

ESTIMACIÓN DE MÚLTIPLES PUNTOS DE CAMBIO EN SERIES DE TIEMPO CON DISTRIBUCIÓN NORMAL UTILIZANDO UN ALGORITMO HEURÍSTICO DE CONSTRUCCIÓN

Jorge Arturo Garza Venegas,
Alvaro Eduardo Cordero Franco,
Víctor Gustavo Tercero Gómez y
José Fernando Camacho Vallejo

Universidad Autónoma de Nuevo León - Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México

RESUMEN

En esta investigación se analiza una serie de tiempo que sigue una distribución normal en la que se sospecha que ocurren múltiples cambios tanto en su media como en su varianza o en ambos parámetros. El objetivo es estimar en qué puntos ocurrieron dichos cambios; así como los parámetros de la distribución en cada momento. Para esto se aplica el método de máxima verosimilitud obteniendo una función entera a optimizar. Debido al gran número de iteraciones que se requieren para la búsqueda exhaustiva de la solución, se aplicó un algoritmo heurístico de construcción para aproximar la solución.

PALABRAS CLAVE. Análisis de punto de cambio, máxima verosimilitud, algoritmo heurístico.

Área principal: Estadística

ABSTRACT

In this research we estimate the change points in a time series normally distributed with multiple changes in both parameters, mean and variance, and also estimate the parameters for each heterogeneous section of the time series; considering three cases: changes in mean, changes in variance and change in both parameters. These estimators are found using the maximum likelihood methodology and solving the objective function in the optimization problem using a constructive heuristic. The heuristic is presented and one example is solved using this heuristic.

KEYWORDS. Change point analysis, maximum likelihood estimator, heuristic algorithm.

Main area : Statistics

1. Introducción

El análisis de punto de cambio es una metodología que busca la estimación de los puntos en donde ocurrieron cambios en series de tiempo. Esto complementa el objetivo de los cuadros de control estadístico, los cuales son herramientas estadísticas ampliamente utilizadas para supervisar procesos y analizar si estos están en control estadístico. Estas gráficas ayudan a detectar causas asignables de variación del proceso, y si existen observaciones fuera de los límites de control entonces se concluye que el proceso está fuera de control. A pesar de que estas herramientas son efectivas en la detección de un proceso

fuera de control no son tan efectivas para detectar el momento inicial en el que ocurrió un cambio sostenido en el proceso; lo cual es necesario para encontrar las causas especiales por las que ocurrió dicho cambio y posteriormente hacer los ajustes necesarios para regresarlo a un control estadístico. La metodología del análisis de punto de cambio estima el momento en el que un proceso se salió de control estadístico. Consiste en el análisis de una serie de tiempo con el objetivo de determinar un punto en el cuál el comportamiento de la serie es diferente antes y después de dicho punto.

Las primeras investigaciones sobre el análisis de punto de cambio se desarrollaron desde el punto de vista Bayesiano con Girshick and Rubin (1952) quienes propusieron el problema de la detección del punto de cambio. Page (1954, 1955, 1957) desarrolló su técnica de sumas acumuladas CUSUM basada en la teoría del control estadístico de procesos para detectar cambios sostenidos en series de tiempo.

Desde el punto de vista paramétrico Hinkley (1970) aplicó el método de máxima verosimilitud (MLE) para la detección del punto de cambio en una serie de tiempo con distribución normal con cambio en la media en la Fase II del control estadístico de procesos, esto es con los parámetros iniciales conocidos. Siguiendo con esta metodología Samuel et al. (1998) propusieron la integración de estimadores de punto de cambio y gráficas de control, donde el estimador es usado después de que una gráfica de control detecta un cambio para procesos normales. Samuel et al. (1998) propusieron la integración del estimador de máxima verosimilitud para el punto de cambio con las gráficas R y S. Nedurmaran, Pignatiello and Calvin (2002) derivaron un MLE para el punto de cambio en la media en un proceso multivariado con distribución normal multivariada.

