

## MODELAGEM MATEMÁTICA DA REDE LOGÍSTICA DE UMA INDÚSTRIA MULTI-COMMODITY

Me. Everton da Silveira Farias  
e-mail: [esfarias@ea.ufrgs.br](mailto:esfarias@ea.ufrgs.br)

Dr. Denis Borenstein  
e-mail: [denisb@ea.ufrgs.br](mailto:denisb@ea.ufrgs.br)

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Escola de Administração - Programa de Pós-Graduação em Administração  
Rua Washington Luiz, 855 - Bairro Centro, CEP: 90010-460  
Porto Alegre / RS – Brasil

### Resumo

Neste artigo são desenvolvidas duas modelagens matemáticas para o Projeto de Rede da Cadeia de Suprimentos de uma indústria responsável pela produção e distribuição multi-commodity. O investimento em uma nova fábrica exigiu a readequação do projeto logístico da empresa, implicando na readequação dos fluxos de matérias-primas e produtos acabados, assim como a abertura de novos Centros de Distribuição. A cadeia de suprimentos foi modelada utilizando-se uma formulação em programação inteira linear mista, no qual as facilidades são representadas pelos nós e os links pelos arcos. As implementações computacionais foram realizadas em AMPL e os resultados obtidos através do solver Cplex©. Para validar os modelos implementados, uma série de experimentos computacionais foi realizada. Os modelos foram aplicados com informações de demandas de mercado (market shares) e os custos de transporte foram incorporados ao trabalho. A aplicação dos modelos permitiu importantes decisões para o projeto logístico da empresa.

Palavras-chave: Otimização de Redes Logísticas, Multi-commodity, Modelagem Matemática, Modelagem da Cadeia de Suprimentos

### Abstract

This paper proposes two mathematical models for the Design of Network Supply Chain of an industry responsible for producing and distributing multi-commodity. Investment in new plant needed the readjustment of the company's logistics project, involving the upgrading of flows of raw materials and finished products, as well as opening of new Distribution Centers. Supply chain was modeled using an integer mixed programming formulation, in which the facilities are represented by nodes and links by arcs. The computational implementations were carried out in AMPL and results obtained from the solver Cplex©. To validate the model proposed a series of experiments was performed. The models were applied to the information demands of the market (market shares) and transport costs were incorporated into the work. The application of the models implied in important decisions for the logistic project company.

Keywords: Logistic Networks Optimization, Mathematical Models, Modeling the Supply Chain

## 1. Introdução

Nas indústrias, diversos problemas de decisão prática podem ser classificados como problemas de fluxo de rede, principalmente aqueles que envolvem operações logísticas. Neste contexto, a cadeia de suprimentos representa uma rede, na qual as organizações são responsáveis pelos diferentes processos e atividades que produzem valor na forma de produtos e serviços. A gestão da cadeia de suprimentos preocupa-se com os fluxos externos à empresa, e visa à coordenação e o controle de materiais, informações e finanças que vão do fornecedor ao consumidor, passando pelos fabricantes, atacadistas e varejistas (BALLOU, 2006). Através do planejamento, organização e controle efetivo das atividades corporativas, a logística visa prover um melhor nível de serviço, reduzindo custos operacionais e contribuindo com a prosperidade do negócio (BOWERSOX, 2006).

Neste sentido o Supply Chain Network Design é um dos problemas mais abrangentes relacionados à cadeia de suprimento, visto que envolve decisões em níveis operacionais, táticos e estratégicos (SHEN, 2005). Para Jang et al. (2002), definir a estrutura de rede de uma cadeia é determinar o número, a localização, a capacidade e os tipos de plantas e centros de distribuição (CDs) que serão utilizados. O projeto da rede também estabelece os canais de distribuição e as quantidades de materiais e itens para consumir, produzir e enviar aos fornecedores em cada nível de consumo da cadeia. O número de estágios é determinado com base na complexidade dos problemas fragmentados da rede (PIRKUL; JAYARAMAN, 1998).

Técnicas de modelagem através da Pesquisa Operacional são cada vez mais utilizadas para definir o arranjo da cadeia de suprimento a fim de proporcionar não apenas uma solução viável, mas, em muitos casos, uma solução ótima para o problema de Supply Chain Network Design. Na literatura é possível encontrar diversos modelos matemáticos, principalmente de programação linear, para o projeto de cadeias de suprimentos que incorporam diversos aspectos da esfera operacional, tática e estratégica.

Este artigo apresenta o desenvolvimento e aplicação de modelos matemáticos baseados em Programação Linear Inteira Mista para o projeto inicial da rede de suprimento de uma empresa que atua na indústria de produtos a base de borracha (commodity). A empresa está expandindo sua área de atuação instalando uma nova fábrica no Brasil. Devido a esta nova localização geográfica, torna-se necessário redefinir seu sistema logístico de distribuição. Por sua vez, esta empresa produz uma extensa lista de produtos. Desta forma, os fluxos das operações para atender as demandas das instalações através de eficientes fluxos de matérias-primas e produtos acabados demandam o desenvolvimento de modelos que incorporem a produção e distribuição multi-commodity. Para viabilizar a aplicação dos modelos no problema da empresa, estudos para identificar as demandas e os custos de transporte também foram realizados, assim como a construção de diferentes cenários, incorporando diferentes elementos estratégicos e operacionais.

Este trabalho é organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a revisão de literatura utilizada para desenvolver os modelos a serem apresentados e discutidos na Seção 3, que aborda a definição do problema, a formulação e modelagem matemática, assim como os principais aspectos da implementação e validação dos modelos. Na Seção 4, a aplicação dos modelos para o projeto inicial da cadeia de suprimento da empresa é apresentado e discutido em detalhes, e a Seção 5 apresenta as considerações finais em relação ao trabalho.

