UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA MIXTA PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHICULOS EN EL TRANSPORTE ESCOLAR

Nicole Diana Araya Sanhueza
Universidad del Bío-Bío
Avenida Collao 1202, Concepción, Chile
naraya@alumnos.ubiobio.cl

Carlos Enrique Obreque Níñez
Universidad del Bío-Bío
Avenida Collao 1202, Concepción, Chile
cobreque@ubiobio.cl

Germán Enrique Paredes Belmar
Pontificia Universidad Católica de Chile
Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile
geparede@uc.cl

Resumen

El problema de Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar (RVTE) consiste en localizar una o varias rutas sobre una red, con origen desconocido y destino común, las que establecen paraderos por los cuales los buses deben recoger a los estudiantes que ahí se encuentren para trasladarlos al establecimiento educacional.

En este problema se considera que los buses tienen una capacidad homogénea. Todos los estudiantes deben ser trasladados a la escuela y aquellos que no se encuentren en un paradero deben ser asignados a uno de ellos. El objetivo es minimizar los costos del recorrido de cada bus y los costos de asignación de los estudiantes a sus respectivos paraderos.

En este trabajo se presenta un modelo de Programación Lineal Entera Mixta basado en Flujo Multicommodity. Se utiliza el solver Cplex, con AMPL, para encontrar soluciones óptimas en instancias pequeñas que muestran la efectividad del modelo.

Palabras claves: Ruteo de vehículos, Localizaciones extensas, Transporte escolar.

Abstract

The school bus vehicle routing problem relies on locating one or more routes on a network, with unknown origin point and a common destination point, establishing stops where the students will be waiting for the bus to pick them up and take them to the school.

This problem considers a homogeneous fleet and has a passenger limited capacity. That all students must be taken to school and those who live outside the route, should be assigned to bus stop in it in order to minimize transport and student's allocation costs.

A Mixed Linear Programming Model based on Multicommodity Flow is presented in this work. Cplex with AMPL was used to find optimal solutions in small instances to show its effectiveness.

Key words: Vehicle routing, Extensive locations, School transportation.

Main Area

Logística y Transporte, Programación Matemática, Teoría y algoritmos en grafos.

1. Introducción

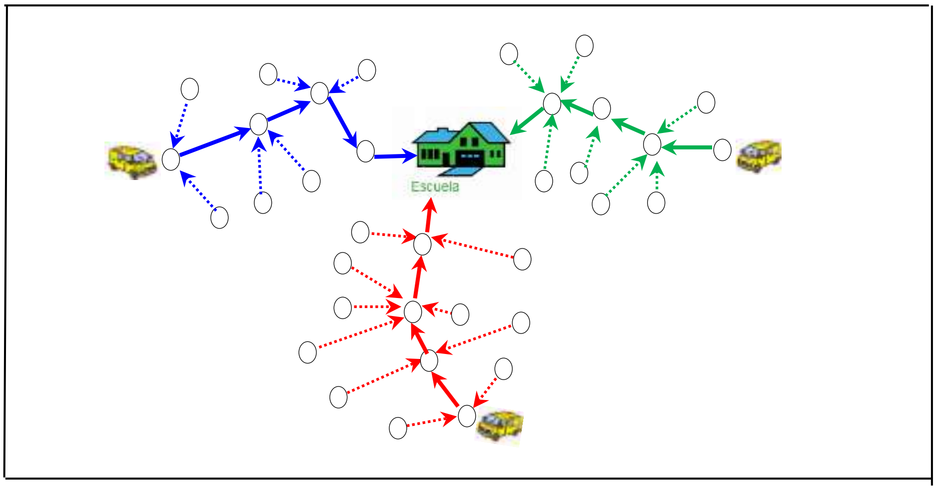
Un Problema de Localización de Instalaciones Extensas (LIE) consiste en localizar estructuras en la forma de un path, de un árbol, de un ciclo o de un sub-grafo en una red, de tal manera de cubrir a todos sus nodos, Messa y Boffey (1996), Labbé et al. (1998). El problema LIE es un problema NP-HARD, Laporte (1988).

El problema RVTE se considera como un caso particular del problema de Localización de Instalaciones Extensas con Restricciones de Capacidad (LIERC). En efecto, en este caso las rutas (o paths) son las estructuras de nodos que se quieren localizar sobre la red. Más aún, el problema RVTE es una generalización del Median Shortest Path Problem, Current et al. (1987), Paredes y Obreque (2009), pues, al incorporar capacidad en los buses, se deben localizar varios paths en forma simultánea.

