UMA HEURÍSTICA CONSTRUTIVA PARA O PROBLEMA DE COBERTURA POR HUBS

Ana Paula Milanez
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein, 400, CEP 13083-852, Campinas, SP
apmilanez@densis.fee.unicamp.br

Vinícius Amaral Armentano
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein, 400, CEP 13083-852, Campinas, SP
vinicius@densis.fee.unicamp.br

RESUMO

Este trabalho aborda o problema de cobertura por hubs em uma rede que envolve a localização de um número mínimo de hubs e a designação de nós de demanda a hubs de forma que o tempo de viagem do fluxo entre qualquer par origem-destino na rede não exceda um limitante superior. Assume-se que cada nó de demanda é designado a um único hub que não tem restrições de capacidade. É proposta uma heurística construtiva para este problema que gera soluções factíveis de boa qualidade para instâncias de dois conjuntos da literatura.

PALAVARAS CHAVE. Localização de hubs, Cobertura por hubs, Heurística Construtiva.

MH – Metaheuristics e OC - Combinatorial Optimization

ABSTRACT

We address the covering hub problem in a network which involves the location of a minimum number of hubs and the assignment of demand nodes to hubs such that the flow travel time between each origin-destination pair in the network does not exceed a given threshold. We assume that a demand node is assigned to an uncapacitated single hub. We propose a constructive heuristic for this problem that is able to produce good quality feasible solutions for instances of two sets from the literature.

KEYWORDS. Hub location, Hub covering, Constructive heuristic .

MH – Metaheuristics e OC - Combinatorial Optimization

1. Introdução

Localização de hubs é uma área de pesquisa importante devido ao uso de redes de hubs em sistemas de transporte e telecomunicações que atendem a demanda por produtos ou informação entre diversas origens e diversos destinos. Em vez de servir a demanda de cada par origem-destino com uma ligação direta, hubs são usados para redirecionar e consolidar fluxos entre origem e destino, que resulta em uma redução do número de ligações na rede e permite economia de escala pela conexão de fluxo entre dois hubs. Como ponto de consolidação, fluxos com a mesma origem e destinos distintos são consolidados ou combinados com fluxos que têm origens distintas e mesmo destino.

O desenvolvimento da pesquisa de localização de hubs com enfoque matemático foi iniciado por dois trabalhos marcantes de O' Kelly (1986, 1987). O primeiro trata de dois hubs que podem ser localizados em qualquer lugar de um plano, isto é, um problema de localização contínuo, e o segundo para ***p***-hubs com um número finito de pontos candidatos à localização de hubs, um problema de localização discreto. O problema de localização de hubs aborda simultaneamente a localização de hubs e designação de nós de demanda a hubs. Existem dois tipos de redes de hubs, chamadas de alocação única e alocação múltipla, que diferem na forma de alocação de nós de demanda a hubs. Na rede de hubs com alocação única todo tráfego de entrada e saída de um nó de demanda é roteado por um único hub, enquanto na rede de hubs com alocação múltipla, o tráfego de entrada e saída de um nó de demanda pode ser roteado por um ou mais hubs. Além disso, hubs podem ter uma capacidade finita ou infinita do fluxo que pode ser recebido, transferido e distribuído.

Campbell (1994) apresenta diversas formulações matemáticas para problemas de localização discreta de hubs, classificando-os de acordo com a função objetivo: ***p***-hub mediana, em que se minimiza o custo total de transporte, hub com custo fixo, que minimiza o custo total de transporte mais o custo fixo de abrir os hubs, ***p***-hub centro, que minimiza o máximo tempo ou custo de transporte e o problema de cobertura por hubs, que minimiza o número de hubs abertos de forma que o tempo ou custo de transporte de fluxo entre qualquer origem e qualquer destino situa-se dentro de um limite. Neste trabalho são apresentadas as primeiras formulações lineares para os problemas de ***p***-hub mediana e hubs com custo fixo, e introduzidos os problemas ***p***-hub centro e de cobertura por hubs. O trabalho de Alumur e Kara (2008) apresenta uma revisão de modelos de localização de hubs, de acordo com esta classificação.

Neste trabalho é apresentada uma heurística construtiva para o problema de cobertura por hubs com designação única e capacidade infinita, denotado CHDU, que minimiza o número de hubs abertos de forma que o tempo de viagem de fluxo entre qualquer par de nós de demanda origem-destino não excede um limiar. Esta é uma restrição de serviço muito importante para transportadoras de carga e couriers.