Recientemente Hawkins y Zamba (2005) aplicaron la metodología de la razón de verosimilitud generalizada (GLR) para la detección de cambios en la varianza en un proceso y la estimación de dicho cambio mediante prueba de Bartlett en la Fase I del control estadístico. Siguiendo con esta metodología y agregando una ventana móvil, Reynolds and Lou (2010) desarrollaron un cuadro de control GLR para detectar pequeños cambios en la media de un proceso normal y lo compararon con las gráficas de Shewhart y las gráficas CUSUM. De igual forma usando la metodología del GLR Cordero et al. (2011) y Tercero et al. (2011) usaron la metodología del GLR para modelos normales con cambios en la varianza usando la prueba F y la prueba Ji cuadrada para fases I y II respectivamente. Para un estudio detallado de las contribuciones de diversos autores en el enfoque paramétrico del análisis de punto de cambio vea la revisión de literatura de Amiri and Allahyari (2010).

Pocos autores han trabajado con problemas en donde se busca la detección de varios puntos de cambio. Jann (2000) desarrolló un análisis de múltiples puntos de cambio para cambios en la media utilizando un algoritmo genético. Sullivan (2002) desarrolló un algoritmo de agrupamientos para cambios múltiples en la media. En este artículo se presenta los estimadores de máxima verosimilitud para un proceso normal con cambios múltiples en sus diferentes parámetros. Además se presenta un algoritmo heurístico constructivo que nos ayuda a encontrar una solución del problema de optimización discreta del cual se obtienen los estimadores antes mencionados.

2. Modelo

Suponga una serie de tiempo que se compone de observaciones normalmente distribuidas en el que ocurren m cambios sostenidos en alguno de sus parámetros. Se tienen una serie de T observaciones (en donde cada observación proviene de un grupo de observaciones de tamaño n). Este modelo se expresa de la siguiente forma:

$$x_{i,j} \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma_1) & \text{si } 1 \leq i \leq \tau_1 \\ N(\mu_2, \sigma_2) & \text{si } \tau_1 \leq i \leq \tau_2 \\ N(\mu_3, \sigma_3) & \text{si } \tau_2 \leq i \leq \tau_3 \\ \vdots & \\ N(\mu_m, \sigma_m) & \text{si } \tau_{m-1} \leq i \leq \tau_m \\ N(\mu_{m+1}, \sigma_{m+1}) & \text{si } \tau_m \leq i \leq T \end{cases} \quad (1)$$

Siguiendo la teoría utilizada por Hinkley (1970), encontraremos los estimadores de máxima verosimilitud de los múltiples puntos de cambio y los estimadores de los parámetros desconocidos en los siguientes casos:

- En la serie de tiempo ocurren m cambios en la media, la varianza se mantiene constante.
 $\mu_i \neq \mu_{i+1}; \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{m+1} = \sigma_p; \forall i = 1, 2, \dots, m.$
- En la serie de tiempo ocurren m cambios en la varianza, manteniéndose el parámetro de la media constante.
- En la series de tiempo ocurren m cambios en ambos parámetros, la media y la varianza, este es el caso más general pues no se asume que un parámetro se mantenga constante.

2.1. Estimadores para Cambios en la Media

Siguiendo el método de máxima verosimilitud encontraremos los valores de las distintas medias y los puntos de cambio $\mu_i, \tau_i;$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y la varianza común σ_p que sean más probables de acuerdo a nuestra serie de tiempo. Para esto se toma la función de máxima verosimilitud siguiente:

$$L = \prod_{i=1}^{\tau_1} \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu_1; \sigma_p) \cdot \dots \cdot \prod_{i=\tau_m+1}^T \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu_{m+1}; \sigma_p) \quad (2)$$

y después de aplicar el logaritmo natural para encontrar los máximos, tenemos que:

$$\ln L = -\frac{nT}{2} (\ln(2\pi) + \ln(\sigma_p^2)) - \frac{1}{2\sigma_p^2} [\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_1)^2 + \dots + \sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_{m+1})^2] \quad (3)$$

Al derivar (3) respecto a $\mu_i, i = 1, 2, \dots, m$ y respecto a σ_p obtenemos:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n\tau_1} \quad (4)$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n(\tau_j - \tau_{j-1})} \quad \text{si } 2 \leq j \leq m \quad (5)$$

$$\hat{\mu}_{m+1} = \frac{\sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n(T - \tau_m)} \quad (6)$$

$$\widehat{\sigma_p^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_1)^2 + \dots + \sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_{m+1})^2}{nT} \quad (7)$$

Al sustituir (4), (5), (6) y (7) en la ecuación (3) encontramos los valores de τ_i que maximizan (3), esto es los estimadores de los puntos de cambio:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \ln(\widehat{\sigma_p^2}) \quad (8)$$

ó bien

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \widehat{\sigma_p^2} \quad (9)$$