## 2. Revisão de Literatura

O desenvolvimento dos modelos matemáticos deste trabalho são amparos por importantes estudos relacionados à aplicação de modelagem para o projeto da rede de cadeia de suprimentos multi-commodity.

Geoffrion e Graves (1974) realizaram o estudo pioneiro que trata do projeto do sistema de distribuição incorporando multi-commodity através do método de Decomposições de Bender. Este trabalho é caracterizado por abordar capacidade das fábricas e CDs, fluxo de produtos e atendimento da demanda de consumidores em um ambiente multi-commodity. O modelo desenvolvido foi aplicado em uma indústria de alimentos que produzia em 14 localidades cerca de uma centena de produtos com distribuição nacional através de uma dúzia de CDs. Geoffrion e

Powers (1995) revisaram este modelo inicial, adicionando a modelagem inicial restrições de capacidade das instalações e a limitação do fluxo de produtos ao longo da cadeia de suprimentos. Os autores afirmam que encontrar a composição ótima para uma cadeia de suprimentos integrada é um problema muito difícil de resolver.

A partir do trabalho seminal desenvolvido por Geoffrion e Graves (1974) sobre o projeto de rede de distribuição multi-commodity, diversos modelos foram desenvolvidos para resolver problemas da cadeia de suprimentos, abordando questões relativas a transporte e armazenagem. Pirkul e Jayaraman (1996) tratam da integração da produção, transporte e planejamento de distribuição multi-commodity através um modelo de programação inteira mista para localização de fábricas e CDs com o objetivo de minimizar custos. Este modelo admite que cada zona de consumo seja abastecida somente por um centro de distribuição, denominada como estratégia single-source. Para solução matemática do modelo foram aplicadas técnicas de Relaxamento Lagrangeano e heurísticas. Este trabalho é expandido em Jayaraman e Pirkul (2001) pela incorporação de fornecedores de matéria-prima ao modelo, resultando em um problema de maior complexidade computacional. Neste modelo expandido é mantida a condição de abastecimento da demanda por um centro de distribuição. Os autores tratam o problema de múltiplos produtos através do agrupamento de produtos para transporte. Isto reduz drasticamente o número de variáveis e facilita a solução do modelo, porém minora a representatividade do modelo em relação ao problema real.

Desde então, diferentes abordagens de modelagem e solução vêm sendo descritas na literatura. Cole (1995) desenvolveu um modelo de programação inteira mista de múltiplos produtos para otimização do sistema integrado da cadeia de suprimentos e minimização dos custos estratégicos e operacionais. Neste caso, a abertura e fechamento de instalações foram considerados custos estratégicos; custos de produção, estoque e transportes foram incorporados aos custos operacionais. De acordo com Vidal e Goetschalckx (1997), o modelo apresentado por Cole (1995) é o mais indicado para projetos de rede da cadeia de suprimentos de integração interna. Papageorgiou, Rotstein e Shah (2001) demonstram e aplicaram um modelo integrado de cadeia de suprimentos para empresas da indústria farmacêutica. Os resultados obtidos mostraram a aplicabilidade da programação inteira mista em problemas de larga escala para encontrar a solução ideal em uma cadeia de suprimentos. Alonso-Ayuso et al. (2003) apresentaram um modelo em dois estágios para o planejamento estratégico da cadeia de suprimentos baseados em programação inteira binária e métodos estocásticos. O algoritmo proposto para solução baseia-se na coordenação algorítmica branch and fix. Shen (2005) apresenta o primeiro modelo de projeto da cadeia de suprimentos multi-commodity que inclui a economia em escala na cadeia de abastecimento em relação a custos. Um algoritmo para solução é proposto, sendo os resultados apresentados mais eficientes quando comparados a soluções de algoritmos já existentes. Ma e Suo (2006) desenvolveram um modelo para concepção de redes logísticas com vários produtos em três estágios. Um modelo de programação linear inteira mista foi utilizado para configurar a rede, e em seguida foram desenvolvidos um modelo de planejamento de estoques e um modelo de roteamento de veículos para identificar a menor rota entre os atacadistas e varejistas. Li, Chu e Prins (2009) abordaram o fluxo multi-commodity através do clássico problema Capacitated Plant Location Problem. O método de solução foi desenvolvido a partir da combinação de Relaxamento Lagrangeano e Tabu Search. A implementação computacional foi realizada utilizando Cplex© através de instâncias geradas de forma aleatória.

Não obstante estes modelos apresentem formulações matemáticas capazes de incorporar inúmeros aspectos do mundo real, poucos trabalhos demonstram resultados aplicados com experimentos em situações realísticas. Sendo assim, este artigo trata da aplicação de modelos matemáticos para solução do problema logístico de uma indústria multi-commodity considerando diferentes market shares.

### 3. Definição, Formulação e Modelagem do Problema

Este trabalho foi desenvolvido baseado na metodologia de modelagem de problemas através da Pesquisa Operacional (PO). Para Arenales et al. (2007), recentemente a PO tem sido chamada de ciência e tecnologia da decisão. A fundamentação científica está relacionada a ideias

e processos para identificar e modelar problemas de decisão, determinando os objetivos do tomador de decisão e as restrições pertinentes ao tema abordado.

### 3.1 Definição do Problema

A empresa é responsável pela produção de um conjunto de produtos a base de borracha. Esses produtos possuem diversos tamanhos, propriedades e especificações diferentes entre si, porém são constituídos, basicamente, das mesmas matérias-primas. As plantas produtoras (fábricas) são abastecidas por diversos fornecedores. O conjunto de centros de distribuições (CDs) recebe diversos tipos de produtos provenientes das plantas produtoras. Por sua vez, os centros de distribuição são responsáveis por enviar às zonas de consumo as quantidades de cada produto de acordo com a demanda. Desta forma, a rede da cadeia de suprimentos desta indústria é formada pelos fornecedores de matéria-prima, plantas produtoras, CDs e zonas de consumos de produtos.