A literatura deste problema é relativamente escassa. Kara e Tansel (2003) propõem uma nova formulação obtida pela linearização de uma restrição quadrática e comparam com outras três formulações derivadas de linearizações distintas da primeira formulação com outra restrição quadrática proposta por Campbell (1994). Testes computacionais em 80 instâncias do Civil Aeronautic Board (CAB), com no máximo 25 cidades norte-americanas, mostram que a nova formulação apresenta melhor desempenho com tempo máximo computacional de 8,5 horas e resolução pelo CPLEX 5.0.

Wagner (2008) sugere um pré-processamento que descarta várias designações de nós de demanda a hubs e propõe um novo modelo que é testado em 20 instâncias com 25 cidades de CAB. O tempo médio de resolução do novo modelo e do modelo de Kara e Tansel (2003) por meio de CPLEX 7.5 é de 0,41segundos e 4,65 segundos, respectivamente, mostrando que o pré-processamento gera um modelo mais apertado. O modelo também é testado com sucesso em instâncias com 50 nós do Australia Post (AP), um conjunto de dados com 200 nós que representam distritos postais em uma cidade da Austrália, com tempo máximo de resolução de aproximadamente 95 segundos.

Ernst et al. (2011) melhoram o modelo de Wagner (2008) ao levantar restrições que resultam em desigualdades que definem facetas. O modelo fica mais apertado, mas o tempo computacional para levantar as desigualdades é alto, e de modo geral o tempo computacional total para resolver instâncias de 40 e 50 nós de AP por meio de CPLEX 12.1 é maior que o tempo requerido pelo modelo de Wagner (2008). Neste mesmo trabalho, os autores propõem uma nova formulação baseada no conceito de uma variável que define o raio de um hub, introduzida por Ernst et al.(2009) para problemas de ***p***-hub centro. De modo geral, o tempo para resolver a nova formulação é menor que o tempo para resolver o modelo de Wagner (2008).

Calık et al. (2009) propõem a única heurística, de nosso conhecimento, para problemas de cobertura baseada no método busca tabu. Neste trabalho é proposto um modelo de programação inteira para um problema de cobertura com custo fixo para ligações entre hubs e custo fixo para abrir hubs. A rede de hubs não precisa ser completa, isto é, não é necessário ligações diretas entre todos os hubs. Em cada passo da busca tabu a heurística tenta obter uma solução factível para uma rede completa através de um processo de construção de soluções que envolvem duas fases, a primeira que define hubs e a segunda que aloca nós não-hub a nós de hubs. Para cada solução factível obtida, tenta-se retirar ligações entre hubs de modo a reduzir o custo sem perder a factibilidade. A heurística é testada em instâncias de CAB e comparada com a solução ótima por CPLEX 10.1 ou com o limitante inferior quando a solução ótima não é obtida em duas horas. O tempo máximo para a heurística é 100 segundos para instâncias com 10 nós e 600 segundos para instâncias com 15 e 20 nós. O grande problema da fase de construção de soluções é a separação da localização de hubs da alocação de nós não-hubs. Ao se fixar um conjunto de hubs é possível que não exista alocação de nós não-hubs que satisfaça a restrição de limite de tempo de viagem de fluxo entre pares de origens e destinos. Por este motivo os autores sugerem três procedimentos de alocação de nós não-hubs.

Deve-se ressaltar que uma heurística construtiva pode não achar uma solução factível para o problema de cobertura devido à restrição de tempo mencionada. No entanto, a heurística aqui proposta obtém soluções de boa qualidade para todas as instâncias de CAB e AP com baixo tempo computacional.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. Na próxima seção o problema de cobertura é definido. A seção 3 contém a descrição da heurística construtiva, resultados computacionais são relatados na seção 4 e conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. Descrição do problema

Considere uma rede completamente conectada $G = (N, A)$, em que $N = \{1, 2, ..., \boldsymbol{n}\}$ é um conjunto de nós e A é um conjunto de arcos. Para um dado ***limiar de cobertura*** β, o problema CHDU requer a localização de hubs e designação de nós não-hubs a um único hub de forma que o tempo de transporte de fluxo entre cada par origem-destino não exceda β. Assume-se que cada hub tem infinita capacidade para coleta, transferência e distribuição de fluxo. Seja $\boldsymbol{d}_{ik}$ o tempo (distância ou custo) decorrido de transporte de fluxo do nó ***i*** ao nó ***k*** se somente ***i*** ou ***k*** é um hub. Assume-se que $\boldsymbol{d}_{ik} = \boldsymbol{d}_{ki}$ e que a desigualdade triangular é válida. Seja $\alpha \in [0,1]$ o fator econômico de desconto aplicado a fluxo entre hubs. O tempo de transporte de fluxo entre dois hubs ***k*** e ***m*** é $\alpha \boldsymbol{d}_{km}$.

