Dimensionamento de Lotes com Múltiplas Plantas: Comparação entre dois modelos

Daniel Henrique Silva
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo (USP)
danielhs@icmc.usp.br

Franklina Maria Bragion Toledo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo (USP)
fran@icmc.usp.br

RESUMO

Diferentes variantes do problema de dimensionamento de lotes vêm sendo modeladas na literatura utilizando a ideia de localização por facilidades. Neste tipo de modelagem, as variáveis de produção relacionadas à quantidade de produtos produzidos são desagregadas. Embora o número de variáveis reais do modelo se torne maior, a qualidade de seu limitante inferior do problema melhora de forma significativa, o que leva a uma resolução mais eficiente do mesmo. Neste trabalho, propomos a modelagem do problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas utilizando esta ideia. Testes computacionais mostraram que a resolução do problema remodelado obtém resultados melhores que o modelo original.

PALAVARAS CHAVE. Dimensionamento de lotes, múltiplas plantas, programação inteira-mista.

Área principal: Otimização Combinatória.

ABSTRACT

Different variants of the lot-sizing problem have been modeled using the facility location idea. In this modeling, the variables related to the amount of products are split. Although the quantity of variables increases, the quality of the lower bound improves significantly, which leads to a more efficient solution of the problem. In this paper the multi-plant lot-sizing problem is modeled using this idea. Although in this variant the increase in the number of production variables of the model is bigger than the others variants mentioned in the literature, the computational experiments show that the solution of the remodeled problem obtained better results than the original model.

KEYWORDS. Lot sizing, multi-plant, mixed-integer programming.

Main area: Combinatory Optimization

1. Introdução

O problema de dimensionamento de lotes consiste basicamente em, dada uma linha de produção com capacidade limitada e demanda conhecida, obter um planejamento de quais produtos devem ser fabricados, em qual momento, e em que quantidade, dentro de um horizonte de produção finito, com o objetivo de determinar um plano de produção que atenda às características especificadas, com o menor custo possível.

É possível subdividir o estudo dos problemas de dimensionamento de lotes em categorias, de acordo com as características próprias de cada classe de problemas. Os problemas podem tratar de um único produto, ou de diversos produtos distintos. O problema pode tratar uma única linha de produção, ou várias linhas de produção paralelas, ou ainda linhas de produção dependentes entre si. Também, pode haver ou não relações de dependência na ordem de produção dos produtos. Esse problema é bastante estudado na literatura, e boas revisões sobre o assunto são encontradas em (Drexl & Kimms, 1997), (Karimi, Ghiomi, & Wilson, 2003), (Brahimi et al., 2006), (Jans & Degraeve, 2008) e (Buschkühl, et al., 2010).

Neste artigo em específico, vamos considerar o problema de dimensionamento de lotes de múltiplos produtos, com múltiplas plantas, múltiplos períodos de produção e capacidade limitada. Nesta classe de problemas, considera-se a existência de diferentes plantas, capazes de produzir diferentes produtos. Além disso, é permitido o transporte de produtos entre as plantas.

Krarup & Bilde (1977) propuseram um modelo baseado na ideia de localização de facilidades para tratar o problema de dimensionamento de lotes. Esta modelagem possui como grande vantagem o fato de levar a limitantes inferiores de boa qualidade para o problema. No entanto, o número de variáveis de produção do problema é aumentado.

O objetivo central deste trabalho é propor uma adaptação do modelo proposto por Sambasivan & Yahya, (2005), utilizando a ideia baseada em localização de facilidades de Krarup & Bilde (1977), e analisar a qualidade deste modelo novo em comparação com o modelo original.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, é detalhado o problema estudado e o modelo de Sambasivan & Yahya, (2005). Nesta mesma seção também é proposto um novo modelo para o problema. Na Seção 3, testes computacionais são apresentados e analisados. Finalmente, na Seção 4, conclusões e considerações para trabalhos futuros são apresentadas.