El problema RVTE consiste en localizar una o varias rutas sobre una red, con origen desconocido y destino común, en donde se establecen paraderos por los cuales los buses deben recoger a los estudiantes que ahí se encuentren para trasladarlos al establecimiento educacional. Todos los estudiantes deben ser trasladados a la escuela y aquellos que no se encuentren en un paradero deben ser asignados a uno de ellos.

El objetivo es minimizar los costos del recorrido de cada bus y los costos de asignación de los estudiantes a sus respectivos paraderos. El costo de asignación se considera proporcional a la distancia total que deben caminar los estudiantes a sus correspondientes paraderos asignados. Los buses tienen una capacidad limitada de pasajeros que se tiene que respetar.

Figura 1. El Problema de Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar



En la Figura 1 se muestra un esquema del problema con tres rutas. Las flechas continuas corresponden a las rutas principales por donde pasa el bus y las flechas segmentadas corresponden a las asignaciones de los clientes hacia los paraderos.

En este trabajo se presenta un modelo de Programación Lineal Entera Mixta basado en Flujo Multicommodity. Se utiliza el solver Cplex, con AMPL, para encontrar soluciones óptimas en instancias pequeñas que muestran la efectividad del modelo.

Diferentes variaciones del problema RVTE han sido estudiadas en las últimas dos décadas. En Park y Kim (2010) se presenta una revisión extensa acerca del problema RVTE. La primera publicación relacionada con este problema se presenta en Newton y Thomas (1969), y constantemente ha existido la necesidad de aplicarles condiciones reales a dicho problema. En Li y Fu (2002) se considera que hay muchas visiones correctas de cómo abordar el RVTE. De hecho, el RVTE ha sido considerado como una combinación de problemas más simples, pero no menos complejos, Bodin et al. (1983).

En Desrosiers et al. (1981) se establece que el problema RVTE está compuesto por un conjunto de pequeños sub-problemas. Los autores proponen la siguiente descomposición:

- Preparación de datos
- Selección de Paraderos
- Generación de la ruta del bus
- Ajuste a los horarios de la escuela
- Programación de los buses

Dentro de los distintos trabajos relacionados con el problema RVTE, es posible distinguir distintas variantes. Algunas de ellas se enfocan en: el área urbano/rural; problemas de horario diurno/vespertino; traslado de estudiantes de educación especial; múltiples escuelas; flota de vehículos homogénea/heterogénea; múltiples objetivos, etc. Esta clasificación se expande aún más si se considera, también, el tipo de restricciones utilizadas, por ejemplo:

- Tiempo máximo que un pasajero viaja en el bus
- Distancia máxima que un usuario camina hacia un paradero
- Capacidad del bus
- Ventanas de tiempo de las escuelas y de los usuarios
- Cantidad máxima de alumnos que esperan en un paradero
- Número mínimo de alumnos necesarios para generar una ruta

En la Tabla 1 se muestra un resumen de los principales trabajos realizados por investigadores que tienen relación con el problema RVTE que se aborda en este estudio. En la primera columna se muestra la referencia bibliográfica; en la segunda columna se indica si en el trabajo se considera una o múltiples escuelas; luego si se ha trabajado en un área urbana o rural; a continuación si se considera uno o múltiples objetivos y, en la última columna, si se incluye o no la capacidad del vehículo.

Tabla 1: Clasificación de los trabajos relacionados con el problema RVTE

Referencia	Escuelas	Urbano o Rural	Múltiple Objetivo	Capacidad
Russell and Morrel (1986)	Múltiples	Urbano	Si	Si
Chen et al. (1990)	Múltiples	Rural	Si	Si
Thangiah and Nygard (1992)	Una	Rural	No	Si
Corberan et al. (2002)	Una	Rural	No	Si
Li and Fu (2002)	Una	Urbano	No	Si
Woo (2005)	Una	Urbano	Si	Si
Ripplinger (2005)	Una	Rural	No	Si
Spada et al. (2005)	Múltiples	Rural	Si	Si
Schittekat et al. (2006)	Una	Urbano	No	Si
Bektas and Elmastas (2007)	Una	Urbano	No	Si
Füngenschuh (2009)	Múltiples	Rural	No	Si
Riera and Salazár (2011)	Una	Urbano	No	Si
Albornoz and Johns (2011)	Una	Urbano	No	Si
Park et al. (2012)	Múltiples	Urbano	No	Si
Euchi and Mraihi (2012)	Una	Urbano	No	Si