2.2. Estimadores para Cambios en la Varianza

De la misma manera que en la sección anterior estimaremos usando máxima verosimilitud los valores de la media común $\hat{\mu}$, las varianzas en cada sección de la serie de tiempo σ_i y los puntos de cambio τ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Obteniendo la función de verosimilitud:

$$L = \prod_{i=1}^{\tau_1} \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu; \sigma_{m+1}) \dots \prod_{i=\tau_m+1}^T \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu; \sigma_{m+1}) \quad (10)$$

y luego aplicando la función logaritmo natural

$$\ln L = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) + \left[-\frac{n\tau_1}{2} \ln(\sigma_1^2) - \frac{n(\tau_2 - \tau_1)}{2} \ln(\sigma_2^2) - \dots - \frac{n(T - \tau_m)}{2} \ln(\sigma_{m+1}^2) \right] + \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 - \dots - \frac{1}{2\sigma_{m+1}^2} \sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 \right] \quad (11)$$

Aplicando las condiciones de primer orden para encontrar los estimadores obtenemos:

$$\widehat{\sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2}{n\tau_1} \quad (12)$$

$$\widehat{\sigma_j^2} = \frac{\sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2}{n(\tau_j - \tau_{j-1})} \quad \text{si } 2 \leq j \leq m \quad (13)$$

$$\widehat{\sigma_{m+1}^2} = \frac{\sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2}{n(T - \tau_m)} \quad (14)$$

y $\hat{\mu}$ se obtiene al despejar μ de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=\tau_1+1}^{\tau_2} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{\sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)}{\sigma_{m+1}^2} = 0 \quad (15)$$

Se puede observar que (15) resulta un polinomio de grado impar $(2m+1)$, el cual tiene al menos una raíz real. Si más de una son reales, se utilizan dichos valores y (12), (13) y (14) en la ecuación (11) para calcular los estimadores de punto de cambio:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \{ \ln(\widehat{\sigma_1^{\tau_1}} \cdot \widehat{\sigma_2^{\tau_2 - \tau_1}} \cdot \widehat{\sigma_3^{\tau_3 - \tau_2}} \cdot \dots \cdot \widehat{\sigma_{m+1}^{T - \tau_m}}) \} \quad (16)$$

el cual se puede reescribir como:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \{ (\tau_1 \ln \widehat{\sigma_1}) + (\tau_2 - \tau_1) \ln \widehat{\sigma_2} + \dots + (T - \tau_m) \ln \widehat{\sigma_{m+1}} \} \quad (17)$$

o también como:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} (\widehat{\sigma_1^{\tau_1}} \cdot \widehat{\sigma_2^{\tau_2 - \tau_1}} \cdot \widehat{\sigma_3^{\tau_3 - \tau_2}} \cdot \dots \cdot \widehat{\sigma_{m+1}^{T - \tau_m}}) \quad (18)$$

2.3. Estimadores para Cambios en la Media y Varianza

En esta Sección se presenta el caso más general en el que ocurrieron cambios en ambos parámetros. Con el método de máxima verosimilitud se encuentran los estimadores de las medias y las varianzas de cada región, μ_i , σ_i y los puntos de cambio τ_i , $i = 1, 2, \dots, m$. La función de máxima verosimilitud es:

$$L = \prod_{i=1}^{\tau_1} \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu_1; \sigma_1) \cdot \dots \cdot \prod_{i=\tau_m+1}^T \prod_{j=1}^n f(x_{ij}; \mu_{m+1}; \sigma_{m+1}) \quad (19)$$

cuyo logaritmo natural de es:

$$\ln L = -\frac{nT}{2} \ln(2\pi) + \left[-\frac{nT}{2} \ln(\sigma_1^2) - \frac{n(\tau_2 - \tau_1)}{2} \ln(\sigma_2^2) - \dots - \frac{n(T - \tau_m)}{2} \ln(\sigma_{m+1}^2) \right] + \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_1)^2 \dots - \frac{1}{2\sigma_{m+1}^2} \sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_{m+1})^2 \right] \quad (20)$$

Aplicando las condiciones de primer orden para encontrar los máximos tenemos los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n\tau_1} \quad (21)$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n(\tau_j - \tau_{j-1})} \quad \text{si } 2 \leq j \leq m \quad (22)$$

$$\hat{\mu}_{m+1} = \frac{\sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n(T - \tau_m)} \quad (23)$$

