

## PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE VEÍCULOS COM FROTA MISTA, JANELAS DE TEMPO E CUSTOS ESCALONADOS

**João L. V. Manguino**

Universidade de São Paulo – Escola Politécnica  
Av. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária – São Paulo-SP – Brasil  
[joao.manguino@usp.br](mailto:joao.manguino@usp.br)

**Débora P. Ronconi**

Universidade de São Paulo – Escola Politécnica  
Av. Almeida Prado, 128, Cidade Universitária – São Paulo-SP – Brasil  
[dronconi@usp.br](mailto:dronconi@usp.br)

### RESUMO

O tema de roteamento de veículos tem grande importância na literatura e vem sendo amplamente estudado por sua relevância para a indústria. O estudo deste problema se iniciou com o problema mais simples e vem evoluindo na literatura, se enriquecendo com mais restrições e características, visando aproximar-se da realidade vivida por empresas. Alinhado a essa necessidade, esse artigo aborda o roteamento de veículos quando há a terceirização da frota na entrega de mercadorias. Em muitos casos, a indústria prepara o roteamento, mas não é dona da frota de veículos, contratando um terceiro para executar as entregas. Uma forma de cobrança do frete é por meio de custos escalonados, que são calculados de acordo com o tipo de veículo e a distância percorrida, com valores fixos por faixas de distância. Considerando este problema, este trabalho apresenta uma formulação de programação linear inteira mista para o problema de roteamento de veículos com frota mista, janelas de tempo e custos escalonados. Testes computacionais, utilizando um *software* de programação matemática, mostram a eficiência do modelo para a resolução de instâncias reais de pequeno porte.

**PALAVRAS CHAVE:** roteamento de veículos, formulação inteira mista, frota mista, janelas de tempo, custo escalonado.

### ABSTRACT

The theme of vehicle routing is of great importance in the literature and has been widely studied for its relevance to many industries. The study of this problem started with a simpler problem and has been evolving in the literature, with more restrictions and characteristics, in order to approach the reality experienced by companies. Aligned with this trend, this article addresses the vehicle routing problem when there is outsourcing of the fleet of vehicles when delivering goods. In many cases, industry prepares routes, but is not the owner of the fleet, hiring a third party logistics provider to perform deliveries. A form of freight charging is by scaled costs, which are calculated according to the type of vehicle and the distance traveled, with fixed values for each distance range. Considering this problem, this study presents a formulation of mixed integer linear programming for the vehicle routing problem with mixed fleet, time windows and cost escalation. Computational tests, using a mathematical programming software, show the efficiency of the model to solve small sized real instances.

**KEY WORDS:** vehicle routing, mixed integer formulation, mixed fleet, time windows, scaled costs.

## 1. Introdução

O tema de roteamento de veículos tem grande importância na literatura e vem sendo amplamente estudado por sua relevância para a indústria e economia mundial. O estudo deste problema se iniciou com o VRP (*Vehicle Routing Problem*), problema de roteamento de veículos onde veículos de mesmas características e capacidade saem de um armazém central e fazem entregas ou coletas em pontos espalhados no espaço (que podem ser clientes ou fornecedores) com diferentes demandas e custo pré-determinado de traslado entre pontos. Com a evolução do tema na literatura e tendo como objetivo aproximar-se mais da realidade vivida pela indústria e transportadoras, o problema foi enriquecido com mais restrições, características de clientes, frotas e rotas.

Assim, existem diversas variantes do VRP clássico. As mais encontradas são: janelas de tempo em que clientes, armazém e motoristas podem trabalhar; frota de veículos mista, cujo tamanho e composição são parte do problema, sendo atribuídos custos fixos e variáveis de acordo com o veículo; entregas parciais permitidas, ou seja, mais de um veículo pode atender cada cliente; múltiplos armazéns, de onde podem iniciar as rotas dos automóveis; entre muitas outras características estudadas.

Hoff *et al.* (2010) apresentam um extenso levantamento bibliográfico sobre os diferentes tipos de roteamento de veículos e metodologias utilizadas, terminando com uma análise crítica da produção científica. Apesar de citar positivamente essa adição de restrições e características reais ao problema, foi feita a crítica da literatura ainda estar aquém da aderência necessária às situações reais. Alinhado com essa percepção, esse trabalho tem como principal objetivo abordar uma estratégia da indústria na distribuição de mercadorias: a terceirização da frota.

Em muitos casos, a indústria prepara seu próprio roteamento, avaliando capacidade de veículos e custos de frete, mas não é dona da frota que faz o atendimento aos clientes, esta pertence a um terceiro, especializado em prover veículos para entregas. As empresas que oferecem este serviço são conhecidas como “prestadores de serviços logísticos” (PSL), ou simplesmente “operadores logísticos”. A terceirização de frotas é uma estratégia muito utilizada na indústria desde os anos 90 e sua relevância é confirmada por Lieb e Bentz (2004), cuja pesquisa indicou que, em 2003, 80% das indústrias dos EUA utilizavam esta modalidade de transporte.