De acordo com o projeto de expansão, esta empresa realiza a construção de uma nova fábrica no Brasil. Esta fábrica será responsável por suprir os CDs já existentes, assim como suprir novos CDs que poderão ser construídos de acordo com a nova posição geográfica da fábrica. O investimento nessa nova planta produtora não descarta a utilização das fábricas já existentes, porém ajustes de capacidades devem ser realizados nas mesmas. Ao tratar-se uma cadeia de distribuição de produtos físicos, existe a necessidade de transporte entre os atores dessa rede. Sendo assim, é necessário considerar os custos relativos ao transporte de matéria-prima e de produtos em cada estágio da cadeia. Devido à quantidade de produtos envolvidos nos fluxos da rede de suprimentos é necessário considerar as questões de capacidade de produção de cada fábrica assim como a capacidade de processamento de cada centro de distribuição. Consequentemente, os custos fixos e variáveis das instalações (especialmente os CDs) devem ser considerados.

O problema consiste, portanto, em determinar o conjunto de CDs necessários para atender a demanda de produtos das zonas de consumo com menor custo operacional. Para isso é necessário considerar as quantidades de cada uma das matérias-primas que devem ser adquiridas a partir de cada fornecedor, assim como a quantidade de produto que será produzida em cada fábrica. No entanto, por se tratar de um projeto, a empresa não tem definida a estratégia de distribuição em relação ao abastecimento das zonas de consumo. Desta forma, no problema abordado não se tem definido se uma zona de consumo poderá ser abastecida por mais de um CD ou se esse fornecimento será exclusivo (single-source). Sendo assim, nesse trabalho o problema é abordado através do desenvolvimento de dois modelos matemáticos para o projeto logístico da cadeia de suprimentos. A abordagem denominada “Single-source” pressupõe que cada zona de consumo recebe produtos somente de um CD. Já a segunda abordagem, chamada nesse trabalho de “Arc-based”, a estrutura de custos de transporte entre fábricas, CDs e clientes são apresentadas através de arcos que ligam cada um desses atores, sendo que não existe a exclusividade de atendimento de um cliente por um único CD.

### 3.2 Formulações e Modelagens Matemáticas

Os modelos matemáticos desenvolvidos foram baseados na formulação apresentada por Jayaraman e Pirkul (2001). As variáveis contínuas são definidas a partir da quantidade de matéria-prima dos fornecedores para fábricas e da quantidade de produtos enviados das fábricas para as zonas de consumo através dos CDs. A seguir é apresentada a notação comum às duas formulações elaboradas.

#### **Conjuntos:**

C: conjunto de zonas de consumos (clientes), indexado por  $c$ ;

W: conjunto de CDs (armazéns), indexado por  $w$ ;

F: conjunto de fábricas (plantas), indexado por  $f$ ;

R: conjunto de matérias-primas, indexado por  $r$ ;

V: conjunto de fornecedores (supridores), indexado por  $v$ ;

S: conjunto de produtos, indexado por  $s$ ;

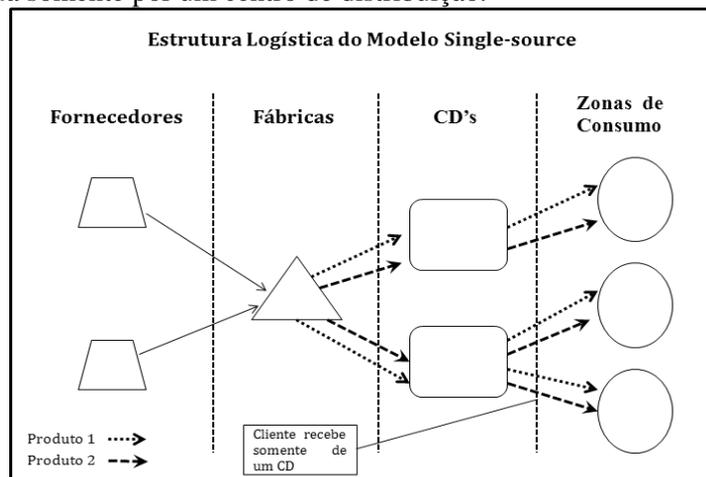
P: conjunto de caminhos (trajetos), indexado por  $p$ .

#### **Parâmetros:**

- $d_{sc}$ : demanda por produtos  $s \in S$  da zona de consumo  $c \in C$ ;
- $U_f$ : máximo de fábricas que podem ser abertas;
- $U_w$ : máximo de CDs que podem ser abertos;
- $u_{rs}$ : taxa de utilização de matéria-prima  $r \in R$  por unidade de produto acabado  $s \in S$ ;
- $u_s$ : taxa de utilização de capacidade por unidade de produto  $s \in S$ ;
- $CAP_w$ : capacidade de transferência dos CDs;
- $CAP_{vr}$ : capacidade de suprimento da matéria-prima  $r \in R$  do fornecedor  $v \in V$ ;
- $CAP_f$ : capacidade de produção da fábrica  $f \in F$ ;
- $CT_f^o$ : custo fixo anual de funcionamento da fábrica  $f \in F$ ;
- $CT_w^o$ : custo fixo anual de funcionamento do centro de distribuição  $w \in W$ ;
- $CT_w^g$ : custo unitário de transferência do centro de distribuição  $w \in W$ ;
- $CT_{fs}^p$ : custo unitário de produção do produto  $s \in S$  na fábrica  $f \in F$ ;
- $CT_{fvr}^t$ : custo unitário de transporte da matéria-prima  $r \in R$  do fornecedor  $v \in V$  para a fábrica  $f \in F$ ;
- $CT_{ps}^t$ : custo unitário de transporte do produto  $s \in S$  utilizando o caminho  $p \in P$ ;
- $CT_{fws}^t$ : custo unitário de transporte do produto  $s \in S$  utilizando a fábrica  $f \in F$  para o centro de distribuição  $w \in W$ ;
- $CT_{wcs}^t$ : custo unitário de transporte do produto  $s \in S$  utilizando o centro de distribuição  $w \in W$  para a zona de consumo  $c \in C$ ;
- $u_{min}$ : mínima demanda para abertura do centro de distribuição  $w \in W$ .