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_1)^2}{n\tau_1} \quad (24)$$

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_j)^2}{n(\tau_j - \tau_{j-1})} \quad (25)$$

$$\widehat{\sigma}_{m+1}^2 = \frac{\sum_{i=\tau_m+1}^T \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu_{m+1})^2}{n(T - \tau_m)} \quad (26)$$

Sustituyendo (21) - (26) en la ecuación (20) encontramos los estimadores de los puntos de cambio:

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \{ \ln(\widehat{\sigma}_1^{\tau_1} \cdot \widehat{\sigma}_2^{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \widehat{\sigma}_3^{(\tau_3 - \tau_2)} \cdot \dots \cdot \widehat{\sigma}_{m+1}^{(T - \tau_m)}) \} \quad (27)$$

que se puede reescribir como

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \{ (\tau_1 \ln \widehat{\sigma}_1) + (\tau_2 - \tau_1) \ln \widehat{\sigma}_2 + \dots + (T - \tau_m) \ln \widehat{\sigma}_{m+1} \} \quad (28)$$

o también como

$$\hat{\tau} = \arg \min_{\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}} \left(\widehat{\sigma}_1^{\tau_1} \cdot \widehat{\sigma}_2^{(\tau_2 - \tau_1)} \cdot \widehat{\sigma}_3^{(\tau_3 - \tau_2)} \cdot \dots \cdot \widehat{\sigma}_{m+1}^{(T - \tau_m)} \right) \quad (29)$$

3. Heurístico y experimentación

Encontrar los máximos en las funciones (9), (18) o (29) implica resolver un problema de optimización entera con una gran cantidad de variables lo que nos lleva a que su solución tomará una gran cantidad de tiempo, por este motivo desarrollamos un heurístico de construcción para encontrar una solución inicial de estos estimadores, cuyo algoritmo es el siguiente:

1. Nombre al segundo dato como T_0 y al dato T-2 como T_I , inicialice $i=1$. (Esto es para no tener grupos de tamaño menor a 2, pues requerimos la varianza dentro de cada subgrupo)
2. Busque el punto de cambio t entre todos los subgrupos $\{T_{i-1}, T_i\}$, para todo i ; buscando optimizar la función objetivo de acuerdo al caso analizado (caso 1 (9), caso 2 (18) o caso 3 (29)), considerando todos los T_i como puntos de cambio ya encontrados.
3. Ordene los puntos anteriores T_i y t y vuelva a nombrarlos de menor a mayor desde T_0 hasta T_{i+1} . Haga $i=i+1$.
4. Regrese al paso 2 hasta que $i=m$

Gráficamente se puede explicar de la siguiente manera: Se supone $m=1$ (un solo punto de cambio) y se busca el óptimo de la ecuación de punto de cambio en el espacio factible inicial

(separando la muestra en dos subconjuntos con al menos 2 datos uno de ellos), moviendo el valor τ desde $T_0 = 2$ hasta $T_1 = T - 2$ hasta que se encuentre el máximo de la función objetivo. Esto equivale a buscar un punto t donde los subgrupos sean lo más diferentes entre sí. Vea Figura 1