Com o uso dos serviços de um PSL, é possível, para a indústria, evitar custos relacionados à aquisição e manutenção de uma frota de veículos, depreciação dos equipamentos, salários e encargos de motoristas e ajudantes, entre outros componentes de custo. Além disso, usufrui da vantagem da disponibilidade e flexibilidade de uma empresa especializada em fornecimento de veículos, com um custo determinado em tabela, simples de se aferir. O fornecedor de frete, por sua vez, possui uma extensa frota de veículos distintos e possui um portfólio de clientes. Ele fornece os veículos prontos para utilização e realização das entregas. Uma possível forma de cobrança do frete é através de uma tabela de custos escalonados. Este custo é de simples cálculo, de acordo com o tipo de veículo utilizado e a distância percorrida, sendo calculado por faixas de distância percorrida.

Ao abordar este problema, este artigo se propõe a apresentar uma formulação de programação linear inteira mista que, além das restrições clássicas, considere a cobrança por meio de custos escalonados. Esta metodologia de cálculo de custos é diferente do método tradicional encontrado na literatura, cujo custo é proporcional à distância percorrida pelos veículos, somado aos custos fixos de cada um deles. A metodologia foi testada em pequenos casos reais de uma indústria alimentícia para comprovar a boa qualidade da formulação.

## 2. Revisão Bibliográfica

A primeira abordagem para o problema de roteamento de veículos clássico (VRP) foi feita por Dantzig e Ramser (1959) para um problema real de distribuição de combustível de um terminal graneleiro para postos de combustíveis. Neste artigo é proposto um modelo de

programação linear inteira, com base no utilizado para o problema do caixeiro viajante - TSP (*Travelling Salesman Problem*), com adições de restrições de capacidade de veículos. A partir deste artigo, o tema foi amplamente estudado e tem como marco a heurística das economias (*Savings Heuristics*), proposta por Clarke e Wright (1964).

A partir do clássico VRP, foi agregada uma característica que o aproximasse de um caso real, o dimensionamento da frota. Assim, os veículos utilizados no roteamento não são mais idênticos, mas de diferentes tipos. Cada tipo possui sua própria capacidade de transporte, e custos de aquisição e manutenção, além de custos variáveis (por unidade de carga transportada ou distância percorrida) de acordo com seu tipo. Golden *et al.* (1984) foram os primeiros a estudar este problema, nomeando-o “problema de roteamento de veículos com determinação do tamanho e composição da frota” ou FSMVRP (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*). Após essa primeira abordagem, diversos outros autores publicaram estudos sobre o tema de FSMVRP, como pode ser visto na pesquisa de Hoff *et al.* (2010) sobre o tema.

No VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) adiciona-se ao VRP clássico o limite de horário de atendimento nos pontos de demanda (clientes), trazendo o problema mais próximo à realidade. No caso real, empresas têm horário de início e fim de operação, além das restrições de horário em que portos operam ou restrições de horário para circulação de caminhões em cidades. Apesar de parecer uma simples adição de restrições de tempo, isso gera novas complexidades, pois nessas condições o sentido da rota se torna relevante e fatores antes não considerados, como tempo de atendimento no cliente, velocidade de veículos e outros fatores relacionados direta ou indiretamente ao tempo, se tornam relevantes. O artigo publicado por Solomon (1987) propõe a primeira abordagem a esse cenário, com a proposição de uma formulação e heurísticas.

A evolução natural do problema é a união das características e restrições do FSMVRP com o VRPTW. Surge, assim, o FSMVRPTW (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows*). O objetivo, portanto, é minimizar simultaneamente os custos fixos e variáveis do roteamento de uma frota heterogênea de veículos, respeitando as janelas de tempo nos clientes, fornecedores e do armazém central. A primeira abordagem para o problema foi feita por Liu e Shen (1999) que propuseram uma heurística, baseando-se principalmente nos métodos desenvolvidos por Golden *et al.* (1984). Dullaert *et al.* (2002) apresentam restrições de janelas de tempo que devem ser adicionadas à formulação do FMSVRP para que este se torne compatível com o FSMVRPTW, além de usar um novo método heurístico baseado em Solomon (1986) para esse problema, obtendo bons resultados. Dell’Amico *et al.* (2007) apresentam uma nova formulação e uma heurística construtiva para fornecer uma solução inicial a uma meta-heurística que soluciona o FSMVRPTW. A abordagem deste artigo, porém, se diferencia do tradicional, por considerar que o custo total do problema se dá pela soma ponderada dos custos fixos dos veículos com o tempo total de roteamento.

Na literatura, vários métodos de custo de frete e transporte são abordados. Em Ghiani *et al.* (2004), são listados diferentes métodos de custo de frete, levando em conta se a empresa é dona de sua frota de veículos, se a aluga ou contrata um operador logístico. Entre as formas de custo apresentadas, existem inclusive custos escalonados de acordo com o peso transportado. No entanto, não há uma abordagem direta ao FSMVRPTW com custos escalonados de acordo com a distância percorrida.

O trabalho de Bassi (2009) traz uma aplicação prática do FSMVRPTW com entregas parciais e custos escalonados de uma empresa de construção civil que coleta material nos fornecedores para suas obras. O trabalho propõe uma formulação e resolve o problema obtendo resultados superiores ao praticado pela empresa, porém sua formulação e métodos são específicos para o caso real aplicado, impedindo a extensão de sua proposição a outros casos. Mesmo assim, apesar da amostra pequena de escopo limitado, seus resultados mostraram oportunidades no estudo de custos escalonados em problemas de roteamento.