2. Modelo Matemático

Neste artigo, é abordado o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas, múltiplos produtos e múltiplos períodos. O ambiente de produção tem capacidade limitada e a fabricação de um produto requer a preparação da máquina (*setup*), a qual está associada a um custo de preparação. As plantas têm localizações distintas e podem produzir diferentes produtos.

Além disso, a carteira de clientes é conhecida, e cada cliente compra seus produtos de uma única planta, pré-determinada. O preço pago pelo cliente é sempre o mesmo, independente dos produtos adquiridos terem sido fabricados na planta de onde se compra ou não. Os custos de transporte dos produtos entre as plantas, caso este transporte ocorra, fica a cargo da empresa.

O objetivo é encontrar um plano de produção que minimize a soma dos custos de produção, de preparação, de estoque e de transporte entre as plantas em um horizonte de planejamento conhecido. Como proposto por Sambasivan & Yahya, (2005), este problema pode ser descrito pelo modelo abaixo, de acordo com os seguintes parâmetros, índices e variáveis:

<u>Parâmetros:</u>

n: Número de produtos distintos produzidos;
m : Número de plantas existentes;
T : Número de períodos do horizonte de planejamento;
d_{ijt} : Demanda do produto i na planta j no período t;
P_{jt} : Capacidade de produção da planta j no período t;

b_{ij} : Tempo de processamento do produto i na planta j;
s_{ij} : Tempo de preparação do produto i na planta j;
V_{ij} : Custo de preparação para a produção do produto i na planta j;
M_{ij} : Custo unitário de produção do produto i na planta j;
r_{ijk} : Custo unitário de transporte do produto i na planta j para a planta k;
H_{ijt} : Custo unitário de estoque do produto i na planta j ao final do período t.

Índices:

i : Índice relativo aos produtos. i = 1, …, n;
j,k : Índices relativos às plantas. j,k = 1, …, m;
t : Índice relativo aos períodos. t = 1, …, T.

Variáveis de decisão:

x_{ijt} : Quantidade do produto i produzida na planta j do período t.
I_{ijt} : Quantidade do produto i estocada na planta j ao final do período t.
w_{ijkt} : Quantidade do produto i transportada da planta j para a planta k no período t.
z_{ijt} : Variável binária, de valor igual a um caso o produto i seja produzido na planta j no período t, e zero caso contrário.

$$Min \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ij}x_{ijt} + H_{ijt}I_{ijt} + V_{ij}z_{ijt} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} r_{ijk}w_{ijkt} \right) \tag{1}$$

$s.a.$

$$I_{ijt} = I_{ij(t-1)} + x_{ijt} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} w_{ijkt} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{m} w_{iljt} - d_{ijt} \qquad \forall (i,j,t) \tag{2}$$

$$x_{ijt} \le \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=t}^{T} d_{ijl} \right) z_{ijt} \qquad \forall (i,j,t) \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(b_{ij}x_{ijt} + s_{ij}z_{ijt} \right) \le P_{jt} \qquad \forall (j,t) \tag{4}$$

$$x_{ijt}, I_{ijt} \ge 0 \qquad \forall (i,j,t) \tag{5}$$

$$w_{ijkt} \ge 0 \qquad \forall (i,j,k,t)\ j \neq k \tag{6}$$

$$z_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j,t) \tag{7}$$

A função objetivo (1) visa minimizar a soma dos custos de produção, de estoque, de preparação e de transporte entre plantas para todos os períodos do horizonte de planejamento. O grupo de restrições dado pelas equações (2) garante o balanço de estoque. As restrições (3) impõem que a planta esteja preparada para a produção toda vez que houver produção do produto a ela associado. As restrições (4) garantem que a capacidade de produção é respeitada em todas as plantas e em todos os períodos. Finalmente, os grupos de restrições (5) ~ (7) definem o domínio das variáveis.

É importante observar que como as variáveis I_{ijt} são todas não-negativas, a demanda é obrigatoriamente atendida no prazo, não havendo atrasos (*backlogging*). Porém, esse modelo pode ser facilmente adaptado para admitir a possibilidade de atrasos na entrega.