Considere uma variável binária $\boldsymbol{X}_{ik}$ tal que $\boldsymbol{X}_{ik} = 1$ se e somente se o nó ***i*** é designado ao hub ***k***, $\boldsymbol{X}_{ik} = 0$, caso contrário, e $\boldsymbol{X}_{kk} = 1$ se e somente se ***k*** é um nó hub, $\boldsymbol{X}_{kk} = 0$, caso contrário. Kara e Tansel (2003) propõem o seguinte modelo para o problema CHDU:

$$\min \sum_{k=1}^{n} X_{kk} \tag{1}$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^{n} X_{ik} = 1, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2}$$

$$X_{ik} \le X_{kk}, \quad i,k = 1,\ldots,n \tag{3}$$

$$\left(d_{ik} + \alpha d_{km}\right) X_{ik} + d_{jm} X_{jm} \le \beta, \quad i,j,k,m = 1,\ldots,n \tag{4}$$

$$X_{ik} \in \{0,1\}, \quad i,k = 1,\ldots,n \tag{5}$$

A função objetivo (1) representa a minimização de hubs a serem usados ou abertos. As restrições (2) impõem que cada nó é designado a um único hub, e as restrições (3) implicam que cada nó somente pode ser designado a um nó selecionado para ser hub. As restrições (4) garantem que o tempo de transporte de fluxo entre cada par origem-destino não excede o limiar β, e a restrição (5) define o domínio da variável.

Wagner (2008) sugere um modelo mais apertado que descarta designações em que não é possível chegar a tempo no nó j se o nó i é designado ao nó hub k. Variáveis X_{ik} para designações válidas DV são definidas por

$$DV = \left\{ (i,k) : 2d_{ik} \le \beta \text{ e } d_{ik} + \alpha \max_{j} d_{km} \le \beta \right\}.$$

O conjunto acima identifica potenciais variáveis X_{ik} que assumem o valor 1 e isto é verificado, se as restrições (4) com $X_{ik} = X_{ml} = 1$

$$d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{mj} \le \beta, \quad i,j,k,m = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

são satisfeitas.

O conjunto de designações válidas é usado na heurística construtiva para descartar designações, que resulta em redução do tempo computacional.

3. Heurística construtiva

A heurística construtiva é iniciada pela identificação do centro do conjunto de nós, isto é, o nó mais próximo dos outros nós. O centro é definido a partir da soma dos tempos $w(i)$ para ir de cada nó i a todos os nós e retornar a i, isto é,

$$w(i) = \sum_{j=1, j\ne i}^{n} d_{ij} + d_{ji}, \quad i \in N$$

A definição acima leva em consideração o caso de assimetria em que $d_{ij} \ne d_{ji}$. A relação geográfica de um nó $RG(i)$ é a fração de $w(i)$ em relação à soma dos tempos gastos para todos os nós, isto é,

$$RG(i) = \frac{w(i)}{\sum_{j=1}^{n} w(j)} \tag{7}$$

O centro do conjunto de nós é aquele com o valor mínimo de $RG(i)$, e corresponde, inicialmente, a um ponto de referência para a seleção de hubs. Nós candidatos a hubs são escolhidos como nós mais próximos ao ponto de referência.

Uma vez selecionado um candidato hub $\boldsymbol{k}$, utiliza-se o conceito de designações válidas para identificar os potenciais nós não-hub cobertos por $\boldsymbol{k}$. Se o nó $\boldsymbol{k}$ satisfaz a condição (6), então continua candidato.

Para tentar evitar a criação de um número elevado de hubs que não atendem nenhum nó não-hub é estabelecida uma condição de cobertura mínima $\boldsymbol{Cob_{min}}$, que inicialmente tem o valor 2, para evitar uma condição muito restritiva. Se o candidato a hub $\boldsymbol{k}$ atende esta condição, então $\boldsymbol{k}$ é selecionado como hub e os nós não-hub que ele pode cobrir são designados a ele. Se houver nós de demanda ainda não cobertos, repete-se o procedimento de seleção de um novo hub.