Além da busca na literatura, foi realizada uma pesquisa por *e-mail* e telefone com operadores logísticos, empresas e um fornecedor de *software* para verificação de custos de frete.

Todos confirmaram a ampla utilização de custeio de frete por faixas escalonadas de distância, ligadas ao tipo de veículo. Não existe um nome padronizado no mercado para esse tipo de cobrança, o mais recorrentemente encontrado foi “frete distância”.

Com base nessa percepção da grande utilização do custo escalonado de frete em casos reais de roteamento e a abordagem limitada feita ao problema na literatura, este trabalho enfoca o FSMVRPTW com custos escalonados, propondo um modelo PLIM para sua resolução.

### 3. Caracterização do Problema

O problema estudado é o roteamento de veículos com uma série de características que o torne mais próximo à realidade de empresas que fazem entregas utilizando a frota de um operador logístico, em diversos pontos de uma região. Estas características são:

- **Janelas de tempo** nos clientes e no centro de distribuição: a entrega ou coleta de materiais deve respeitar os horários de atendimento dos clientes e do armazém;
- **Frota Heterogênea**: existem diferentes tipos de veículos, com diferentes capacidades e custos de transporte que podem realizar as coletas, sendo que a quantidade disponível de cada tipo é ilimitada.
- **Custos escalonados de transportes**: este custo é dado por faixa de custo, de acordo com a distância percorrida pelo veículo. Na última faixa, o custo se torna contínuo.

Essas características são algumas das mais comuns presentes em empresas que preparam o roteamento de veículos e contratam a frota de um terceiro. Assim, existem diversas opções de veículos a serem contratados e o pagamento de frete para a empresa que fornece os veículos se dá por custos fixos atribuídos conforme a faixa de distância percorrida por cada veículo, com valores previamente tabelados.

O problema abordado neste trabalho pode ser classificado, segundo a nomenclatura corrente na literatura, como FSMVRPTW com a adição da restrição de custos escalonados. Assim, a partir de agora, será adicionado à sigla o termo em inglês para custos escalonados, “*scaled cost*”, e o problema será referido como FSMVRPTWSC (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows and Scaled Cost*). Liu e Shen (1999) provaram que o FSMVRPTW é *NP-Hard*, deste modo, por redução polinomial, o FSMVRPTWSC pode ser definido, também, como *NP-Hard*.

Na revisão da literatura não foi encontrado nenhum estudo que trate do FSMVRPTWSC. Esta metodologia de aferição de custos leva a diversas alterações em aspectos tradicionais da lógica de resolução do problema, uma vez que deixa de existir a divisão do custo em dois tipos: fixo e variável. Nos custos escalonados, a aferição do custo consiste na somatória dos custos atribuídos à faixa de distância percorrida por cada veículo, de acordo com o seu tipo.

Na metodologia tradicional, de custos lineares, a cada pequena variação na distância percorrida por um veículo existe uma variação em seu custo. No custo escalonado, dependendo da faixa de distância, isto não ocorre. Por exemplo, se a faixa de distância for de 50 a 100 km, um veículo que percorreu 55 km custará exatamente o mesmo valor daquele que percorreu 90 km. A diferença gráfica entre esses dois tipos de cálculo pode ser visualizada na figura 1.

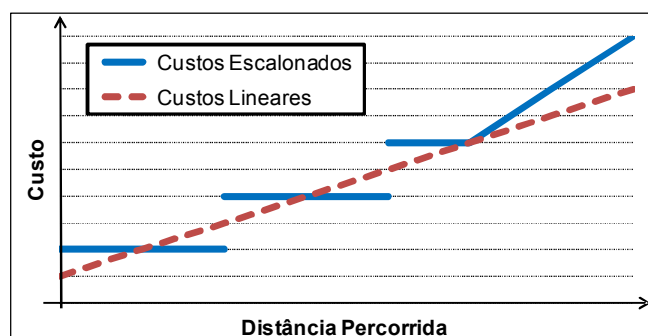


Figura 1: Comparação entre custos escalonados e custos lineares.

#### 4. Formulação Matemática

A seguir é apresentada a formulação de programação linear inteira mista para o FSMVRPTWSC, com base na formulação para FSMVRP de Golden *et al.* (1984) e com os apontamentos sobre janelas de tempos para adaptá-lo para o FSMVRPTW de Dullaert *et al.* (2002). Inicialmente, será detalhado cada elemento que a compõe.

##### 4.1 Elementos da Formulação

###### Clientes

Existe um conjunto de clientes  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  em diferentes locais, sendo que o local 0 é o armazém (ou centro de distribuição). Para cada par de locais  $(i, j)$ , onde  $i$  e  $j$  pertencem ao conjunto  $N$ , existe uma distância não negativa  $d_{ij}$  e um tempo não negativo de percurso  $t_{ij}$ . Cada cliente  $i$  possui uma demanda  $q_i$ , que é conhecida antes do início do processo de roteamento.