### 3.2.1 Formulação Matemática “Single-source”

A Fig. 1 ilustra o conceito da abordagem “Single-source”, mostrando que cada zona de consumo é atendida somente por um centro de distribuição.



**Figura 1: Arranjo Logístico do Modelo “Single-source”**

Nesta modelagem define-se o seguinte conjunto de variáveis de decisão:

$x_{fws}$ : quantidade de produto  $s \in S$  enviada da fábrica  $f \in F$  para o centro de distribuição  $w \in W$ .

$y_{vfr}$ : quantidade de matéria-prima  $r \in R$  enviada do fornecedor  $v \in V$  para a fábrica  $f \in F$ .

$z_w$ : variável binária que assume o valor 1 se o centro de distribuição  $w \in W$  está selecionado, e 0 em caso contrário.

$g_{wc}$ : variável binária que indica se centro de distribuição  $w \in W$  atende a demanda da zona de consumo  $c \in C$ .

O problema, considerando as variáveis de decisão definidas e uma abordagem “Single-source”, pode ser formulado como um modelo de programação linear inteira mista como se segue.

**Modelo “Single-source”:**

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{w \in W} CT_w^o z_w + \sum_{w \in W} \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} CT_w^g d_{sc} g_{wc} + \sum_{f \in F} \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} CT_{fs}^p x_{fws} \\
 & + \sum_{v \in V} \sum_{f \in F} \sum_{r \in R} CT_{fvr}^t y_{vfr} + \sum_{f \in F} \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} CT_{fws}^t x_{fws} \\
 & + \sum_{w \in W} \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} CT_{wcs}^t d_{sc} g_{wc} \quad (1a)
 \end{aligned}$$

St:

$$\sum_{w \in W} g_{wc} = 1 \quad \forall c \in C \quad (1b)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{s \in S} d_{sc} g_{wc} \leq CAP_w z_w \quad \forall w \in W \quad (1c)$$

$$\sum_{w \in W} z_w \leq U_w \quad (1d)$$

$$\sum_{c \in C} d_{sc} g_{wc} \leq \sum_{f \in F} x_{fws} \quad \forall w \in W, \forall c \in C \quad (1e)$$

$$\sum_{f \in F} y_{vfr} \leq CAP_{vr} \quad \forall r \in R, \forall v \in V \quad (1f)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S} u_{rs} x_{fws} \leq \sum_{v \in V} y_{vfr} \quad \forall r \in R, \forall f \in F \quad (1g)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S} u_s x_{fws} \leq CAP_f \quad \forall f \in F \quad (1h)$$

$$\sum_{f \in F} \sum_{s \in S} x_{fws} \geq u_{min} \quad \forall w \in W \quad (1i)$$

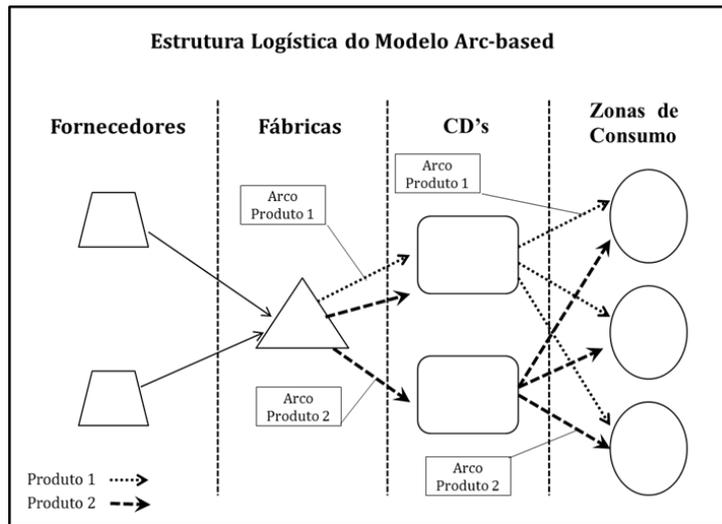
$$z_w = \{0,1\} \quad \forall w \in W \quad (1j)$$

$$g_{wc} = \{0,1\} \quad \forall w \in W, \forall c \in C \quad (1k)$$

A função objetivo (1a) minimiza a soma do custo anual dos CDs, os custos de processamento dos CDs, os custos de produção das fábricas, os custos de transporte de matéria-prima para as fábricas e os custos de transporte das fábricas para as zonas de consumo através dos CDs. A restrição (1b) assegura que cada zona de consumo é atribuída a um único centro de distribuição, respeitando a abordagem “Single-source”. A restrição (1c) garante que a capacidade de cada centro de distribuição não é violada. A restrição (1d) limita o número de CDs a serem abertos. A restrição (1e) assegura que os CDs possuem capacidade suficiente para atender as zonas de consumo. A restrição (1f) garante que a capacidade do fornecedor abastecer a fábrica com matéria-prima é respeitada. A restrição (1g) apresenta que a relação entre matéria-prima e produtos deve ser satisfeita. A restrição (1h) garante que as capacidades das fábricas são respeitadas. A restrição (1i) impõe a quantidade mínima de produtos para abertura de um centro de distribuição. As restrições (1j) e (1k) são as condições de integralidade das variáveis binárias.