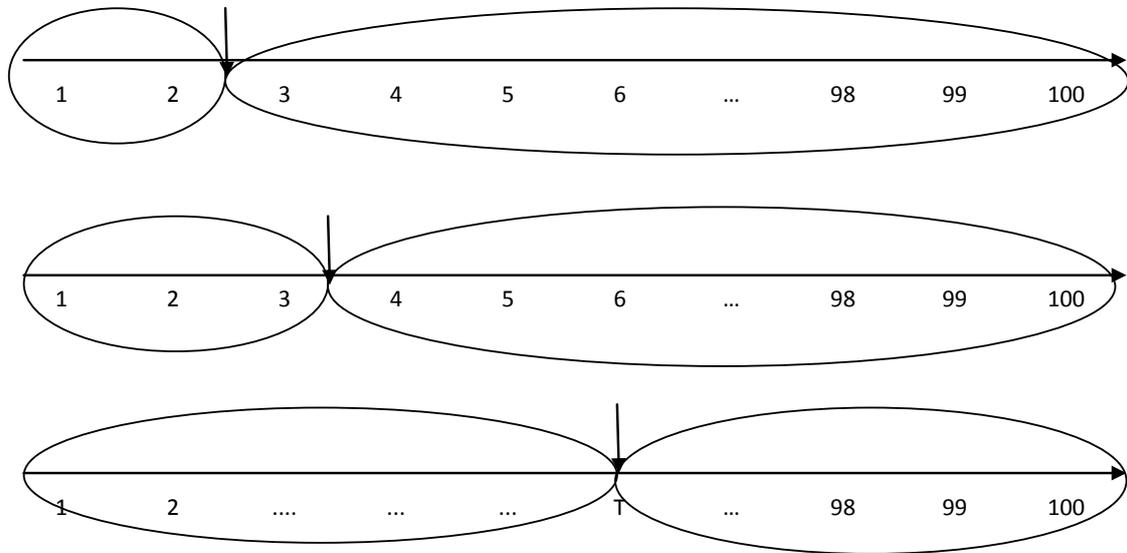


Figura 1. Etapa del algoritmo con $i=1$

Ahora se ordenan los puntos de cambio T_0, T_1 y t , nombrándolos de menor a mayor teniendo ahora los puntos de cambio T_0, T_1 y T_2 , los cuáles se agrupan por pares para obtener los dos subgrupos $\{T_0, T_1\}$ y $\{T_1, T_2\}$. Ahora se busca el siguiente punto de cambio dentro de cada uno de estos subgrupos como se aprecia en la figura 2 de manera que se minimice la función objetivo para dos cambios haciendo los subgrupos lo más homogéneos entre sí, nombrando al siguiente punto de cambio t .

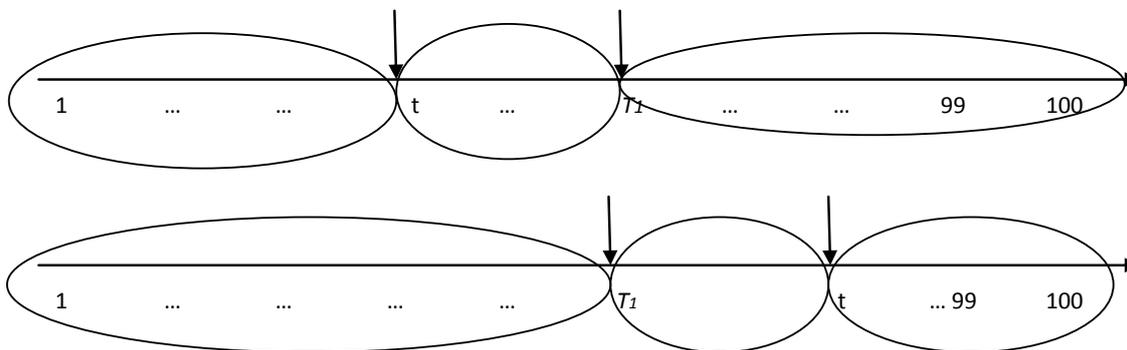


Figura 2. Etapa del algoritmo con $i=2$

Continuamos de la misma manera hasta tener el número de cambios buscados inicialmente.

Como ejemplo se toma el siguiente escenario con números aleatorios que siguen la siguiente distribución con 2 puntos de cambio y subgrupos de tamaño 1 (ver Figura 3):

$$x_{i,j} \sim \begin{cases} N(0,1) & \text{si } 1 \leq i \leq 200 \\ N(1,1) & \text{si } 201 \leq i \leq 400 \\ N(0,1) & \text{si } 401 \leq i \leq 600 \end{cases} \quad (30)$$

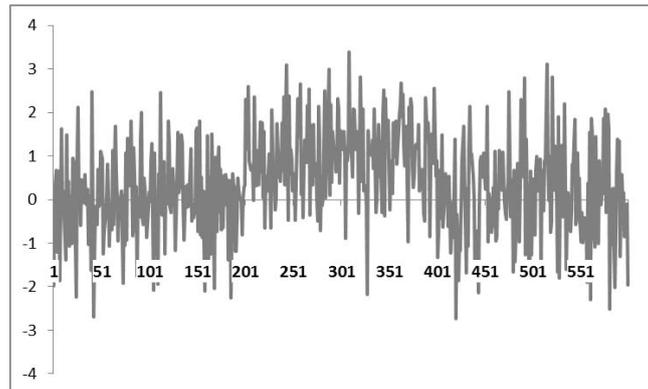


Figura 3. Ejemplo de dos puntos de cambio en serie normal con cambios en las medias al punto 200 y al punto 400

Los datos de esta serie de tiempo aparecen en el Apéndice. Se resolvió dicho ejemplo mediante el método exhaustivo y el método aquí propuesto y se obtuvieron los siguientes resultados que aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1. Comparación de estimador de máxima verosimilitud (MLE) y constructivo para una serie de tiempo con dos cambios.