###### Frota de veículos

Existem  $K$  diferentes tipos de veículos. Cada tipo de veículo  $k$  possui uma capacidade  $a_k$  ( $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_K$ ). A frota de veículos neste problema será ilimitada para todos os tipos, entretanto, para permitir a formulação matemática do problema, é pré-estabelecido um limitante superior ao número de veículos  $V$ , onde  $V = n$ , onde cada cliente é atendido por um veículo exclusivamente.

###### Janelas de tempo

Cada cliente  $i \in N$  tem janelas de tempo rígidas definidas pelo intervalo  $[e_i, l_i]$ , sendo que  $e_i \leq l_i$ . Esses parâmetros correspondem, respectivamente, ao início e fim do período em que os clientes podem ser atendidos, ou seja, os atendimentos não podem se iniciar antes ou depois deste intervalo.

###### Faixas de custo escalonado

Neste problema de roteamento, o custo total é definido pela soma dos custos atribuídos a cada veículo, de acordo com o preço de sua faixa de distância percorrida. Ou seja, para cada veículo deve-se verificar em qual faixa  $f$  a distância percorrida está inserida e, então, aferir o custo.

Assim, temos  $F$  faixas de distâncias, sendo  $f = 1, 2, \dots, F$ . Cada faixa de cobrança  $f$  tem uma distância correspondente  $R_f$  que determina o limitante inferior, ou seja, a distância mínima percorrida pelo veículo para que ele esteja naquela faixa. Para cada faixa  $f = 1, 2, \dots, F - 1$  existe um custo fixo  $C_{kf}$  correspondente para cada tipo de veículo  $k$ . Na última faixa, onde  $f = F$ , o custo se torna linear com a distância percorrida, sendo acrescido pelo fator  $C_{kF}$  adicionado do valor de  $C_{kF-1}$ , como ilustrado na figura 2.

Além das faixas de custo, existe uma faixa fictícia  $f = 0$ . Ela é a faixa para veículos que não são alocados em nenhuma rota e, conseqüentemente, sua distância total percorrida é zero. Portanto, nesta faixa  $C_{k0} = 0$  para qualquer  $k$ .

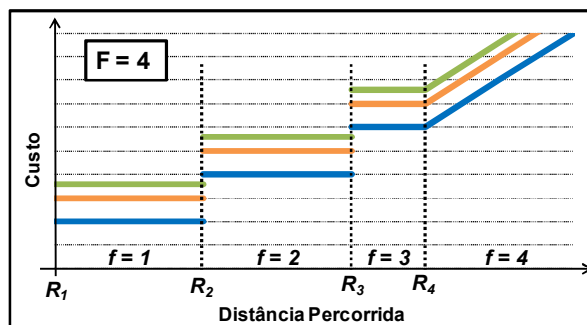


Figura 2: Ilustração de faixas de custo.

## 4.2 Modelo Proposto

O problema do FSMVRPTWSC consiste em buscar o menor custo para um roteamento de veículos em que se deve atender totalmente a demanda de clientes distribuídos no espaço e que possuem uma janela de tempo de atendimento rígida, utilizando uma frota mista ilimitada de veículos, com diferentes capacidades e custos, sendo que este custo é escalonado de acordo com a faixa de distância percorrida e tipo do veículo utilizado.

A partir dos elementos e propriedades apresentadas anteriormente, é apresentada, a seguir, a formulação de programação linear inteira mista para o problema.

### Índices

$p, i, j$ : cliente;  
 $v$ : veículo;  
 $k$ : tipo de veículo;  
 $f, y$ : faixa de distância;

### Parâmetros

$n$ : número total de clientes;  
 $V$ : número máximo de veículos a serem utilizados;  
 $K$ : número de tipos de veículos disponíveis;  
 $F$ : índice da maior faixa de distância;  
 $q_i$ : demanda no cliente  $i$ ;  
 $t_{ij}$ : tempo de trânsito do cliente  $i$  ao  $j$ ;  
 $d_{ij}$ : distância do cliente  $i$  ao  $j$ ;  
 $s_i$ : tempo de serviço no cliente  $i$ ;  
 $e_i$ : início da janela de tempo de atendimento no cliente  $i$ ;  
 $l_i$ : fim da janela de tempo de atendimento no cliente  $i$ ;  
 $a_k$ : capacidade de um veículo do tipo  $k$ ;  
 $R_f$ : limitante inferior da faixa de distância  $f$ ;  
 $C_{kf}$ : custo fixo da faixa de distância  $f$  para o tipo de veículo  $k$ , onde  $f = 1, 2, \dots, F - 1$ ;  
 $C_{kF}$ : custo variável pela distância percorrida na faixa de distância  $F$  para o tipo de veículo  $k$ ;

### Variáveis

$x_{ij}^v$ : assume valor 1 se o veículo  $v$  vai de  $i$  até  $j$ , 0 caso contrário;  
 $z_{kf}^v$ : assume valor 1 se o veículo  $v$  é do tipo  $k$  e percorre a distância pertencente à faixa  $f$ , 0 caso contrário;  
 $b_i^v$ : instante de início do serviço do veículo  $v$  no cliente  $i$ ;  
 $D^v$ : distância total percorrida pelo veículo  $v$ ;  
 $P^v$ : custo do veículo  $v$ .