### 3.2.2 Formulação Matemática “Arc-based”

O modelo de rede da cadeia de suprimentos denominado “Arc-based” propõe a utilização de arcos de transporte entre as fábricas, os CDs e as zonas de consumo. As variáveis de decisão são definidas sobre os arcos da rede, representando os fluxos de produtos e matérias-primas entre cada um dos elementos em dois níveis diferentes da rede de suprimentos. Essa formulação pode ser chamada de one-to-many, pois o modelo possibilita a um “cliente” receber produtos de mais de um centro de distribuição. Nesta formulação foi incluída uma estrutura que limita a quantidade de fábricas que podem ser abertas. A Fig. 2 apresenta a estrutura da cadeia de suprimentos a partir da abordagem “Arc-based”.



**Figura 2: Arranjo Logístico do Modelo "Arc-based"**

A abordagem "Arc-based" proporciona que os custos de transportes sejam definidos através de arcos entre as fábricas, CDs e zonas de consumo de forma independente. Para essa modelagem são definidas as seguintes variáveis de decisão:

$x_{wc}^s$ : quantidade de produto  $s \in S$  transportada do centro de distribuição  $w \in W$  para a zona de consumo  $c \in C$ ;

$y_{vf}^r$ : quantidade de matéria-prima  $r \in R$  enviada do fornecedor  $v \in V$  para a fábrica  $f \in F$ ;

$z_{fw}^s$ : quantidade de produto  $s \in S$  transportada da fábrica  $f \in F$  para o centro de distribuição  $w \in W$ ;

$a_w$ : variável binária, 1 se o CD  $w \in W$  está selecionado, e 0 caso contrário;

$b_f$ : variável binária, 1 se a fábrica  $f \in F$  está selecionada, e 0 caso contrário.

O problema pode ser formulado como se segue:

**Modelo "Arc-based":**

$$\begin{aligned} \min \sum_{w \in W} CT_w^o a_w + \sum_{w \in W} CT_f^o b_f + \sum_{f \in F} \sum_{s \in S} \sum_{w \in W} CT_{fs}^p z_{fw}^s + \sum_{w \in W} \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} CT_w^g x_{wc}^s \\ + \sum_{f \in F} \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} CT_{fvr}^t y_{vf}^r + \sum_{f \in F} \sum_{w \in W} \sum_{s \in S} CT_{fws}^t z_{fw}^s \\ + \sum_{w \in W} \sum_{c \in C} \sum_{s \in S} CT_{wcs}^t x_{wc}^s \end{aligned} \quad (2a)$$

St:

$$\sum_{w \in W} x_{wc}^s \geq d_c^s \quad \forall s \in S, \forall c \in C \quad (2b)$$

$$\sum_{c \in C} x_{wc}^s = \sum_{f \in F} z_{fw}^s \quad \forall s \in S, \forall w \in W \quad (2c)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{s \in S} x_{wc}^s \leq CAP_w a_w \quad \forall w \in W, \forall s \in S \quad (2d)$$

$$\sum_{f \in F} y_{vf}^r \leq CAP_{vr} \quad \forall r \in R, \forall v \in V \quad (2e)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S} u_{rs} z_{fw}^s \leq \sum_{v \in V} y_{vf}^r \quad \forall r \in R, \forall f \in F \quad (2f)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{s \in S} u_s z_{fw}^s \leq CAP_f b_f \quad \forall f \in F \quad (2g)$$

$$\sum_{w \in W} a_w \leq U_w \quad (2h)$$

$$\sum_{f \in F} b_f \leq U_f \quad (2i)$$

$$a_w = \{0,1\} \quad \forall w \in W \quad (2j)$$

$$b_f = \{0,1\} \quad \forall f \in F \quad (2k)$$

A função objetivo (2a) minimiza a soma do custo anual dos CDs, dos custos de processamento dos CDs, dos custos de produção das fábricas, dos custos de transporte de matéria-prima para as fábricas e dos custos de transporte de produtos das fábricas através dos CDs. A restrição (2b) assegura que as demandas dos clientes (zonas de consumo) são atendidas. A restrição (2c) assegura que a quantidade de produto transportada da fábrica é igual a quantidade enviada pelos CDs para as zonas de consumo. A restrição (2d) garante que a capacidade de cada centro de distribuição não é violada. A restrição (2e) assegura a capacidade de fornecimento de matéria-prima pelos fornecedores. A restrição (2f) garante a relação entre a quantidade de matéria-prima e a quantidade de produto. A restrição (2g) assegura que a capacidade das fábricas é respeitada. As restrições (2h) e (2i) limitam o número de CDs e fábricas que podem ser abertos, respectivamente. As restrições (2j) e (2k) são as condições de integralidade das variáveis binárias.

### 3.3 Implementação e Validação Computacional

As implementações computacionais foram realizadas no ambiente ILOG OPL Studio©, versão 6.3 em linguagem AMPL usando o solver Cplex(c) versão 12.2. Para os experimentos computacionais utilizamos um PC com processador Core™ 2 Duo de 2,4Ghz e RAM de 4Gb. A realização de testes e experimentos possibilitou verificar e validar a funcionalidade dos modelos implementados. Estes experimentos tiveram como finalidade definir a capacidade do Cplex© de resolver diferentes instâncias, principalmente em relação ao tamanho das mesmas. As diferentes instâncias geradas deram ênfase em aplicar os modelos em situações de diferentes quantidades de CDs, produtos e zonas de consumo de forma semelhante às implementações apresentadas nos trabalhos de Park (2005), Li et al. (2009), Golmohammadi (2010) e Lee e Kwon (2010). Com isso, as implementações se aproximam em relação à quantidade de restrições e variáveis, às instâncias demonstradas nos artigos de Jayaraman e Pirkul (2001) e Vidal e Goetschalckx (2001). Considerando a magnitude do problema a ser resolvido para a empresa foco do estudo de caso, os resultados apresentados em ambas as abordagens foram bastante satisfatórios e validaram a aplicação dos modelos “Arc-based” e “Single-source” para o projeto inicial da cadeia de suprimento da empresa a ser descrito na próxima seção.