Además de la clasificación anterior, las investigaciones también se pueden clasificar por el método de resolución que se utilice para resolver el problema RVTE. La mayoría de los investigadores utiliza procedimientos heurísticos y sólo algunos trabajos lo abordan desde una perspectiva exacta. En la Tabla 2 se muestran algunas de las investigaciones que consideran modelos matemáticos en, al menos, una de las partes del problema RVTE. El problema de Ruteo de Vehículos para el Trasporte Escolar es usualmente formulado mediante un modelo de Programación Lineal Entera Mixta (PLEM) o Programación No Lineal Entera (PENL).

Tabla 2: Modelos Matemáticos utilizados en el problema RVTE

Referencia	**Modelo matemático**
Li and Fu (2002)	PENL
Ripplinger (2005)	PLEM
Spada et al. (2005)	PENL
Kara and Bektas(2006)	PLE
Hanley (2007)	PENL
Bektas and Elmastas (2007)	PLEM
Fügenschuh (2009)	PLEM
Albornoz and Johns (2011)	PLE
Riera and Salazár (2011)	PLEM
Park et al. (2012)	PLEM

En la Tabla 3 se muestran los distintos trabajos según los objetivos propuestos: minimizar el número de buses (B); minimizar las distancias recorridas por las rutas (LR) y Equidad (E) en el balance de carga. En Spada et al. (2005) se considera un criterio único denominado *child's time lost*, que puede ser clasificado dentro de los criterios de efectividad, definido como la medida de la diferencia de tiempos entre el viaje que hace el estudiante en el bus y el tiempo que espera en el paradero, es decir, es el tiempo efectivo del transporte total desde la casa a la escuela. Los objetivos considerados en los trabajos son:

a) Número de buses utilizados (B)
b) Largo de la ruta (LR)
c) Tiempo del estudiante en el bus (E)
d) Balance de carga (BC)
e) Largo máximo de las rutas (LMR)
f) Child's time lost (TL)

Tabla 3: Clasificación de Objetivos

Investigación	**Objetivo**
Russell and Morrel (1986)	LR
Chen et al. (1990)	B, LR
Thangiah and Nygard (1992)	B, LR, E
Corberan et al (2002)	B, LMR
Li and Fu (2002)	B, LR, E, BC
Woo (2005)	N, LR
Ripplinger (2005)	B, LR
Spada et al. (2005)	TL
Schittekat et al. (2006)	LR
Bektas and Elmastas (2007)	B, LR
Füngenschuh (2009)	B, LR
Riera and Salazár (2011)	B, LR, LMR
Albornoz and Johns (2011)	LR
Park et al. (2012)	B
Euchi and Mraihi (2012)	N° veces que el bus pasa por un arco.

Es importante establecer que la mayoría de los trabajos presentados en las tres tablas anteriores fueron obtenidos de Park y Kim (2010), complementadas con otras referencias más actualizadas posteriores al año 2010. En Park y Kim (2010), se concluye que es necesaria la investigación de métodos exactos para el RVTE. Un número reducido de los métodos revisados en la literatura, son **exactos** para el problema de Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar. En Letchford et al. (2007) y en Becktas y Elmastas (2007) se presentan algunos de ellos.

2. Modelo Matemático

El modelo que se propone en este estudio considera un destino común (una escuela), con capacidad homogénea en la flota de buses y que minimiza los costos de la ruta y la asignación a los paraderos. Para tal efecto, se consideran los siguientes supuestos:

- No existe un costo fijo por utilizar un vehículo.
- Las demandas de los nodos son iguales a uno.
- Cada ruta generada debe tener al menos un paradero.
- Las demandas y los costos son determinísticos y están previamente determinados.
- Los vehículos son homogéneos.
- Se dispone de una cota para el número máximo de vehículos a utilizar.