### Formulação

$$\text{minimizar } \sum_{v=1}^V P^v \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=0}^n x_{0j}^v = 1 \quad v = 1, \dots, V \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ip}^v - \sum_{j=0}^n x_{pj}^v = 0 \quad v = 1, \dots, V; p = 0, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{v=1}^V \sum_{i=0}^n x_{ij}^v = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n q_i x_{ij}^v \leq \sum_{f=0}^F \sum_{k=1}^K a_k z_{kf}^v \quad v = 1, \dots, V \quad (5)$$

$$b_i^v + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^v) \leq b_j^v \quad v = 1, \dots, V; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$e_i \leq b_i^v \leq l_i \quad v = 1, \dots, V; i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$D^v = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_{ij}^v d_{ij} \quad v = 1, \dots, V \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^F z_{kf}^v = 1 \quad v = 1, \dots, V \quad (9)$$

$$D^v - R_y \leq M \sum_{k=1}^K \sum_{f=y}^F (z_{kf}^v) \quad v = 1, \dots, V; y = 1, \dots, F \quad (10)$$

$$-(D^v - R_F) \leq M(1 - \sum_{k=1}^K z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V \quad (11)$$

$$P^v \geq \sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^{F-1} z_{kf}^v C_{kf} \quad v = 1, \dots, V \quad (12)$$

$$P^v \geq C_{kF-1} + C_{kF}(D^v - R_F) - M(1 - z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V; k = 1, \dots, K \quad (13)$$

$$b_i^v \geq 0 \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n \quad (14)$$

$$x_{ij}^v \in \{0,1\} \quad v = 1, \dots, V; i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n \quad (15)$$

$$z_{kf}^v \in \{0,1\} \quad v = 1, \dots, V; k = 1, \dots, K; f = 0, \dots, F \quad (16)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos custos de todos os veículos. Cada veículo  $v$  recebe, segundo as restrições (12) e (13), um custo  $P^v$ .

O conjunto de restrições (2) e (3) são de conservação de fluxo no sistema. O conjunto (2) determina que todos os veículos devem sair do armazém. As restrições (3), por sua vez, determinam que se um veículo  $v$  chega a um ponto  $p$  qualquer deve, em seguida, sair dele. Note que esses dois conjuntos de restrições também garantem que todos os veículos devem encerrar a sua rota retornando ao armazém.

As restrições (4) garantem que cada cliente será atendido por exatamente um veículo. Desta forma, todos os clientes serão atendidos e não haverá atendimento fracionado. As restrições (5) garantem que a capacidade de cada veículo não seja excedida, ou seja, a soma da demanda de todos os clientes atendidos pelo veículo  $v$  deve ser inferior ou igual à capacidade deste tipo de veículo.

O conjunto de restrições (6) e (7) garantem o respeito às janelas de tempo dos pontos de demanda. As restrições (6) determinam que o início do atendimento em um cliente só se inicia após o início do atendimento no anterior, somado ao tempo de atendimento deste e o tempo de traslado entre estes pontos. Não necessariamente o início do atendimento em  $j$  será exatamente após a soma desses tempos, pois pode acontecer desta soma resultar num instante anterior a  $e_j$ , o início da janela de atendimento em  $j$ . Neste caso, o veículo deve aguardar a abertura da janela para iniciar o atendimento. Caso a soma calculada anteriormente resulte em um instante após o fim da janela de atendimento em  $j$ , ou seja, após  $l_j$ , o atendimento será impossível e, assim, torna essa rota ineficaz. Estas duas condições de atendimento à janela de tempo do cliente são garantidas pelas restrições do tipo (7). Ou seja, o início de atendimento do veículo  $v$  no cliente  $i$ , determinado pela variável  $b_i^v$ , deve estar entre o início  $e_i$  e o fim  $l_i$  da janela de tempo deste cliente. Devido ao conjunto de restrições (6) não é necessária a existência de restrições que evitem a formação de sub-rotas.

As restrições (8) definem a variável  $D^v$ , a distância total percorrida por cada veículo  $v$ . Esta restrição não é fundamental para a formulação, mas torna a escrita das próximas restrições mais clara e compreensível para o leitor.

As restrições (9) determinam que um veículo  $v$  deve ser de um único tipo  $k$  e a distância percorrida deve estar em uma única faixa  $f$  de cobrança. Isto é determinado pela variável  $z_{kf}^v$ , ela assume valor 1 quando o veículo  $v$  é do tipo  $k$  e cuja faixa de cobrança é  $f$ . O tipo de veículo  $k$  é determinado a partir das restrições (5), explicadas anteriormente. A faixa de cobrança  $f$  é determinada nas restrições (10) e (11), explicadas a seguir.