Se o candidato a hub $\boldsymbol{k}$ não atende a condição de cobertura mínima, ele é temporariamente rejeitado e colocado em uma lista de nós proibidos até que a heurística permita o atendimento de um número de nós não-hub menor que $\boldsymbol{Cob_{min}}$.

Se não houver um candidato a hub que possa cobrir o valor mínimo de $\boldsymbol{Cob_{min}} = 2$ nós de demanda, então seu valor atual é reduzido para 1. Se após repetir todo o procedimento para $\boldsymbol{Cob_{min}} = 1$ ainda restam nós não cobertos, um novo ponto de referência é selecionado.

Quando todas as opções de ponto de referência estiverem esgotadas, e ainda houver nós não cobertos, estes nós são transformados em hubs que não cobrem nenhum nó não-hub. Na Figura 2 é apresentado um fluxograma que sintetiza o algoritmo e cada passo é descrito em detalhe.

Os seguintes conjuntos são utilizados na descrição do algoritmo:

N	Conjunto de nós da rede
NC	Conjunto de nós não cobertos
H	Conjunto de hubs abertos
R_h	Conjunto de pontos mais distantes $\boldsymbol{r_h}, \boldsymbol{h} \in H$, cobertos por hubs de H
T	Conjunto de hubs proibidos
P	Conjunto de pontos de referência

Passo 1. Construa uma matriz de designação válida $\boldsymbol{D}$ de dimensão $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, tal que o elemento $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k})$ assume o valor 1 se $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) \in DV$ e o valor 0, caso contrário. Calcule a relação geográfica $\boldsymbol{RG}(\boldsymbol{i})$, definida em (7), para todo $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N}$. Faça $H \leftarrow \varnothing$, $R_h \leftarrow \varnothing$, $T \leftarrow \varnothing$, $P \leftarrow \varnothing$, $\boldsymbol{Cob_{min}} \leftarrow 2$
.

Passo 2. Determine um novo ponto de referência (***PR***), definido como o nó mais próximo do centro dos nós tal que

$$\boldsymbol{PR} = \arg\min_{i \in N \;, i \notin P \;, i \notin \mathrm{H}} (\boldsymbol{RG}(\boldsymbol{i}))$$

Passo 3. Determine o candidato a hub $\boldsymbol{k}$ como o nó mais próximo de ***PR***, desde que $\boldsymbol{k} \notin T$, $\boldsymbol{k} \notin \mathrm{H}$ e não esteja coberto por outro hub, isto é

$$\boldsymbol{k} = \arg\min_{i \in NC, i \notin T \;, i \notin \mathrm{H}} (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{PR},\boldsymbol{i})) \quad \text{para todo } \boldsymbol{i} \in N$$

Passo 4. Se todos os nós estão cobertos por hubs, o algoritmo termina, caso contrário vá para o Passo 5.