Parámetros

$\boldsymbol{0}$: nodo origen ficticio
$\boldsymbol{D}$: nodo destino
$\boldsymbol{c_{ij}}$: costo del viaje entre el nodo $\boldsymbol{i}$ y el nodo $\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{Cap}$: capacidad del bus
$\boldsymbol{g_i}$: Demanda en el nodo $\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{\alpha}$: Constante de proporcionalidad

Conjuntos

$\mathbf{A}$: conjunto de arcos
$\boldsymbol{N}$: conjunto de nodos
$\boldsymbol{R}$: conjunto de buses disponibles
$\overline{\boldsymbol{N}} = N \cup \{0\}$
$\boldsymbol{G} = \{0\} \times (N \setminus \{D\})$
$\boldsymbol{F} = \{D\} \times N$
$\widehat{\boldsymbol{A}} = A \setminus F$
$\overline{\boldsymbol{A}} = G \cup \hat{A}$

Variables de Decisión

f_{ij}^k = flujo que pasa por el arco (i, j) en dirección al nodo k

$$x_{ij}^r = \begin{cases} 1 & \text{si arco } (i,j) \text{ está en la ruta del bus } r \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_{ij}^r = \begin{cases} 1 & \text{si al cliente } j \text{ se le asigna al paradero } i \text{ de la ruta del bus } r \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Función Objetivo

$$Minimizar \sum_{(i,j)\in A, r\in R} c_{ij}x_{ij}^{r} + \alpha \sum_{(i,j)\in A, r\in R} c_{ij}w_{ij}^{r} \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{(0,j)\in G} x_{0j}^{r} \leq 1 \qquad \forall\, r \in R \tag{2}$$

$$\sum_{(i,D)\in A} x_{iD}^{r} \leq 1 \qquad \forall\, r \in R \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in \bar{A}} x_{ij}^{r} = \sum_{(j,h)\in A} x_{jh}^{r} \qquad \forall\, r \in R; \forall\, j \in N \setminus \{D\} \tag{4}$$

$$\sum_{(0,j)\in G} f_{0j}^{k} = 1 \qquad \forall\, k \in N \setminus \{D\} \tag{5}$$

$$\sum_{(i,k)\in \bar{A}} f_{ik}^{k} = 1 \qquad \forall\, k \in N \setminus \{D\} \tag{6}$$

$$\sum_{(i,j)\in \bar{A}} f_{ij}^{k} = \sum_{(j,h)\in A: h\neq D} f_{jh}^{k} \qquad \forall k \in N \setminus \{D\}, j \in N \setminus \{D,k\} \tag{7}$$

$$\sum_{(0,j)\in G} f_{0j}^{D} \leq |R| \tag{8}$$

$$\sum_{(i,D)\in A} f_{iD}^{D} \leq |R| \tag{9}$$

$$\sum_{(i,j)\in \bar{A}} f_{ij}^{D} = \sum_{(j,h)\in A} f_{jh}^{D} \qquad \forall j \in N \setminus \{D\} \tag{10}$$

$$f_{ij}^{D} \leq \sum_{r\in R} x_{ij}^{r} \qquad \forall (i,j) \in \bar{A} \tag{11}$$

$$f_{ij}^{k} \leq \sum_{r\in R} x_{ij}^{r} + \sum_{r\in R} w_{ij}^{r} \qquad \forall\, k \in N \setminus \{D\}, \forall (i,j) \in \hat{A} \tag{12}$$

$$f_{0j}^{k} \leq \sum_{r\in R} x_{0j}^{r} \qquad \forall k \in N \setminus \{D\}, (0,j) \in G \tag{13}$$

$$f_{0j}^{D} \leq \sum_{r\in R} x_{0j}^{r} \qquad \forall (0,j) \in \bar{A} \tag{14}$$

$$\sum_{(i,j)\in \bar{A}, r\in R} x_{ij}^{r} + \sum_{(i,j)\in A: i\neq D, r\in R} w_{ij}^{r} = 1 \qquad \forall\, j \in N \setminus \{D\} \tag{15}$$

$$w_{ij}{}^{r} \leq \sum_{(h,i)\in \bar{A}: h\neq j} x_{hi}^{r} \qquad \forall r \in R; \forall (i,j) \in A \neq D \tag{16}$$

$$\sum_{(i,j)\in \bar{A}: j\neq D} x_{ij}^{r} * g_j + \sum_{(i,j)\in A: i\neq D \wedge j\neq D} w_{ij}^{r} * g_j \leq cap \qquad \forall r \in R \tag{17}$$

$$x_{ij}^{r}, w_{ji}^{r} \in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A, r \in R \tag{18}$$

$$f_{ij}^{k} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A,\ k \in N \tag{19}$$

La expresión (1) es la función objetivo que minimiza los costos de las rutas, y el costo de las asignaciones de los estudiantes hacia los paraderos. Cabe consignar que los costos relacionados a cada una de estas variables pueden estar en diferentes unidades de medida. Esto se corrige a través de la constante de proporcionalidad $\alpha < 1$.