### Restrições (10) e (11)

$$D^v - R_y \leq M \sum_{k=1}^K \sum_{f=y}^F (z_{kf}^v) \quad v = 1, \dots, V; y = 1, \dots, F \quad (10)$$

$$-(D^v - R_F) \leq M(1 - \sum_{k=1}^K z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V \quad (11)$$

As restrições (10) e (11) funcionam conjuntamente para determinar em qual faixa de cobrança a distância percorrida pelo veículo  $v$  está. O objetivo desses dois conjuntos de restrições, combinadas com as restrições (9), é determinar para cada veículo  $v$  qual a sua faixa de distância  $f$ .

As restrições (10) restringem a faixa mínima na qual a distância percorrida pelo veículo deve estar. Como o modelo é de minimizar custos, ele sempre buscará que  $z_{kf}^v$  tenha valor 1 para a alocação que gere o menor custo. Portanto, somente é necessário restringir a faixa mínima, deixando livre a escolha de faixas maiores. A única exceção é a última faixa, cuja forma de custeio é diferente de todas as outras. Assim, a restrição (11) determina se a distância percorrida está ou não na última faixa de distância.

É importante ressaltar que para veículos em que  $D^v = 0$ , estes devem estar na faixa  $f = 0$  e receber o custo  $C_{k0} = 0$ . É possível notar que a faixa  $f = 0$  não está presente no conjunto das restrições (10) e (11), mas está na restrição (9). Desta forma, para  $D^v = 0$ , as restrições (10) não estarão ativadas para nenhuma faixa  $y$ . Porém, devido a  $C_{k0} = 0 \forall k$  e a função objetivo ser de minimizar o custo dos veículos, o modelo escolherá  $z_{k0}^v = 1$ .

### Restrições (12) e (13)

$$P^v \geq \sum_{k=1}^K \sum_{f=0}^{F-1} z_{kf}^v C_{kf} \quad v = 1, \dots, V \quad (12)$$

$$P^v \geq C_{kF-1} + C_{kF}(D^v - R_F) - M(1 - z_{kF}^v) \quad v = 1, \dots, V; k = 1, \dots, K \quad (13)$$

As restrições (12) e (13) em conjunto determinam o valor mínimo para o custo  $P^v$  de cada veículo  $v$ . Como a função objetivo é para minimizar este valor, determinar o valor mínimo já significa calcular o próprio valor de  $P^v$ . As restrições (12) se referem às faixas de custo com valores fixos e as (13) à faixa  $F$ , cujo custo é variável a partir do valor da faixa  $F - 1$ . Estas restrições são viáveis devido à determinação derivada da variável  $z_{kf}^v$  nas restrições (5), (9), (10) e (11).

Considerando o valor de  $z_{kf}^v$  já determinado, a restrição (12) estará ativada para os casos em que, para uma faixa  $f < F$ ,  $z_{kf}^v = 1$ , portanto, para esta faixa  $f$ ,  $P^v \geq C_{kf}$ . Nesses casos, a restrição (13) estará desativada, pois com  $z_{kF}^v = 0$ , temos  $P^v \geq C_{kF-1} + C_{kF}(D^v - R_F) - M$ , fazendo o termo à direita da inequação sempre negativo, não restringindo o valor mínimo de  $P^v$ . Já para um veículo cuja distância requer que  $f = F$  e, conseqüentemente,  $z_{kF}^v = 1$ , a restrição (12) estará desativada, pois todo  $z_{kf}^v$ , com  $f < F$ , será igual a zero. Já na restrição (13),  $M$  será multiplicado por zero e, desta forma, o valor à direita da equação será positivo, determinando  $P^v$ .

Para que isto seja efetivo,  $M$  deve ser uma constante grande o suficiente para garantir que, para qualquer valor de  $k$ , as restrições (6), (10), (11) e (13) sejam viáveis.

## 5. Experimentos Computacionais

Foram realizados testes em casos reais de uma indústria alimentícia. Por se tratar de um problema *NP-Hard*, não foi possível resolver problemas com maiores dimensões, assim, aplicou-se apenas a casos de pequeno porte, com no máximo oito clientes sendo atendidos, dois tipos de veículos e quatro faixas de distância.

Os testes foram realizados com um computador Intel Core i5 2.4GHz, com 2,92GB de memória *RAM* e resolvidos pelo *software* CPLEX 12.2 com interface OPL, sem alteração da configuração padrão dos parâmetros do CPLEX.

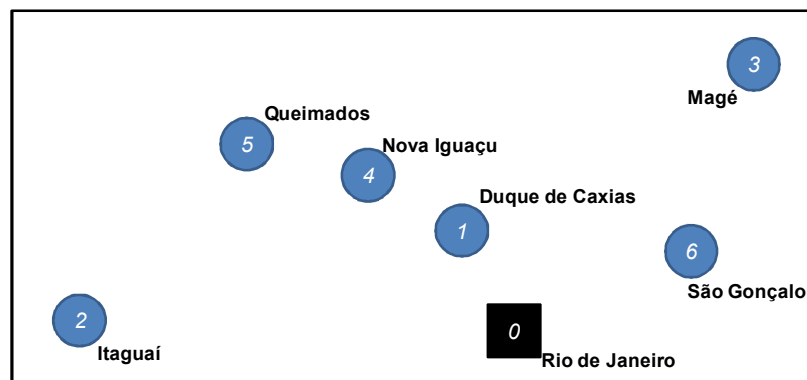


Conforme a tabela 1, nas oito instâncias testadas o modelo proposto trouxe custos, em média, 38,3% menores que os despendidos pela própria empresa, chegando a 53% no melhor caso. Os valores foram multiplicados por uma constante para preservar dados da empresa.