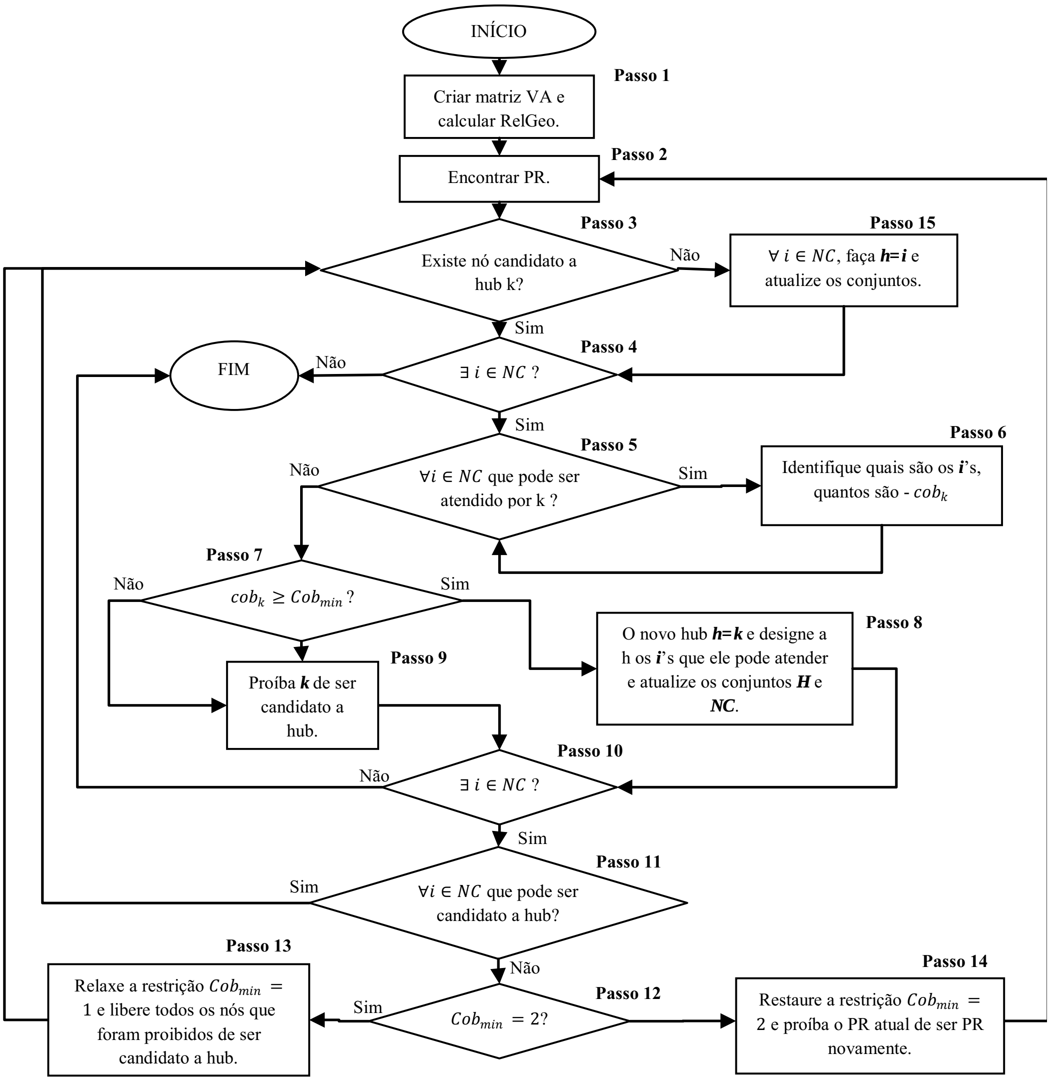

Figura 1. Fluxograma da heurística construtiva.

Passo 5. Selecione todos os nós $\boldsymbol{i} \in NC$ tais que o elemento $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) = 1$ na matriz de designação válida $\boldsymbol{D}$, isto é, os nós são potencialmente cobertos pelo candidato a hub $\boldsymbol{k}$, e vá para o Passo 6. Se não houver mais nós não-hub que possam ser cobertos pelo candidato a hub $\boldsymbol{k}$, vá para o Passo 7.

Passo 6. Caso haja hubs abertos $\boldsymbol{h} \in H$ e respectivos conjuntos de nós não-hub cobertos, verifique para cada nó $\boldsymbol{i} \in NC$ potencialmente coberto pelo nó candidato $\boldsymbol{k}$ identificado no passo anterior, a condição de factibilidade

$$\boldsymbol{d_{ik}} + \alpha \boldsymbol{d_{kh}} + \boldsymbol{d_{hr_h}} \leq \beta \text{ para todo } \boldsymbol{h} \in H, \boldsymbol{r_h} \in R_h \tag{8}$$

Passo 7. Seja I o conjunto de nós $\boldsymbol{i} \in NC$ que satisfazem (8). Se $|I| \geq \boldsymbol{Cob_{min}}$, então o nó $\boldsymbol{k}$ é considerado o novo nó hub e o conjunto I é designado ao nó $\boldsymbol{k}$. Caso contrário, vá para o Passo 9.

Passo 8. O novo hub é fixado, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{k}$, e atualize $H \leftarrow H \cup \{\boldsymbol{h}\}$, $NC \leftarrow NC - \{I\}$. Vá para o Passo 10.

Passo 9. Se no Passo 7, $|I| < \boldsymbol{Cob}_{\min}$, o nó $\boldsymbol{k}$ é descartado provisoriamente e é proibido de ser candidato a hub até o ponto em que $\boldsymbol{Cob_{min}}$ é reduzido. Faça $T \leftarrow T \cup \{\boldsymbol{k}\}$ e vá para o Passo 10.