El grupo de restricciones (2), (3) y (4) establece las rutas requeridas entre el nodo origen ficticio y el nodo destino. Las restricciones (5), (6) y (7) definen, para cada nodo k distinto al nodo destino, un path que comienza en el nodo origen y finaliza en el mismo nodo k. Estos paths evitan la formación de ciclos y permiten obtener una solución conectada.

Las restricciones (8), (9) y (10), similares a las tres restricciones anteriores, determinan todos los paths (rutas de los buses) que conectan al nodo origen con el nodo destino *D*. La restricción (11) señala que existe flujo en el arco (*i*,*j*), en dirección al nodo destino *D*, sólo si este arco pertenece a una de la rutas. La restricción (12) indica que el flujo enviado al nodo *k* puede pasar por el arco (*i*,*j*) sólo si este arco está en la solución, es decir, si pertenece a una de las rutas o es un arco de asignación. La restricciones (13) y (14) establecen que el flujo que sale desde el nodo origen, en dirección al nodo destino *D* o a cualquier nodo *k*, se vaya exclusivamente por una de las rutas generadas. La restricción (15) asegura que todos los nodos estén cubiertos por un arco de una ruta o un arco de asignación. La restricción (16) establece que el nodo *j* (estudiante) es asignado al nodo *i* (paradero) sólo si el nodo *i* está en una de las rutas, es decir, si pasa uno de los buses por el paradero *i*. La restricción (17) asegura que no se exceda la capacidad de ningún vehículo.

Finalmente, las restricciones (18) y (19) indican la naturaleza de las variables de decisión. Las variables x_{ij}^r, w_{ji}^r son binarias y las variables f_{ij}^k son no negativas.

3. Resultados

Las instancias que se utilizaron para resolver el modelo propuesto están disponibles en Araya (2012). Para cada red, utilizando el algoritmo de rutas mínimas, se generó la matriz de distancias mínimas. Con esto se obtiene el grafo completo proveniente de la red original.

En esta investigación se realizaron pruebas con redes de 10, 15, 21, 25 y 30 nodos, con un valor predeterminado para $\alpha = 0{,}5$. En la Tabla 4 se muestran las soluciones óptimas para las distintas instancias utilizadas, variando la cantidad de los buses disponibles y la capacidad de ellos. En la primera columna se indica el número de nodos y en la segunda el número de arcos de la red. En la tercera columna se añade un indicador de la instancia a resolver. En la cuarta columna se registra la capacidad de los buses (*Cap*), le sigue el número máximo de buses permitidos (*R*), luego el número de rutas generadas, enseguida el valor óptimo de la función objetivo, las dos siguientes muestran los costos de las rutas y el costo de asignación, respectivamente. Finalmente, en la última columna, se presentan los tiempos CPU, en segundos, que requiere el algoritmo en encontrar la solución óptima en cada caso.

