29.45	42.97	37.75 (99.8)	51.77 (0.2)	98.97 (0.0)	92.13 (0.0)	64.09
C6	13.48	9.75	17.21	15.94 (53.4)	2.14 (29.0)	2.40 (16.3)	7.43 (1.3)	4.97
C7	22.82	16.95	28.69	27.39 (67.7)	4.44 (18.3)	3.37 (13.9)	24.73 (0.2)	10.04
C8	17.69	11.16	24.21	18.15 (81.2)	3.00 (11.0)	4.45 (4.6)	3.51 (3.2)	5.40
C9	13.50	9.19	17.80	14.50 (90.4)	14.24 (6.9)	10.03 (2.6)	20.27 (0.1)	14.31
C10	18.70	14.80	22.59	16.92 (99.9)	56.75 (0.0)	70.15 (0.0)	73.86 (0.0)	47.23
C11	6.22	3.67	8.77	7.27 (50.4)	2.80 (34.5)	2.21 (34.5)	6.14 (14.2)	4.08
C12	5.54	4.15	6.92	6.23 (71.5)	0.95 (15.5)	0.73 (12.7)	3.80 (0.3)	2.01
C13	7.07	4.37	9.76	7.11 (81.5)	1.34 (10.6)	1.69 (4.6)	1.68 (3.3)	2.28
C14	5.84	4.00	7.69	6.59 (90.8)	7.39 (6.4)	4.10 (2.8)	13.63 (0.1)	7.22
C15	7.95	6.07	9.83	7.78 (100.0)	38.19 (0.0)	98.44 (0.0)	82.04 (0.0)	39.35

Na análise intermétodo para WMANOVA, a Tabela 3 mostrou que o índice $\%R\&R_m$ foi estimado dentro do intervalo de confiança em 14 dos 15 cenários simulados. WMANOVA foi mais robusto por que supriu algumas deficiências dos métodos citados anteriormente. Para PCA, quando PC_1 é insuficiente para explicar toda variabilidade das CTQs, as outras PCs podem proporcionar avaliações para o sistema de medição fora do intervalo de confiança. MANOVA proporciona uma interpretação geral para o sistema de medição, mas a estratégia de usar média geométrica não é a mais satisfatória. Em WMANOVA, a abordagem de ponderação da relação $\sqrt{\lambda_{MS}/\lambda_T}$ pelo percentual de explicação dos autovalores extraídos da matriz variação total do sistema de medição mostrou-se suficiente para corrigir as deficiências citadas anteriormente.

4. Conclusão

Este artigo abordou a análise multivariada do sistema de medição através de estudos de repetitividade e reprodutividade do processo de medição. A principal contribuição foi a proposta

de um método alternativo para avaliar sistemas de medição considerando uma abordagem de análise multivariada ponderada de variância. Dados simulados foram gerados com sistemas de medição inaceitável, marginal e aceitável e diversas estruturas de correlação entre as CTQs para comparar a eficiência dos métodos multivariados. Com base na análise dos resultados apresentados na seção 3 foram obtidas as seguintes conclusões:

- O método PCA pode falhar quando a estrutura de correlação entre as CTQs não é suficientemente alta e, além de PC_1 , outras PCs deverem ser analisadas;
- O método MANOVA é capaz de apresentar uma única classificação para o sistema de medição sem perda de informação. Contudo, o tratamento utilizado para o cálculo dos índices de avaliação do sistema de medição pode não ser o mais adequado. A aplicação de média geométrica para estimar o índice $\%R\&R_m$ não determina maior importância para os autovalores mais significativos extraídos das matrizes $\hat{\Sigma}_{SM}$ e $\hat{\Sigma}_T$.
- A análise estatística dos dados simulados mostrou que WMANOVA foi mais robusto que os outros métodos multivariados. WMANOVA foi capaz de superar algumas deficiências dos outros métodos como: providenciar uma avaliação única para todas CTQs do estudo GR&R multivariado; estimar o índice $\%R\&R_m$ dentro do intervalo de confiança mesmo nos cenários em que a estrutura de correlação entre as CTQs era considerada muito baixa; usar uma estratégia que garante maior importância para os autovalores mais significativos ao estimar o índice $\%R\&R_m$.

5. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à FAPEMIG, CAPES e CNPq pelo apoio dado nesta pesquisa.

Referências

- AIAG.** *Measurement Systems Analysis: Reference Manual*, fourth ed. Automotive Industry Action Group, Detroit, MI, 2010.
- Al-Refaie, A., & Bata, N.** (2010), Evaluating measurement and process capabilities by GR&R with four quality measures. *Measurement*, 43, 842-851.
- Burdick, R.K., Borrer, C.M., & Montgomery, D.C.** (2003), A review of methods for measurement systems capability analysis. *Journal of Quality Technology*, 35, 342-354.
- Erdmann, T.P., Does, R.J.M.M., Bisgaard, S.** (2010), Quality quandaries: a gage R&R study in a hospital, *Quality Engineering*, Vol. 22, pp. 46-53.
- He, S.G., Wang, G.A., & Cook, D.F.** (2011), Multivariate measurement system analysis in multisite testing: An online technique using principal component analysis. *Expert Systems with Applications* 38, 14602-14608.
- Kaija, K.; Pekkanen, V.; Mäntysalo, M.; Koskinen, S.; Niittynen, J.; Halonen, E.; Mansikkamäki, P.** (2010), Inkjetting dielectric layer for electronic applications, *Microelectronic Engineering*, v.87, p.1984-1991.
- Li, M.H.C., & Al-Refaie, A.** (2008), Improving wooden parts' quality by adopting DMAIC procedure. *Quality and Reliability Engineering International* 24, 351-360.
- Majeske, K.D.** (2008), Approval criteria for multivariate measurement systems. *Journal of Quality Technology* 40, 140-154.
- Senol, S.** (2004), Measurement system analysis using designed experiments with minimum α - β Risks and n. *Measurement* 36, 131-141.
- Wang, F.K., & Chien, T.W.** (2010), Process-oriented basis representation for a multivariate gauge study. *Computers and Industrial Engineering* 58, 143-150.
- Wang, F.K., & Yang, C.W.** (2007), Applying principal component analysis to a GR&R study. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineering* 24, 182-189.
- Woodall, W.H., & Borrer, C.M.** (2008), Some relationships between gage R&R criteria. *Quality and Reliability Engineering International* 24, 99-106.