Além disso, este modelo assume que, caso haja transporte de produtos entre plantas em determinado período, este transporte é feito no decorrer do próprio período. Isso é uma hipótese viável se a unidade de tempo utilizada para definir cada período for longa o suficiente para permitir o transporte dos produtos no decorrer do próprio período de produção. Porém, esse modelo pode ser adaptado alterando-se os índices das variáveis de transporte na restrição (2) para admitir tempos de entrega mais longos.

Também assumimos que os custos de transporte entre plantas sempre respeitam a desigualdade triangular, ou seja, fazer o transporte de qualquer produto entre a planta j_1 e a planta j_3 diretamente é sempre mais vantajoso que fazer o transporte da planta j_1 para a planta j_3 passando pela planta j_2.

Baseados na ideia de Krarup & Bilde, (1977), estamos propondo uma adaptação do modelo original para este problema. A ideia da remodelagem consiste em desagregar as variáveis de produção em relação às plantas nas quais os produtos são produzidos e entregues, e em relação aos períodos nos quais os produtos são produzidos e entregues. Com isso, cada variável irá carregar consigo mais informação.

Para este novo modelo, as variáveis de produção que representam a quantidade produzida do produto *i* na planta *j* no período *t* (x_{ijt}) são desagregadas, ou seja, esta variável é reescrita para representar a quantidade produzida do produto *i* na planta *j* no período *t* para atendar a demanda do produto *i* (ou parte dela) na planta *k* no período *u*, ou seja,

x_{ijtuk} : Quantidade do produto *i* produzida na planta *j* durante o período *t* para ser entregue no período *u* na planta *k*.

A desagregação da variável de produção descarta a necessidade das variáveis de estoque, pois agora temos a produção diretamente direcionada uma planta e a um período específicos, portanto, é possível saber implicitamente por quanto tempo os produtos são estocados (um produto é sempre estocado entre os períodos t e u), e se há transporte de produtos (haverá transporte toda vez que $x_{ijtuk} \neq 0$ para $j \neq k$). Para incorporar estas mudanças, os custos de produção associados às variáveis devem incorporar os custos de produção, de transporte entre plantas, e de estoque dos produtos, ou seja, o custo associado a cada variável é dado por:

$$C_{ijtuk} = \begin{cases} 0, se \quad u < t \\ M_{ij} + r_{ijkt} + (u-t).Min\{H_{ij}; H_{ik}\}, caso \quad contrário \end{cases}$$

E o modelo original pode ser reescrito como:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{u=t}^{T}\sum_{k=1}^{m}\left(C_{ijtuk}\,x_{ijtuk}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left(V_{ij}\,z_{ijt}\right) \qquad (8)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{T} x_{ijtuk} = d_{ijt} \qquad \forall(i,j,t) \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(s_{ij}z_{ijt} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{T} b_{ij}x_{ijtuk}\right) \leq P_{jt} \qquad \forall(j,t) \qquad (10)$$

$$x_{ijtuk} \leq Min\ \{\ d_{iuk}; P_{jt}\ \}z_{ijt} \qquad \forall(i,j,t,u,k) \qquad (11)$$

$$x_{ijtuk} \geq 0 \qquad \forall(i,j,t,u,k) \qquad (12)$$

$$z_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall(i,j,t) \qquad (13)$$

A função objetivo (8) visa minimizar a soma dos custos de preparação para produção, de produção, de estoque e de transporte entre plantas para todos os períodos do horizonte de produção. Vale ressaltar que os três últimos custos estão contabilizados implicitamente no parâmetro C_{ijtuk}. As equações (9) garantem o atendimento da demanda. As restrições (10) asseguram que a capacidade de produção seja respeitada em cada uma das plantas e em cada um dos períodos. As restrições (11) impõem que a planta esteja preparada para a produção, toda vez que houver produção do produto a ela associado. Finalmente, as restrições (12) ~ (13) definem o domínio das variáveis.