Passo 10. Se há nós ainda não cobertos, vá ao Passo 11. Se todos os nós estão cobertos, finalize o algoritmo.

Passo 11. Retorne ao Passo 3 e selecione um novo candidato a hub. Caso não exista candidato a hub, vá para o Passo 12.

Passo 12. Se $\boldsymbol{Cob_{min}}$ = 2, vá para o Passo 13. Se $\boldsymbol{Cob_{min}}$ = 1 e não existem candidatos a hub para o PR atual, vá para o Passo 14.

Passo 13. Faça $\mathrm{Cob}_{\min}$ = 1 e libere todos os nós proibidos de serem candidatos a hub do conjunto T. Faça $T \leftarrow \varnothing$ e retorne ao Passo 3.

Passo 14. Se não existem candidatos a hub para o PR atual, faça $P \leftarrow P \cup \{\boldsymbol{PR}\}$ e selecione um novo PR no Passo 2. Faça $\boldsymbol{Cob_{min}}$ = 2, pois ao mudar PR existe possibilidade de encontrar hubs que cubram 2 ou mais nós não-hub.

Passo 15. Enquanto existem nós não cobertos, o algoritmo permanece no laço entre os Passos 2 e 14 até o ponto em não existe um novo PR , isto é, todos os nós pertencem a H ou T. Os nós do conjunto T são nós não cobertos e tornam-se nós hub sem nós não-hub a eles designados. Para cada um destes nós, o algoritmo retorna ao Passo 4 e ao fim, o algoritmo termina.

4. Resultados Computacionais

O algoritmo proposto foi implementado na linguagem C e os testes foram executados em computador i3 2.20GHz de 4GB em sistema operacional Ubuntu 11.04.

Como já mencionado na Seção 1, a heurística construtiva proposta foi testada no conjunto de dado CAB - Civil Aeronautics Board, que contém instâncias com informações de tráfego de companhias aéreas entre 25 cidades dos USA, e a partir desta, instâncias com menos de 25 cidades, foram geradas de acordo com o número de cidades desejadas (O'KELLY, 1987) e AP – Australian Post, um conjunto de dados com 200 nós que representam distritos postais em uma cidade da Austrália. Instâncias menores foram geradas de acordo com o número de nós e de hubs abertos (ERNST E KRISHNAMOORTHY, 1998). Um número maior de instâncias é gerado quando o número de nós é maior ou igual a 100, pois nessas instâncias é possível abrir um maior número de hubs.

Os raios de cobertura β do problema para as instâncias CAB e AP foram obtidos da implementação em Xpress Mosel 3.2.1 do problema $\boldsymbol{p}$-hub centro proposto por Ernst et al. (2009) e o número ótimo de hubs para o problema de cobertura, foi obtido pela implementação do modelo de Ernst et al. (2011).

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais obtidos para 80 instâncias CAB. As três primeiras colunas especificam o número de nós $\boldsymbol{n}$, o fator de economia α e o raio de cobertura do problema β, respectivamente. Nas colunas seguintes é apresentado o número ótimo de hubs obtido pelo Xpress e o tempo correspondente, o número de nós obtido pela heurística, e o tempo associado em segundos.

A média do número ótimo de hubs abertos é de 3,94 hubs, enquanto a média de hubs abertos pela heurística construtiva é de 4,68 hubs. O tempo médio requerido para obter a solução ótima é de 2,5s e pela heurística é de 0,056s.

Em termos da diferença entre o número de hubs obtido pela heurística construtiva e o número ótimo de hubs, observa-se que, das 80 instâncias CAB, 50% têm o mesmo valor, 29% instâncias apresentam 1 hub a mais, 19% instâncias têm 2 hubs a mais e 3% das instâncias têm 3 hubs a mais. O pior resultado com diferença de 3 hubs ocorre em duas instâncias com dimensão de 20 nós.

A Tabela 2 apresenta os resultados para 23 instâncias AP. Como o fator de desconto é o mesmo para todos os problemas ($\alpha = 0,75$, dado na geração das instâncias) ele é omitido da tabela.

A média do número ótimo de hubs abertos é de 4 hubs, enquanto a média de hubs abertos pela heurística construtiva é de 6,43 hubs. O tempo médio requerido para obter a solução ótima é de 1108,09s, devido a 4 instâncias com 200 nós, e pela heurística é de 1,26s.