Estimador	Tao 1 = 200	Tao 2 = 400	Tiempo de ejecución (em secs.)	Función objetivo
MLE	200	400	25.7969	0.9860
Constructivo	199	400	0.1659	0.9866

Se observan resultados muy similares en ambos métodos, sin embargo se observa una enorme reducción de tiempo de ejecución del método constructivo. Para problemas con más de dos cambios el tiempo de ejecución del método de máxima verosimilitud lo hace no ser una opción para estimar los puntos de cambio. Mejorar la precisión del estimador encontrado por el método propuesto es muy importante, por lo que se buscará mejorar la solución encontrada mediante algoritmos de búsqueda local y hacer comparaciones con otro tipo de algoritmos.

4. Conclusiones

En esta investigación se desarrollaron los estimadores de punto de cambio múltiples usando la metodología de máxima verosimilitud para series de tiempo que siguen distribución normal con cambios en cualquiera de sus parámetros. Se puede observar que para los tres casos analizados la función de la cual se obtienen los estimadores de punto de cambio es la multiplicación de las estimaciones de las varianzas elevadas al tamaño de la cantidad de datos de donde se obtuvo dicha varianza (esto es en la parte de la serie de tiempo en donde no haya cambiado la varianza).

Además se puede apreciar que la manera de estimar los puntos de cambio requiere de gran trabajo computacional por lo que se muestra un procedimiento de construcción para encontrar una solución cercana al óptimo. Se presenta un ejemplo para el caso 1 (3 cambios en la media) observando resultados muy similares al obtenido por búsqueda exhaustiva.

Como trabajo futuro se realizará una simulación para analizar el sesgo y la varianza de estos estimadores para cada uno de los casos mostrados en la Sección 2. Además se mejorará la solución inicial encontrada a través del algoritmo de construcción utilizando un heurístico que analice las soluciones alrededor de dicha solución inicial; y finalmente se hará una comparación de este estimador con el exhaustivo y con uno encontrado mediante un algoritmo evolutivo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por la Secretaria de Educación Pública (SEP) mediante el Programa de Mejoramiento de Profesorado con clave Promep/103.5/11/4330 y a la

Universidad Autónoma de Nuevo León mediante el Programa de Apoyo para la Investigación Científica y Tecnológica con Clave CE-409-10.

Referencias

- Amiri, A. and Allahyari, S. (2011)** Change Point Estimation Methods for Control Chart Postsignal Diagnostic: A literature Review, *Quality and Reliability Engineering International*.
- Cordero, A., Tercero, V., Camacho, J. and González, R. (2012)** Generalized Control Chart for Variance Based on the P-Value Function, *Industrial Engineering Research Conference Proceedings Orlando, Florida (por aparecer)*
- Girshick, M. A. and Rubin, H. (1952)** A Bayes approach to a quality control model, *The Annals of mathematical statistics*, pp. 114–125.
- Hawkins, D. M. and Zamba, K. D. (2005)** A change-point model for a shift in variance, *Journal of Quality Technology*, vol. 37, no. 1, pp. 21–31.
- Hinkley, D. V. (1970)** Inference About the Change-Point in a Sequence of Random Variables, *Biometrika*, vol. 57, no. 1, pp. 1-17.
- Jann, A. (2000)** Multiple change point detection with genetic algorithm. *Soft computing* 2000; 4(2):68–75.
- Nedumaran, G., Pignatiello, J. J. and Calvin, J. A. (2002)** Identifying the Time of a Step-Change with χ^2 Control Charts, *QUALITY CONTROL AND APPLIED STATISTICS*, vol. 47, no. 2, pp. 125–126.
- Page, E. S. (1955)** A test for a change in a parameter occurring at an unknown point, *Biometrika*, vol. 42, no. 3-4, pp. 523-527, 1955.
- REYNOLDS, M. R. and JIANYING, L.(2010)** An evaluation of a GLR control chart for monitoring the process mean, *Journal of quality technology*, vol. 42, no. 3, pp. 287–310.
- Samuel, T. R., Pignatiello, J. J. and Calvin, J. A. (1998)** Identifying the Time of a Step Change with Control Charts, *Quality Engineering*, vol. 10, no. 3, p. 521.
- Samuel, T. R., Pignatiello, J. J. and Calvin, J. A. (1998)**, Identifying the Time of a Step Change in a Normal Process Variance, *Quality Engineering*, vol. 10, no. 3, p. 529.
- Sullivan JH. (2002)** Detection of multiple change points from clustering individual observations. *Journal of Quality Technology*; 34(4):371–383.
- Tercero, V., Cordero, A., Ramírez, J. and Martínez, I. (2012)** Change-Point Estimation and Control Chart for Variance Based on the P-Value Function of the F statistic, *Industrial Engineering Research Conference Proceedings; Orlando, Florida(por aparecer)*.