## 4. Estudo de Caso

Nesta seção apresentamos a aplicação dos modelos matemáticos implementados para solucionar o problema do projeto inicial da rede da cadeia de suprimentos da indústria de produtora de commodities foco deste estudo. Para a aplicação dos modelos foi realizado um estudo preliminar para definir a demanda dos principais mercados atendidos pela empresa, representados na Tabela 2. Dada a grande quantidade de produtos foram definidas três famílias de produtos para pesquisa de mercado denominadas: Commodity 1, Commodity 2 e Commodity 3. Após a definição dos principais polos de consumo (261 zonas de consumo), foi necessário mapear as distâncias de todas as zonas de consumo até as localidades onde os CDs poderiam ser localizados. A partir da definição das distâncias foi possível determinar o custo de transporte para cada localidade baseado no custo médio de transporte de cada grupo de produtos. Diferentes cenários (market shares) foram elaborados para representar ao máximo as situações reais de operação. A aplicação dos modelos no estudo de caso é apresentada neste artigo no cenário Market Share 3, visto que este cenário melhor representa a demanda real da empresa. A partir de discussões com os executivos da empresa foram definidos diversos cenários da futura operação, considerando diferentes market shares, baseados em estratégias que podem ser adotadas pela empresa. A Tabela 2 apresenta as demandas anuais calculadas para cada mercado e que servem de base para a definição dos market shares.

**Tabela 2: Áreas e demandas do mercado de commodities**

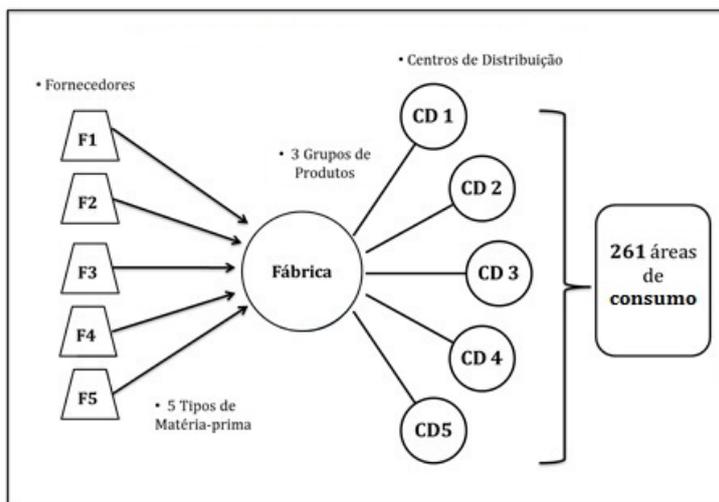
Mercado	Commodity 1		Commodity 2		Commodity 3		TOTAL	
	Áreas	Demandas	Áreas	Demandas	Áreas	Demandas	Áreas Comuns	Demandas
Reposição	181	556.951	107	36.180.162	105	6.781.554	229	43.518.667
Original	8	658.996	16	6.366.042	8	3.405.523	32	10.430.561
<b>Total</b>	<b>189</b>	<b>1.215.947</b>	<b>123</b>	<b>42.546.204</b>	<b>113</b>	<b>10.187.077</b>	<b>261</b>	<b>53.949.228</b>

As demandas de cada zona de consumo, para a execução dos modelos, foram computadas a partir da definição dos diferentes market shares para cada mercado. Estes market shares representam diferentes cenários que procuram representar diferentes estratégias para atuar no mercado nacional. No entanto, existe uma preocupação especial em atender a demanda regional do estado onde se localiza a fábrica desta empresa, representada no Quadro 1 pela linha “Original Estado”. Sendo assim, este estudo considera o cenário “Market Share 3” para aplicação dos modelos propostos neste artigo, pois este cenário prioriza o mercado regional.

Cenários	Mercado	Commodity 1	Commodity 2	Commodity 3
Market Share 3	Reposição	20%	10%	15%
	Original	20%	10%	15%
	Original Estado	35%	10%	15%

**Quadro 1: Cenário “Market Share 3”**

Em síntese, a Fig. 3 apresenta o arranjo inicial do projeto da cadeia de suprimentos da empresa, composto por cinco fornecedores de cinco tipos diferentes de matérias-primas (responsável por 90% dos componentes totais das commodities). Desta forma, somente a nova planta a ser construída foi considerada. Os três grupos de produtos agregam dados referentes a 160 commodities. O fornecimento de matéria-prima é determinado em quantidade suficiente para atender a única fábrica disponível no cenário. Por sua vez, a capacidade de produção da fábrica é suficiente para atender as demandas de acordo com o market share definido pela empresa. As informações de capacidade e custos fixos, para as instalações consideradas, foram determinadas de acordo com as informações apresentadas pela empresa.



**Figura 3: Arranjo inicial do projeto da cadeia de suprimentos**

O cenário Market-share 3 demonstrado no Quadro 1 apresenta a participação de mercado da Commodity 1 no mercado original regional. A empresa considera este cenário bastante factível e sugeriu utilizar esse cenário para analisar a configuração logística dos centros de distribuição a partir desta perspectiva. A Tabela 3 apresenta a quantidade de demanda de cada um dos produtos para seus respectivos mercados. O total de produtos envolvidos nesse cenário é de 6.070.523 para 261 áreas de demanda.

**Tabela 3: Demanda Market share 3**

Mercado	Commodity 1	Commodity 2	Commodity 3	<b>Demanda</b>
Reposição	111.460	3.618.068	1.012.853	<b>4.742.381</b>
Original	180.700	636.609	510.833	<b>1.328.142</b>
<b>Total</b>	<b>292.160</b>	<b>4.254.677</b>	<b>1.523.686</b>	<b>6.070.523</b>

A execução dos modelos “single-source” e “arc-based” é realizada com o objetivo de determinar o menor custo de operação restringindo a configuração da rede da cadeia de suprimentos a utilizar somente 2 (dois) centros de distribuição. Esta restrição tem como objetivo identificar alternativas de distribuição com menor custo de investimento em novas instalações, neste caso os centros de distribuição.