Instância	Número de clientes	Custo Real	Custo Modelo	Ganho
1	5	2.372,0	1.485,0	37,4%
2	5	2.372,0	1.380,0	41,8%
3	6	2.038,7	1.750,0	14,2%
4	6	2.827,2	1.750,0	38,1%
5	6	2.827,2	1.750,0	38,1%
6	6	5.429,7	3.256,0	40,0%
7	8	2.652,5	1.485,0	44,0%
8	8	3.190,3	1.500,0	53,0%

**Tabela 1: Instâncias reais testadas no modelo**

Para ilustrar a resolução do modelo matemático, é apresentada, a seguir, uma instância de exemplo. Trata-se da distribuição na Região Metropolitana do Rio de Janeiro para clientes em seis cidades diferentes ( $n = 6$ ). A figura 3 mostra um diagrama com o armazém e clientes da instância testada, a tabela 2 apresenta os dados de demanda e janelas de tempo dos clientes.



**Figura 3: Diagrama da distribuição dos pontos de demanda (clientes) e armazém do exemplo apresentado**

$i$	Cidade	Demanda ( $q_i$ )	Tempo de Serviço ( $s_i$ )	Início da Janela de Tempo ( $e_i$ )	Fim da Janela de Tempo ( $l_i$ )
0	Rio de Janeiro	0	0	0	24
1	Duque de Caxias	8.436	10	6	18
2	Itaguaí	171	2	6	18
3	Magé	1.112	3	6	18
4	Nova Iguaçu	1.854	4	6	18
5	Queimados	1.322	3	6	18
6	São Gonçalo	950	3	6	18

**Tabela 2 – Dados de demanda e janelas de tempo dos clientes.**

Para as entregas contrata-se a frota de um operador logístico que disponibiliza dois tipos de veículos ( $K = 2$ ), com custo determinado em quatro faixas de distância ( $F = 4$ ) apresentados na Tabela 3.

Tipo de veículo ( $k$ )		1- Truque	2- Carreta
Capacidade ( $a_k$ )		10000	23000
Faixa ( $f$ )	Início Faixa ( $R_f$ )	Custo ( $C_{kf}$ )	
1	0	530	850
2	50	795	955
3	120	970	1060

**Tabela 3 – Dados de veículos utilizados na instância de exemplo.**

A  $F = 4$ , se inicia na distancia de 180km, e seu custo variável  $C_{kF}$  é de 7,9 para veículo truque e 14,2 para carreta.

Na tabela 4 são apresentadas as distâncias ( $d_{ij}$ ), em quilômetros, entre os tempos ( $t_{ij}$ ), em horas, de traslado entre os clientes. É importante ressaltar que, como se trata de uma frota de um terceiro, o veículo não deve retornar para o armazém, sendo assim, somente é cobrado o serviço até a entrega ser concluída no último cliente. Para representar esta característica sem prejuízo à formulação proposta, consideramos as distâncias e tempos de qualquer ponto para o armazém iguais a zero.

$i/j$	$d_{ij} / t_{ij}$						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0 / 0	21 / 1	67 / 3	59 / 2	35 / 2	48 / 2	28 / 1
1	0 / 0	0 / 0	56 / 2	43 / 2	19 / 1	33 / 2	41 / 2
2	0 / 0	56 / 2	0 / 0	94 / 4	44 / 2	48 / 2	87 / 3
3	0 / 0	43 / 2	94 / 4	0 / 0	51 / 2	64 / 3	38 / 2
4	0 / 0	19 / 1	44 / 2	51 / 2	0 / 0	22 / 1	55 / 2
5	0 / 0	33 / 2	48 / 2	64 / 3	22 / 1	0 / 0	68 / 3
6	0 / 0	41 / 2	87 / 3	38 / 2	55 / 2	68 / 3	0 / 0

Tabela 4 – Distância entre os clientes.

Para este exemplo, o *software* indicou que a instância possui 408 restrições, 403 variáveis, sendo 354 binárias. A solução ótima foi obtida em 24,2 segundos, ela forma duas rotas, conforme diagrama da figura 4 e tabelas 5 e 6.

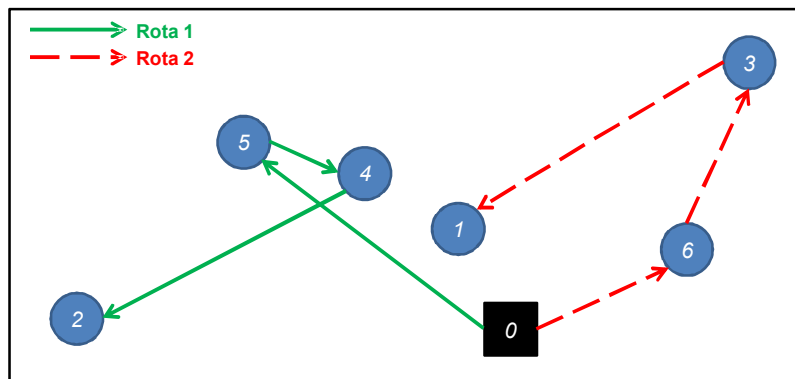


Figura 4: Diagrama do roteamento ótimo para este problema.