Apendice

-1.9735	0.9235	-0.0489	-0.7383	2.3032	0.4676	1.4926	-0.2314	-1.3360	0.2441	0.4725	-0.9705
0.0832	-1.2386	0.8758	1.1372	2.2466	0.5929	1.1503	0.7943	-0.7742	0.5624	0.0434	-0.2937
0.6821	-0.7394	1.2931	1.8128	1.1637	-0.4786	1.5602	0.8972	0.6799	2.1431	-0.8061	-0.9983
-1.2038	-0.5134	-0.4342	-0.8146	2.5913	1.2304	1.1727	0.1306	-0.4358	-0.9762	0.6928	-0.4116
-0.3698	-0.2835	-2.0837	0.5178	0.8908	2.3181	-0.8976	1.7573	0.2536	0.1449	0.9924	-0.7340
0.6574	0.1028	1.0765	-0.8803	0.6772	1.5665	1.1706	1.4206	1.4838	-0.0323	0.1994	-0.4473
-1.8547	0.8179	-0.2154	0.2047	0.7686	1.4652	0.8973	1.0000	-0.6289	-0.7605	0.4930	-1.8937
-0.1023	0.0599	-0.0921	-2.1036	0.7110	2.6639	1.1321	1.8109	-0.2609	-0.5015	0.9221	0.3839
1.6293	-1.0749	-1.9415	0.1692	-0.0210	0.1133	3.3840	0.8148	0.5908	0.2871	-1.6573	-0.9262
0.0484	-0.1079	0.5949	-1.1757	2.3508	0.8053	1.5463	1.2328	0.1371	-0.5879	0.6814	1.5386
0.1924	-0.6923	0.1771	1.4625	0.7739	-0.4235	1.5204	1.9663	0.2948	1.1044	0.2298	-2.3064
-0.4389	1.1349	2.4639	-1.6058	0.3174	0.7100	0.5128	2.1848	-0.6239	-0.9601	-0.2506	1.8549
-1.3891	-0.5800	-0.2845	-0.4305	1.1345	1.3631	2.0792	2.6704	0.5447	-0.8495	0.8849	1.4620
1.4775	0.7387	-0.3547	0.5150	0.7422	0.8463	2.0650	1.8936	-0.4071	0.0731	0.8894	-0.8402
-0.6425	1.6806	0.6398	-1.2461	0.3297	2.1603	1.4589	2.4153	-1.2336	-0.2100	3.1116	-1.0946
0.4131	0.6217	0.8719	1.5099	1.7750	1.0452	1.1503	1.2528	-0.7098	1.1285	0.8306	1.4455
-1.0675	-0.0072	-1.2457	-0.5252	0.6434	2.5322	1.4885	0.7760	-0.0693	0.3572	-0.0219	-0.6235
0.0847	-0.9489	0.2461	-2.0378	1.7666	-0.3556	1.5569	1.5901	-0.8811	0.2240	0.9940	0.0540
-0.1944	0.0015	-0.0900	0.9715	0.0301	1.6943	-0.3098	1.6923	1.3964	1.0899	-0.7529	-1.0037
-1.0169	-0.0844	1.8012	-0.4616	1.5591	0.6770	1.0396	-0.9808	-2.7300	0.4481	-0.5134	0.8933
0.9606	0.1891	1.2629	-0.7420	-0.6453	0.3388	2.8096	2.1257	-0.3460	-0.0600	2.8075	0.1983
0.7503	-0.9065	-0.1722	0.8601	0.3660	1.7242	0.4207	1.6634	-0.9255	-0.3258	0.9253	-0.1217
-0.9771	-1.9130	-0.3036	1.2108	0.5281	0.5502	2.0876	2.3159	-1.8549	-0.4585	0.2154	0.3719
-2.2311	0.1072	0.6463	-0.2836	0.1972	0.8337	0.2031	2.1423	-1.0383	0.1083	1.2193	1.8572
0.9960	-1.0545	0.7084	0.6901	1.0517	-0.0407	0.2078	0.7461	-1.1612	0.3555	0.0649	0.1426