O centro de distribuição 5 tem uma posição geográfica privilegiada em relação aos demais, pois se localiza próximo à fábrica e a áreas de grande demanda da Commodity 1, a qual é priorizada em relação à participação no mercado regional. Sendo assim, as instâncias realizadas para o Market-share 3 apresentam a limitação de 2 (dois) centros de distribuição e a imposição de abertura do centro de distribuição 5. Ainda como restrição para o cenário Market-share 3, não é considerada a abertura do centro de distribuição 2, visto que o mesmo tem proximidade geográfica com o centro de distribuição 5, e não seria interessante utilizar somente esses dois centros de distribuição para compor a rede logística nesse tipo de indústria.

Apresentado os aspectos que envolvem as execuções dos modelos a partir do cenário Market-share 3, a primeira execução representa a configuração da rede de suprimentos para o modelo “single-source” considerando a abertura dos centros de distribuição 1 e 5. Nesta execução o custo operacional é de \$83.920.572 e o tempo computacional é 6,41 segundos. A segunda execução do modelo “single-source” propõe a distribuição dos produtos através dos centros de distribuição 3 e 5 e apresenta o custo operacional de \$93.663.497 em tempo computacional de 6,10 segundos. A terceira execução do modelo “single-source” para o cenário Market-share 3 é restrita à abertura dos centros de distribuição 4 e 5. Nesta instância o custo total da operação é de \$104.956.316 com tempo computacional de 5,57 segundos.

O cenário Market-share 3 foi submetido às 3 (três) execuções de acordo com as restrições de utilização de centros de distribuição. A Tabela 4 apresenta os principais elementos para análises das instâncias executadas a partir da abordagem “single-source”.

**Tabela 4: Análise dos resultados: “Single-source” 2 CD’s**

<b>Modelo</b>	<b>Informações e estrutura</b>			
	CD's abertos	Custo \$	Tempo (s)	Var. % Custo
Single-source	1 e 5	\$83.920.572	6,41	
Single-source	3 e 5	\$93.663.497	6,10	11,61%
Single-source	4 e 5	\$104.956.316	5,57	25,07%

Observa-se que as instâncias que propõem a utilização dos centros de distribuição 1 e 5 apresentam o menor custo operacional para compor a rede da cadeia de suprimentos. O custo operacional da instância que utiliza os centros de distribuição 3 e 5 é 11,61% superior em relação ao menor custo obtido através da abertura dos centros de distribuição 1 e 5. O custo operacional utilizando os centros de distribuição 4 e 5 é 25,07% maior em comparação à solução ótima encontrada na execução “single-source” usando os centros de distribuição 1 e 5.

Desta forma, a solução viável que propõe a abertura dos centros de distribuição 1 e 5 possui o menor custo operacional através da abordagem “single-source”. O tempo computacional para encontrar a solução ótima em cada uma das instâncias não apresenta diferenças significativas em relação à performance.

Após realizar as execuções “single-source”, a aplicação da abordagem “arc-based” é executada a partir do cenário Market-share 3 utilizando a mesma sistemática aplicada no modelo “single-source”. Desta forma, os resultados obtidos através da primeira execução do modelo “arc-based” com a restrição de utilização dos centros de distribuição 1 e 5 apresenta o custo total da

operação de \$80.031.564 em tempo computacional de 6,05 segundos. Na segunda execução, o custo operacional, utilizando os centros de distribuição 3 e 5, é de \$88.414.182, sendo a solução encontrada em 6,14 segundos. Na terceira execução a abordagem “arc-based” apresenta um custo operacional de \$95.278.179 com a abertura dos centros de distribuição 4 e 5 e o tempo computacional foi 6,12 segundos. De acordo com as execuções do modelo “arc-based” apresentadas é possível analisar os resultados através da Tabela 5.

**Tabela 5: Análise dos resultados: “Arc-based” 2 CD’s**

Modelo	Informações e estrutura			
	CD's abertos	Custo \$	Tempo (s)	Var. % Custo
Arc-based	1 e 5	\$80.031.564	6,05	
Arc-based	3 e 5	\$88.414.182	6,14	10,47%
Arc-based	4 e 5	\$95.278.179	6,12	19,05%

Em primeira análise, o custo total utilizando a abordagem “arc-based” através da abertura dos centros de distribuição 1 e 5 é o menor entre as 3 (três) configurações propostas. Os custos das instâncias utilizando os centros de distribuição 3 e 5 e os centros de distribuição 4 e 5 são 10,47% e 19,05% superiores ao menor custo total encontrado (abertura dos centros de distribuição 1 e 5), respectivamente. Comparando os modelos em relação aos tempos computacionais não há diferença significativa entre as 3 (três) instâncias executadas.

A Tabela 6 possibilita analisar os resultados obtidos a partir das instâncias realizadas no cenário Market-share 3. Através da análise dos resultados é possível identificar que as abordagens “arc-based” apresentam menor custo quando comparadas com as execuções “single-source”.

**Tabela 6: Análise dos resultados: cenário Market-share 3**

Modelo	Informações e estrutura			
	CD's abertos	Custo \$	Tempo (s)	Var. % Custo
Single-source	1 e 5	\$83.920.572	6,41	
Arc-based	1 e 5	\$80.031.564	6,05	-4,63%
Single-source	3 e 5	\$93.663.497	6,10	
Arc-based	3 e 5	\$88.414.182	6,14	-5,60%
Single-source	4 e 5	\$104.956.316	5,57	
Arc-based	4 e 5	\$95.278.179	6,12	-9,22%

Neste sentido, a solução viável que utiliza o conjunto de centros de distribuições 1 e 5 representa o menor custo em relação às outras combinações apresentadas. No entanto, os tempos computacionais apresentam diferenças consideradas irrelevantes.