Tabla 4: Soluciones Óptimas

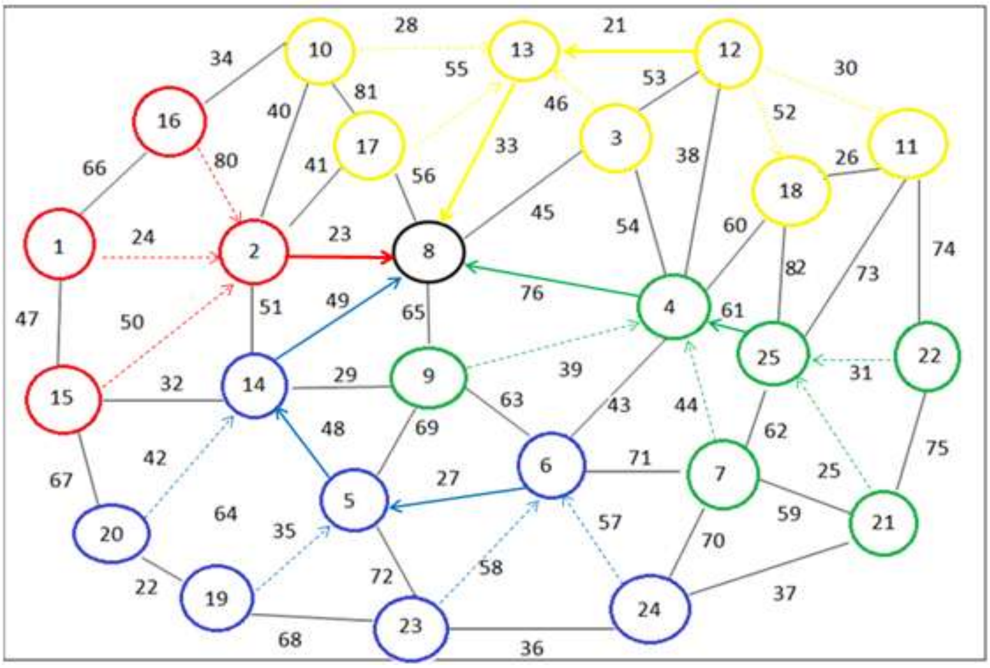
Red		N° Instancia	Cap.	R	N° Rutas	Objetivo	Costo Rutas	Costo Asignación	CPU [s]
Nodos	Arcos								
10	40	1	10	1	1	203,5	60	143,5	0,8
		2	5	2	2	197	90	107	4,1
		3	3	3	3	227,5	112	115,5	24,3
		4	3	4	3	227,5	112	115,5	28,8
		5	4	4	3	213,5	123	90,5	5,0

Continuación Tabla 4.

Red		N° Instancia	Cap.	R	N° Rutas	Objetivo	Costo Rutas	Costo Asignación	CPU [s]
Nodos	Arcos								
15	60	1	15	1	1	333	150	183	5,3
		2	7	2	2	339	222	117	36,2
		3	5	3	3	355	239	116	760,2
		4	4	4	4	395	271	124	1732,6
		5	4	5	4	395	271	124	1740,0
21	74	1	21	1	1	806	453	353	59,3
		2	11	2	2	786	402	384	321,8
		3	7	3	3	824	527	297	5740,6
		4	6	4	4	804,5	381	423,5	5995,2
		5	7	4	4	776	406	370	6983,7
25	118	1	13	2	2	627	302	325	176,2
		2	8	3	3	674	368	306	15537,3
		3	7	4	4	670,5	338	332,5	100199,6
30	154	1	30	1	1	205	110	95	2625,5
		2	15	2	2	208	139	69	6720,4
		3	10	3	3	262	154	108	6621,5

La Figura 1 muestra la solución óptima para la instancia 3 de la red de 25 nodos y 118 arcos, con nodo destino 8. Se consideran 4 buses con capacidad para 7 personas cada uno. Las rutas obtenidas para cada bus son: 12-13-8; 2-8; 25-4-8 y 6-5-14-8, cada una con sus respectivas asignaciones.

Figura 1: Instancia N°3 de la Red de 25 nodos, 118 arcos



4. Conclusiones e investigación futura

En este trabajo se resuelven instancias con redes de hasta 30 nodos. Como se puede apreciar de la Tabla 4, los tiempos CPU crecen rápidamente a medida que se incrementa el tamaño de la red. Esto se explica, principalmente, porque se trata de un método exacto para resolver un problema NP-Hard. Sin embargo, en todas las instancias de prueba se obtuvo la solución óptima.

A diferencia de los trabajos revisados en la literatura, en esta investigación se resuelve el problema RVTE que minimiza el costo de las rutas y la distancia total que deben caminar los clientes asignados al paradero.

Es necesario estudiar otras formulaciones, con menor número de variables y restricciones, y estudiar maneras de resolver los modelos más eficientemente. Por ejemplo, aplicar el método de branch-and-cut para resolver modelos que utilicen variables con dos subíndices. También, es un desafío llevar a cabo estudios para considerar el caso con objetivos múltiples.

5. Referencias

Albornoz, V., Johns, E., (2011) Localización de paraderos de detención y diseño optimo de rutas en el transporte de personal. Revista Chilena de Ingeniería 19 (3), 457-472.

Araya, S. (2012), Un Procedimiento Exacto para resolver el Problema de Localización de Instalaciones Extensas con Restricciones de Capacidad, aplicado al School Bus Routing Problem. Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Industrial, Universidad del Bío-Bío, 78p.