Em termos de diferença entre o número de hubs obtidos e o número ótimo de hubs, observa-se a seguinte distribuição: 4% das instâncias têm o mesmo valor, 22% apresentam 1 hub a mais, 39% têm 2 hubs a mais, 9% têm 3 hubs a mais, 13% instâncias apresentam 4 hubs a mais e 13% apresentam 5 hubs de diferença a mais. Instâncias com número de hubs maior que 3 têm dimensão de 100 e 200 nós.

De acordo com os resultados obtidos pela heurística, não é possível identificar influência do fator de desconto α e do raio de cobertura do problema β na obtenção dos resultados. Inicialmente, era esperado que para valores menores de α e maiores valores de β fossem obtidos os melhores resultados, por serem problemas menos apertados. No entanto, como pode ser observado em instâncias com 20 cidades, a diferença entre o número de hubs obtido e o número ótimo de hubs é o mesmo para valores maiores e menores de α , por exemplo, para $\alpha = 0,2$ e $\beta = 1365$ e para $\alpha = 1$ e $\beta = 2601$. A mesma observação pode ser feita em relação aos valores de β , ainda para instâncias de 20 cidades, considerando $\alpha = 0,8$, a diferença entre o número de hubs obtido e o número ótimo de hubs é maior para o maior valor de $\beta = 2264$, do que em relação à $\beta = 2154$, mais apertado.

Tabela 1. Resultado para as instâncias CAB

n	α	β	Resultado Xpress	T$_{Xpress}$ (s)	Heurística	Tempo (s)
10	0,2	1425,00	3	1,157	3	0,006
		1117,00	4	0,469	4	0,016
		811,00	5	0,641	5	0,038
		736,00	6	0,765	6	0,044
	0,4	1627,00	3	0,828	3	0,004
		1185,00	4	0,609	4	0,024
		970,00	4	0,734	4	0,012
		863,00	5	0,469	5	0,043
	0,6	1671,00	3	0,703	3	0,010
		1387,00	4	0,672	4	0,016
		1148,00	4	0,625	4	0,007
		1079,00	5	0,469	5	0,039
	0,8	1744,00	3	0,469	3	0,037
		1589,00	3	0,484	4	0,015
		1457,00	4	0,422	4	0,010
		1413,00	5	0,531	5	0,046
	1,0	1839,00	3	0,406	3	0,021
		1791,00	3	0,563	4	0,005
		1770,00	4	0,625	4	0,026
		1766,00	4	0,625	4	0,019
15	0,2	2004,00	3	1,093	3	0,026
		1638,00	4	1,031	4	0,046
		1324,00	5	1,015	6	0,055
		1149,00	6	0,828	7	0,069
	0,4	2019,00	3	1,000	3	0,044
		1741,00	4	1,016	4	0,033

		1436,00	4	1,078	6	0,051
		1287,00	5	1,187	5	0,063
	0,6	2103,00	3	1,516	3	0,017
		1844,00	4	1,110	5	0,044
		1756,00	4	1,125	5	0,045
		1560,05	5	0,704	6	0,059
	0,8	2424,00	2	0,938	3	0,012
		2165,00	4	0,953	5	0,053
		2100,00	4	0,828	6	0,054
		2080,07	4	0,609	6	0,041
	1,0	2611,00	2	1,125	4	0,036
		2610,00	2	1,204	4	0,023
		2605,00	3	1,109	5	0,039
		2600,08	3	0,703	5	0,046
20	0,2	1851,00	3	2,438	3	0,027
		1549,00	4	2,406	5	0,046
		1356,00	4	2,454	6	0,070
		1162,00	6	2,391	8	0,119
	0,4	2067,00	3	2,562	3	0,035
		1744,00	4	3,391	5	0,071
		1473,00	4	2,297	7	0,117
		1386,00	6	2,406	7	0,105
	0,6	2255,00	3	3,11	3	0,039
		1996,00	4	2,578	5	0,070
		1835,00	4	2,375	7	0,103
		1663,00	5	2,250	6	0,076
	0,8	2493,00	3	2,375	3	0,033
		2264,00	3	2,344	5	0,057
		2154,00	4	2,157	5	0,054
		2118,00	6	2,313	6	0,088
	1,0	2611,00	2	2,157	4	0,036
		2605,00	3	2,188	5	0,068
		2601,00	3	2,125	5	0,057
		2600,08	3	2,031	5	0,076
25	0,2	2136,00	2	5,984	3	0,049
		1913,00	4	7,719	5	0,099
		1617,00	5	5,438	5	0,054
		1346,00	6	5,250	6	0,056
	0,4	2401,00	3	6,859	3	0,036
		2099,00	4	6,375	4	0,072
		1881,00	5	5,984	5	0,106
		1597,00	6	6,843	7	0,140
	0,6	2557,00	3	7,531	4	0,098
		2336,00	4	5,641	4	0,057
		2184,00	4	7,516	4	0,082
		2002,00	6	6,188	6	0,141
	0,8	2713,00	3	5,594	4	0,110
		2552,00	4	5,453	4	0,074
		2457,00	4	5,250	4	0,071
		2307,00	6	5,657	6	0,136
	1,0	2826,00	3	4,938	4	0,074
		2762,00	3	5,000	5	0,087
		2726,00	5	4,953	6	0,145
		2725,80	5	4,813	6	0,119