Este modelo novo apresenta como grande vantagem o fato de possuir uma relaxação linear mais apertada que o modelo (1) ~ (7), graças aos melhores limitantes para as variáveis inteiras de preparação de máquina z_{ijt}, que são limitados pela demanda de cada período ao invés da soma de demandas como no modelo anterior. Em contrapartida, este modelo possui um número muito maior de variáveis de decisão e de restrições.

No modelo original, quando temos um problema com n diferentes produtos, m diferentes plantas, e T períodos de produção, são necessárias 2nmT + nm^{2}T vairáveis reais, além de nmT variáveis inteiras. Além disso, o problema apresenta mT(4n + nm + 1) restrições, no entanto, o modelo adaptado possui nm^{2}T^2 vairáveis reais, além de nmT variáveis inteiras, e mT(n + nmT + 1) restrições.

3. Testes computacionais

Para realizar comparações entre o modelo original e o modelo proposto, ambos foram escritos em linguagem de modelagem e testados, utilizando-se o *software* de otimização CPLEX versão 12.4, interface OPL, em um computador Intel Core 2, CPU T5300, 1.73GHz, 1.87Gb de RAM.

Duas classes de instâncias da literatura foram utilizadas para avaliar os modelos. A primeira classe, composta por 120 instâncias, foi proposta por Sambasivan & Yahya (2005). Estas instâncias foram divididas em grupos de acordo com o número de plantas (3 ou 4), de produtos (5, 10 ou 15), e de períodos (3, 4, 5 ou 6).

A segunda classe foi proposta por Nascimento, Resende & Toledo (2010). Esta classe é composta por 480 instâncias, divididas em 8 grupos, de acordo com os seguintes parâmetros: nível de capacidade disponível (A = apertada, N = normal); custo de preparação (A = alto, B = baixo), e tempo de preparação (A = alto, B = baixo). Para cada grupo foram geradas 60 instâncias com: 2, 4 ou 6 plantas, 6, 12, 25, ou 50 produtos, e 12 períodos, cinco de cada dimensão. Separando as classes de teste de acordo com os parâmetros n, m e T, temos 12 classes de teste, cada uma com 40 instâncias.

Primeiramente analisamos os limitantes obtidos ao resolvermos as relaxações lineares dos dois modelos. Nas Tabelas 1 e 2, são reportados os valores dos limitantes inferiores obtidos para as instâncias de testes. Nas três primeiras colunas são definidos, respectivamente, o número de plantas, de produtos e de períodos de cada grupo de instâncias, cada grupo é composto por cinco instâncias. Na quarta e quinta colunas são apresentados, respectivamente, os tempos médios para se obter uma solução ótima da relaxação linear do modelo original (MO) e do modelo proposto (MP). Na última coluna da tabela apresentamos o desvio porcentual médio entre os valores ótimos das soluções em cada classe, calculado da seguinte forma:

$$Desvio = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{(z_{MPi} - z_{MTi})*100}{z_{MPi}} \right)}{k}$$

Onde z_{MPi} indica o valor ótimo da i – ésima solução calculado no modelo proposto de um grupo, e z_{MTi} indica o valor ótimo da i – ésima solução calculado no modelo original de um mesmo grupo de testes, e k indica a quantidade de instâncias em um grupo de testes.

Tabela 1 – Resultados da relaxação linear dos modelos:
Instâncias de Sambasivan & Yahya, (2005).