2.1201	1.0749	0.3233	-0.6904	0.3950	-0.4935	0.3174	0.2760	-0.1562	2.4677	-1.6666	2.0750
0.0003	-0.9217	0.0781	-0.6290	-0.6561	2.1436	-0.1567	0.5578	0.9391	-0.3868	1.9099	-0.3055
0.2255	1.4162	-1.1730	0.5565	2.0618	1.3553	-2.1866	1.1570	1.6810	0.4620	-1.7939	0.5522
-0.5925	0.8970	0.4498	-0.1201	1.2274	-0.7183	1.5874	1.2635	0.2603	0.4333	0.0602	1.9601
0.4654	0.3236	1.5447	0.5833	0.4149	0.4372	1.0587	1.1634	-0.5271	-1.6706	0.2446	1.6010
-0.0799	1.7969	0.1553	0.2785	0.4180	-0.1350	1.1717	1.7252	-1.6866	0.6651	1.2574	-2.5182
0.1189	0.6670	0.3040	0.4630	-0.2477	0.0185	1.0106	0.1986	0.2515	-1.4298	-0.4040	0.2338
0.5776	-0.8411	1.1453	-1.3949	0.0313	2.4949	1.3726	0.6092	-1.0676	-0.7986	-0.1434	-1.0365
-0.0921	1.1976	1.4819	0.0613	1.7434	0.0376	0.7225	0.2702	1.2116	0.0365	2.1907	0.2560
-0.1208	0.5754	1.2786	0.4432	0.5145	0.7726	2.0817	0.6994	2.1409	0.8335	-1.6038	-1.1695
0.2459	-0.7232	-0.0804	-2.2655	0.9534	1.3995	0.8400	0.3425	0.8890	-0.9754	-0.4412	-2.0271
-1.0297	0.2921	-0.9355	0.5966	0.4124	2.1522	-0.2965	-0.3364	1.0557	0.4249	0.1575	-0.7206
0.0779	-1.7578	0.3052	0.3367	0.9266	2.9875	-0.0097	-0.5019	0.5113	2.2983	-0.2492	0.6551
-0.0412	0.0413	-0.1863	0.2740	1.7575	0.0907	0.9506	2.3410	-0.0055	1.8920	-0.6706	1.3812
-1.6327	-0.3914	0.3445	-1.1900	0.6735	2.1722	1.7238	1.3995	-1.8386	1.5482	-0.7241	0.5831
2.4774	1.3884	-0.1492	-1.1827	2.3624	0.3994	0.5439	1.7713	-1.5336	0.5123	-0.2533	1.3476
-2.6911	2.0073	0.2258	-0.4139	0.3306	1.5615	0.4876	1.2573	-1.0280	2.7962	0.8221	-1.2996
-1.2526	-0.4170	0.5906	0.4950	2.0201	0.9669	-0.2963	-0.8437	-0.7135	-1.2760	0.7673	0.5754
-0.1668	-0.5728	1.1643	0.2077	3.0815	1.1860	1.9472	0.9782	-2.1360	1.3857	1.8407	-0.0472
-0.5744	0.4969	-0.4860	0.0666	-0.4682	0.6417	2.5213	1.5141	-0.0902	0.0429	-0.5663	0.1611
-0.5649	0.2282	-0.0987	-0.0430	2.3680	0.9925	-0.3734	1.3291	0.8891	-1.3669	-0.4502	-0.8589
0.6957	-0.0846	-0.4253	-0.8114	0.5837	2.3090	2.3117	0.8275	0.9901	-1.4260	1.0768	-0.7624
-0.1577	-0.8765	-0.1840	0.0486	1.1552	2.0846	1.3169	2.5509	0.5060	0.6533	-0.0936	-0.1585
-0.0507	-0.5408	1.5884	0.2793	0.9257	0.3754	1.5232	0.5447	1.0719	-1.2767	0.4998	-0.0997
1.1157	0.1748	1.6391	0.3377	0.1890	1.5833	1.8290	0.8983	0.5915	-0.1760	-0.5516	-1.9532