Bektas, T., Elmastas S. (2007), Solving school bus routing problems through integer programming. Journal of the Operational Research Society 58 (12), 1599–1604.

Bodin, L.D., Golden, B., Assad, A., Ball, M. (1983), Routing and scheduling of vehicles and crews: the state of the art. Computers and Operations Research 10, 63–211.

Chen, D., Kallsen, H., Chen, H., Tseng, V. (1990), A bus routing system for rural school districts. Computers and Industrial Engineering 19, 322–325.

Corberán, A., Fernández, E., Laguna, M., Martí, R. (2002), Heuristic solutions to the problem of routing school buses with multiple objectives. Journal of Operational Research Society 53, 427–435.

Current J., Re Velle Ch., Cohon J. (1987), The median shortest path Problem: A multiobjetive approach to analize Cost v/s Accessibility in the design of transportation Network. Transportation Science, Vol. 21 N°3, 188-197.

Desrosiers, J., Ferland, J.A., Rousseau, J.-M., Lapalme, G., Chapleau, L. (1981), An overview of a school busing system. In: Jaiswal, N.K. (Ed.), Scientific Management of Transport Systems. North-Holland, Amsterdam, 235–243.

Euchi J, Mraihi R. (2012), The urban bus routing problem in the Tunisian case by the hybrid artificial ant colony algorithm, Swarm and Evolutionary Computation 2:15–24.

Fügenschuh, A. (2009), Solving a school bus scheduling problem with integer programming. European Journal of Operational Research 193 (3): 867–884.

Hanley, P.F. (2007), Transportation cost changes with statewide school district consolidation. Socio-Economic Planning Sciences 41 (2), 163–179.

Kara, I., Bektas, T. (2006), Integer linear programming formulations of multiple salesman problems and its variation. European Journal of Operational Research 174 (3), 1449–1458.

Labbé M. Laporte G., Rodriguez I. (1998), Path Tree and Cycle Location In Fleet Management and logistics T. Crainic, G. Laporte (eds), Kluwe, Boston, 187-204.

Laporte, G. (1988). Location-routing problems. In: Golden, B.L., Assad, A.A. (Eds.), Vehicle Routing: Methods and Studies. North-Holland, Amsterdam, 163–198.

Letchford, A.N., Lysgaard, J., Eglese, R.W. (2007), A branch-and-cut algorithm for thecapacitated open vehicle routing problem. Journal of the Operational Research Society 58: 1642–1651.

Li, L., Fu, Z. (2002), The school bus routing problem: a case study. Journal of the Operational Research Society 53, 552–558.

Messa, J., Boffey T. (1996), A review of extensive facility location in networks, European Journal of Operational Reseach, Volume 95(3) : 592–60

Newton, R.., Thomas, W. (1969), Design of school bus routes by computer. Socio- Economic Planning Sciences 3 (1): 75–85.

Paredes, G., Obreque, C. (2009), Un Procedimiento Optimal para resolver el Median Shortest Path Problem, Revista de Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias, 2, enero-junio 7-24.

Park, J., Kim B. (2010), The school bus routing problem: A review, European Journal of Operational Research 202: 311-319.

Park, J., Hyunchul T., Kim B., (2012), A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem, European Journal of Operational Research 217:204-213

Riera, J., Salazar, J., (2011) Solving school bus routing using the multiple vehicle traveling purchaser problem: A branch-and-cur approach.

Ripplinger, D. (2005), Rural school vehicle routing problem. Transportation Research Record 1992, 105–110.

Russell, R., Morrel, R. (1986), Routing special-education school buses. Interfaces 16 (5), 56–64.

Schittekat, P., Sevaux, M., Sörensen, K. (2006), A mathematical formulation for a school bus routing problem. In: Proceedings of the IEEE 2006 International Conference on Service Systems and Service Management, Troyes, France.

Spada, M., Bierlaire, M., Liebling, Th.M. (2005), Decision-aiding methodology for the school bus routing and scheduling problem. Transportation Science 39, 477–490.

Thangiah, S.R., Nygard, K.E. (1992), School Bus Routing using Genetic Algorithms. In: Proceedings of the SPIE Conference on Applications of Artificial Intelligence X: Knowledge-Based Systems, Orlando, Florida. doi:1-.1117/12.56903.

Geem, W. Z. (2005), School Bus Routing using Harmony Search. In: Genetic and evolutionary Computation Conference (GECCO 2005), Washington DC, USA, June 25-29.