Rota	Pontos Visitados	Demanda (Kg)	Tipo Veículo	Distância (km)	Faixa	Custo
1	0 – 5 – 4 – 2	3.347	1 - Truque	114	2	795
2	0 – 6 – 3 – 1	10.498	2 - Carreta	109	2	955

Tabela 5 – Rotas geradas na solução ótima.

Rota 1		Rota 2	
Cliente	Início de Atendimento	Cliente	Início de Atendimento
5	6	6	6
4	10	3	11
2	16	1	16

Tabela 6 – Horário de início de atendimento dos clientes na solução ótima.

Pela tabela 5, vemos que o veículo na rota 1 atende uma demanda de 3,4 mil quilogramas e pode utilizar um caminhão truque, e percorre uma distância na segunda faixa de cobrança. Já o veículo na rota 2 atende uma demanda pouco superior ao limite de um caminhão truque, sendo necessário utilizar uma carreta. Na tabela 6 é possível observar que uma solução ótima respeita as

janelas de tempo nos clientes, ficando claro que uma solução ótima respeita todas as restrições. O custo total de 1750 unidades monetárias é 14,2% inferior à solução realizada pelo cliente, a um custo de 2040.

Como pode ser observado neste exemplo, e nas outras instâncias testadas, o modelo matemático traz reduções em custo significativas comparado ao praticado pela empresa com seus recursos atuais. O benefício se torna maior conforme a complexidade dos problemas aumenta.

## 6. Conclusões e Próximos Passos

O problema abordado neste trabalho é o FSMVRPTWSC, problema de roteamento de veículos com frota mista, janelas de tempo e custos escalonados. Ao contrário do tradicional, não há custo linear, mas sim uma tabela de custos fixos de acordo com tipo de veículo e faixas de distância percorrida. Com essas características, o FSMVRPTWSC pode ser classificado como um problema rico, como explicado em Hoff *et al.* (2010), que está mais próximo de um problema real. Dentre os muitos tipos de acordo entre empresas e prestadores de serviços de transporte, foi verificado nesse trabalho que a cobrança de frete com custo escalonado é utilizado amplamente, mas ainda não existe na literatura uma abordagem para este problema.

O modelo PLIM proposto foi elaborado a partir de adaptações em formulações pré-existentes na literatura para o FSMVRPTW, para a determinação do custo de forma escalonada. Isto se deve ao fato das formulações com custo linear possuírem, na função objetivo, a soma de custos fixos de cada veículo utilizado com seu custo variável. Esse conceito foi revisto no FSMVRPTWSC, uma vez que, para este problema, a função objetivo deve ser a soma de custos fixos de acordo com o tipo de veículo e faixa de distância percorrida por cada um. Outras adaptações foram necessárias para a correta determinação de qual faixa de distância o veículo deve estar.

Testes computacionais foram realizados para verificar o bom funcionamento da formulação, sendo que em todas as instâncias testadas foram obtidas melhores soluções que as praticadas pela empresa. As instâncias apresentadas, porém, são de dimensões reduzidas para a realidade de uma empresa, limitados a oito clientes apenas. Assim, o desenvolvimento de procedimentos heurísticos seria relevante para aplicações práticas.

## Referências

**Bassi, S.** Pesquisa operacional aplicada à área de logística de transportes rodoviários em projetos de grande porte. *Trabalho de Formatura* - Escola Politécnica, USP. São Paulo, 2009.

**Clarke G.; Wright J.** (1964), Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points *Operations Research*, 12, 568–581

**Dantzig G.B.; Ramser J.H.** (1959), The truck dispatching problem, *Management Science*, 6, 80-91

**Dell’Amico, M.; Monaci, M.; Pagani, C.; Vigo, D.** (2007), Heuristic Approaches for the Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Transportation Science*, 41, 516 – 526

**Dullaert, W.; Janssens, G.K.; Sörensen, K.; Vernimmen, B.** (2002), New heuristics for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Journal of the Operational Research Society*, 53, 1232 – 1238

**Ghiani, G.; Laporte, G.; Musmanno, R.** *Introduction to Logistic Systems Planning and Control*, Ed. Wiley, Inglaterra, 2004.

**Golden, B.L.; Assad, A.; Levy, L.; Gheysens, F.** (1984), The fleet size and mix vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 11, 49-66

**Hoff, A.; Andersson H.; Christiansen, M.; Hasle, G.; Lokketagen, A.** (2010), Industrial aspects and literature survey: fleet composition and routing *Computers and Operations Research*, 37, 2041-2061, 2010.

**Lieb, R.; Bentz, B.** (2004), The use of third party logistics services by large American manufacturers, The 2004 Survey. *Transportation Journal*, 44(2), 5-15

**Liu, F.H., Shen, S.Y.** (1999), The fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Journal of Operational Research Society*, 50, 721–732

**Solomon, M.M.** (1987), Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time windows constraints. *Operations Research*, 35, 254-265