Plantas	Produtos	Perídos	MO	MP	Desvio (%)
3*	5	3	1,04	2,03	4,98
3	10	3	1,85	2,01	2,94
3	15	3	3,10	3,85	3,52
3*	5	4	2,32	2,97	3,69
3	10	4	2,75	3,65	3,11
3	15	4	2,95	4,63	3,50
3	5	5	1,81	3,03	4,37
3	10	5	2,73	5,86	3,85
3*	15	5	4,14	4,51	3,69
3	5	6	2,21	3,50	3,57
3	10	6	3,74	4,26	4,16
3*	15	6	3,66	6,99	4,06
4	5	3	2,14	2,31	3,43
4	10	3	3,26	2,78	3,19
4	15	3	3,46	3,14	3,50
4	5	4	2,33	2,77	3,91
4	10	4	3,46	5,10	3,66
4	15	4	4,09	5,14	4,02
4	5	5	3,00	3,06	4,36
4	10	5	4,03	4,74	3,91
4	15	5	4,79	5,47	3,56
4*	5	6	2,26	4,00	4,31
4	10	6	4,22	5,26	3,77
4	15	6	5,39	7,93	4,13
Média			3,11	4,12	3,80

*Esses grupos possuem apenas quatro instâncias ao invés de cinco.

Na média, o novo modelo apresentou um limitante de qualidade 3,8% melhor para essa classe de instâncias, quando comparamos as suas relaxações lineares. Embora o modelo proposto possua um número muito maior de restrições e de variáveis, a diferença no tempo médio de resolução médio dos dois modelos é de aproximadamente um segundo.

Para a segunda classe de instâncias, notamos uma melhoria média de 10,82% no valor do limitante encontrado na relaxação linear quando confrontamos o modelo proposto com o modelo original. No entanto, a diferença entre os tempos médios necessários para se obter o ótimo do problema relaxado é mais significativa, aproximadamente 30 segundos.

Tabela 2 - Resultados da relaxação linear dos modelos:
Instâncias de Nascimento, Resende, & Toledo, (2010).

Plantas	Produtos	Períodos	MO	MP	Desvio (%)
2	6	12	2,82	7,48	12,52
2	12	12	3,75	10,11	11,47
2	25	12	5,84	15,08	11,95
2	50	12	8,53	22,06	12,17
4	6	12	4,62	12,37	11,24
4	12	12	6,64	18,52	10,54
4	25	12	10,43	36,98	10,79
4	50	12	18,05	70,47	11,72
6	6	12	5,89	18,57	9,18
6	12	12	8,64	26,57	9,42
6	25	12	16,94	61,87	9,45
6	50	12	27,04	167,38	9,37
Média			9,93	38,96	10,82

Com a finalidade de verificar qual dos modelos é mais eficiente se tratarmos o problema inteiro misto, resolvemos as instâncias utilizando o software de otimização CPLEX versão 12.4, em uma máquina com configurações Ubuntu 10.04 (64 bits), Intel Core i5 - 2300, 2.8 GHz, 2 Gb de RAM, com tempo limite máximo de uma hora de execução. Todas as instâncias da primeira classe foram resolvidas pelos modelos em menos de 10 segundos cada. Já para a segunda classe o modelo proposto se mostrou mais eficiente, como destacamos na Tabela 3.

Na Tabela 3, apresentamos os tempos médios de execução para cada grupo de testes, nas três primeiras colunas são definidos, respectivamente, a capacidade da planta (A = Apertada, N = Normal), o custo de preparação (A = Alto, B = Baixo), e o tempo de preparação (A = Alto, B = Baixo), onde cada grupo é composto por 60 instâncias. Na quarta e quinta colunas são apresentados, respectivamente, os tempos médios em segundos para se obter uma solução ótima do problema inteiro misto no modelo original (TMO) dentre os problemas resolvidos até a otimalidade , ou seja, os problemas que não terminaram por tempo de execução, e o número de problemas que foram resolvidos até a otimalidade em cada grupo pelo modelo original (NMO). Na sexta e sétima colunas apresentamos, respectivamente, os tempos médios em segundos para se obter uma solução ótima do problema inteiro misto no modelo proposto (TMP) dentre os problemas resolvidos até a otimalidade, ou seja, os problemas que não terminaram por tempo de execução, e o número de problemas que foram resolvidos até a otimalidade em cada grupo pelo modelo proposto (NMP).

Tabela 3 – Resultados do modelo inteiro misto:
Instâncias de Nascimento, Resende, & Toledo (2010).