Tabela 2. Resultado para as instâncias AP

n	β	Resultado Xpress	T_{Xpress} (s)	Heurística	Tempo (s)
25	53207,50	2	0,390	4	0,108
	46608,32	3	0,140	5	0,139
	45552,50	4	0,130	4	0,070
40	61682,52	2	0,130	4	0,193
	58192,80	3	2,630	4	0,173
	52265,30	4	2,860	5	0,255
	49741,21	5	1,080	6	0,267
50	65523,40	2	0,700	3	0,276
	60132,15	3	1,770	4	0,330
	52905,80	4	1,030	6	0,420
	50707,90	5	0,770	8	0,491
100	65914,90	2	0,700	4	0,014
	60658,90	3	5,690	5	0,545
	56124,75	4	414,580	9	1,569
	54243,50	5	3,450	9	1,293
	52244,10	7	45,560	12	2,126
	51860,03	8	34,160	12	2,125
200	68232,00	2	27,480	4	0,006
	65995,95	3	1037,390	5	1,795
	67949,70	3	4563,690	5	1,837
	62774,05	4	17843,600	7	4,389
	57273,45	6	1270,060	10	4,348
	55958,80	8	227,990	13	6,250

5. Conclusões

Este trabalho propôs uma heurística construtiva elaborada para o problema de cobertura por hubs em que um nó de demanda é designado a um único hub com capacidade infinita. O objetivo é minimizar o número de hubs abertos de modo que o tempo de transporte de fluxo entre qualquer par de nós de demanda origem-destino não excede um limiar.

A heurística construtiva abre hubs e designa nós de demanda a hubs de forma simultânea. Em testes de instâncias da literatura a heurística encontrou solução factível para todas com boa qualidade em instâncias com até 40 nós e qualidade razoável para instâncias de maior dimensão. Além disso, o tempo de execução da heurística é muito baixo, o que a qualifica para gerar soluções de partida para metaheurísticas com trajetórias de soluções, tais como busca tabu e simulated annealing.

6. Referências

Alumur, S.; Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. European Journal of Operational Research, v. 190, n. 1, p. 1-21.

Calik, H.; Alumur, S. A.; Kara B.Y.; Karasan O. E. (2009). A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete networks. Computers & Operations Research, v. 36, p.3088-3096.

Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. European Journal of Operational Research, v. 72, p.387-405.

Ernst, A.; Krishnamoorthy, M. (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. European Journal of Operational Research, v. 104, n. 1, p. 100-112.

Ernst, A.; Hamacheer, H.; Jiang, H.; Krishnamoorthy, M.; Woeginger, G. (2009). Uncapacitated single and multiple allocation p-hub center problems. Computers & Operations Research, v. 36, p. 2230-2241.

Ernst, A.; Jiang, H.; Krishnamoorthy, M.; Baatar, D. (2011). Reformulations and computational results for the uncapacitated single hub covering problem . Unpublished Report.

Kara, B.Y.; Tansel, B. C. (2003). The single-assignment hub covering problem: Models and linearizations. Journal of the Operational Research Society, v. 54, p. 59-64.

O'Kelly, M. E. (1986). The location of interacting hub facilities .Transportation Science, v. 20, p.92-106.

O'Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer programming for location of interacting hub facilities. European Journal of Operational Research, v. 32, p.393-404.

Wagner B. (2008). Model formulation for hub covering problems. Journal of the Operational Research Society, v. 59, n. 7, p. 932-938.