Ao estabelecer as demandas para os 3 (três) grupos de produtos foi possível analisar a funcionalidade dos modelos, assim como identificar os potenciais centros de distribuição para compor a cadeia de suprimentos. Em qualquer das situações, os modelos apresentam resultados satisfatórios em relação à qualidade da solução e ao tempo computacional necessário para resolver as instâncias. Ao utilizar a abordagem “arc-based”, a empresa não aplica a exclusividade de fornecimento de produtos de um centro de distribuição para uma área de demanda. Dessa forma, aumenta a necessidade de controle da empresa em gerir o atendimento das zonas de consumo, assim como a necessidade de estudos mais apurados em relação à demanda de cada um dos produtos.

## 5. Considerações Finais

O objetivo do trabalho, conforme apresentado na introdução, foi desenvolver a modelagem matemática para atender o projeto logístico de uma indústria de multi-commodity, visando minimizar os custos totais de operação. Para realizar esse objetivo, foi necessário formular diferentes modelos matemáticos, visto que a empresa não tem uma definição em relação à estratégia de distribuição.

É importante ressaltar que a metodologia de Pesquisa Operacional utilizada neste trabalho permitiu desenvolver formulações e implementações que apresentaram importantes resultados para a viabilização do projeto logístico da empresa. Embora o foco deste trabalho seja determinar quais os CDs devem ser abertos para compor a rede logística da indústria, os modelos desenvolvidos abrangem toda a rede da cadeia de suprimentos. Desta forma, os modelos determinam a quantidade de matérias-primas que deve ser fornecida, assim como quais fornecedores devem suprir cada uma das fábricas, a partir das demandas de cada produto para cada zona de consumo. Para o cenário Market Share 3 os modelos “Single-source” e “Arc-based” apresentam soluções para o projeto logístico da cadeia de suprimentos que atendem integralmente as demandas, assim como o fornecimento de matéria-prima em quantidade e custos alinhados à proposta de minimização do custo operacional.

Os modelos construídos apoiaram importantes decisões em relação ao projeto logístico da cadeia de suprimentos da indústria foco desta pesquisa. Neste sentido, a aplicação das modelagens no problema possibilitou identificar o arranjo ideal para otimização da cadeia de suprimentos desta indústria multi-commodity.

### Referências

- ARENALES, M. N.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- ALONSO-AYUSO, A.; ESCUDERO, L.F.; GARIN, A.; ORTUNO, M. T.; PERES, G. An approach for strategic supply chain planning under uncertainty based of stochastic 0-1 programming. **Journal of Global Optimization**, v. 26, 2003. p. 97-124.
- BALLOU, R. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos**. Porto Alegre: 5a Ed., Bookman, 2006.
- BOWERSOX, D. J.; CLOSS, D. J.; COOPER M. B. **Gestão logística de cadeias de suprimentos**. Porto Alegre: Bookman, 2006.
- COLE, M. H. **Service considerations and the design of strategic distribution systems**. Doctoral Dissertation. Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, 1995.
- GEOFFRION A. M.; GRAVES, G. W. Multicommodity distribution system design by benders decomposition. **Management Science**, v. 20, n.5, 1974. p. 822-844.
- GEOFFRION, A. M.; POWERS, R. F. Twenty years of strategic distribution system design: An evolutionary perspective. **Interfaces**, v. 25, 1995. p. 105-128.
- GOLMOHAMMADI, V.; AFSHARI, H.; HASANZADEH, A.; RAHIMI, M. A heuristic approach for designing a distribution network in a supply chain system. **African Journal of Business Management**, v.4, n.3, 2010, p.308-311.
- JANG, Y. J.; JANG, S. Y.; CHANG, B. M.; PARK, J. A combined model of network design and production/distribution planning for a supply network. **Computers & Industrial Engineering**, v. 43, 2002. p. 269-281.
- JAYARAMAN, V.; PIRKUL, H. Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodity. **European Journal of Operational Research**, v. 133, 2001. p. 394-408.
- LEE, Y. H.; KWON, S. G., The hybrid planning algorithm for the distribution center operation using tabu search and decomposed optimization. **Expert Systems with Applications**, v. 37, 2010. p. 3093-3103.
- LI, J.; CHU, F.; PRINS, C. Lower and upper bounds for a capacitated plan location problem with multicommodity flow. **Computers & Operations Research**, v. 36, 2009. p. 3019-3030.
- MA, H.; SUO, C. A model for designing multiple products logistics networks. **International Journal of Physical Distribution and Logistics Management**, v. 36, n. 2, 2006. p. 127-135.
- PAPAGEORGIOU, G. E.; ROTSTEIN, G. E.; SHAH, N. Strategic supply chain optimization for the pharmaceutical industries. **Industrial Engineering of Chemical Research**, v. 40, 2001. p. 275-286.
- PIRKUL, H.; JAYARAMAN, V. Distribution planning in a multi-Commodity tri-echelon system. **Transportation Science**, v. 30, n. 4, 1996, p. 291-302.

\_\_\_\_\_. A multi-commodity, multi-plant, capacitated facility location problem: Formulation and efficient heuristic solution. **Computer and Operations Research**, v. 25, n. 10, 1998. p. 869-878.

SHEN, Z.J. A multi-commodity supply chain design problem. **Institute of Industrial Engineers Transactions**, v. 37, 2005. p. 753-762.

VIDAL, C. J.; GOETSCHALCKX, M. Strategic production-distribution models: A critical review with emphasis on global supply chain models. **European Journal of Operational Research**, v. 98, 1997. p. 1-18.