Cap	SC	ST	TMO	NMO	TMP	NMP
A	A	A	428,7	16	2,4	60
A	A	B	294,2	15	2,0	60
A	B	A	91,9	54	0,8	60
A	B	B	61,6	53	0,9	60
N	A	A	417,7	16	2,4	60
N	A	B	542,2	17	2,5	60
N	B	A	43,0	54	0,8	60
N	B	B	34,4	54	0,9	60
Média			6,9		0,1	

Como destacado na Tabela 3, o modelo proposto resolveu todas as instâncias teste com tempo médio inferior a 1 segundo. Destacamos ainda que cada uma das instâncias teste foi resolvida em menos de 3 minutos. Para o modelo original, foram resolvidas apenas 279 instâncias no tempo limite de uma hora, ou seja, 58% das instâncias. Além disso, o tempo médio para resolver as instâncias teste foi de 6,9 segundos, enquanto que o tempo máximo é superior a uma hora.

4. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi propor uma adaptação do modelo proposto em Sambasivan & Yahya (2005) para o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas, múltiplos produtos, múltiplos períodos, com restrições de capacidade, com tempo de preparação de máquina, utilizando a ideia de localização de facilidades para desagregar as variáveis de produção (Krarup & Bilde, 1977).

Analisamos o modelo proposto em duas etapas. Primeiramente, resolvemos dois grupos de instâncias testes da literatura utilizando a relaxação dos modelos para comparar a qualidade do limitante obtido e o tempo necessário para obtê-lo. Em seguida, resolvemos as mesmas instâncias para os problemas inteiro-mistos e comparamos a qualidade das soluões inteiras obtidas no tempo limite de uma hora.

Embora o modelo proposto tenha um número de restrições e de variáveis maior do que o modelo original, a partir da análise dos resultados obtidos, concluímos, primeiramente, que o modelo proposto apresenta melhores resultados em sua relaxação linear quando comparado ao modelo original, e, além disso, que o modelo proposto pôde ser resolvido mais rapidamente que o modelo original, quando são comparadas as resoluções dos problemas inteiro-mistos. Logo, como reportado na literatura para outros problemas de dimensionamento de lotes (Wu & Shi, 2011), a modelagem utilizando localização de facilidades também é eficiente para o problema com plantas paralelas.

Pretendemos verificar se essa remodelagem continuará razoável computacionamente para variantes do problema, como por exemplo, quando admitimos a possibilidade de atrasos na entrega (ou "*backlogging*").

Referências

Brahimi, N., Dauzere-Perez, S., Najid, N. M., & Nordli, A. (2006). Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research 168*, 1 - 16.

Buschkühl, L., Sahling, F., Helber, S., & Tempelmeier, H. (2010). Dynamic capacitated lot-sizing problems: a classification and review of solution approaches. *OR Spectrum 32*, 231 - 261.

Drexl, A., & Kimms, A. (1997). Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *Journal of Operational Research 99*, 221 - 235.

Jans, R., & Degraeve, Z. (2008). Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research, 46*, 1619 - 1943.

Karimi, B., Ghiomi, S., & Wilson, J. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega, 31*, 365 - 378.

Krarup, J., & Bilde, O. (1977). Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. *Annals of Discrete Mathematics 1*, 79 - 97.

Nascimento, M. C. V., Resende, M. G. C., & Toledo, F. M. B. (2010). GRASP heuristic with path-relinking for the multi-plant capacitated lot sizing problem. *European Journal of Operacional Research 200*, 747 - 754.

Sambasivan, M., & Yahya, S. (2005). A Lagrangean-based heuristic for multi-plant, multi-item, multi-period capacitated lot-sizing problems with inter-plant transfers. *Computers & Operations Research 32*, 537-555.

Wu, T., & Shi, L. (2011). Mathematical models for capacitated multi-level production planning problems with linked lot-sizing. *International Journal of Production Research 49*, 6227 - 6247.