UM ALGORITMO EVOLUTIVO PARA PLANARIZAÇÃO DE GRAFOS POR REMOÇÃO DE VÉRTICES

Rodrigo Lankaites Pinheiro
Departamento de Informática,
Universidade Estadual de Maringá, CEP 87020-900, Maringá, PR
profrodrigolpinheiro@gmail.com

Candido F. X. de Mendonca
Escola de Artes, Ciência e Humanidades, USP-Leste, São Paulo, SP
cfxavier@usp.br

Ademir Aparecido Constantino
Departamento de Informática,
Universidade Estadual de Maringá, CEP 87020-900, Maringá, PR
aaconstantino@uem.br

RESUMO

Um grafo não planar só pode ser planarizado se o mesmo for modificado. Neste trabalho é apresentado um algoritmo que utiliza a remoção de vértice para obter um subgrafo planar. A remoção de vértice de um grafo G é o menor inteiro $k \geq 0$ tal que exista um subgrafo planar induzido de G obtido pela remoção de k vértices de G. Considerando que o problema de decisão correspondente é *NP*-completo e que não existe algoritmo de aproximação para planarização de grafos por remoção de vértices, este trabalho propõe um algoritmo evolutivo que utiliza um algoritmo construtivo de planarização de grafos, o qual possui complexidade de tempo O(n+m), baseado na estrutura de dados de árvores-*PQ* e na operação de remoção de vértices. A eficiência do algoritmo é verificada por meio de alguns estudos de casos.

PALAVARAS CHAVE: planarização de grafos, algoritmos genéticos, árvores-*PQ*, remoção de vértices.

Área Principal: Metaheurística, Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

A non-planar graph can only be planarized unless it is modified. This work presents a new heuristic algorithm that uses vertexes deletion to modifier a non-planar graph in order to obtain a planar subgraph. The present algorithm aims to delete a minimum number of vertexes to get a planar subgraph. The vertex deletion number of a graph G is the smallest integer $k \geq 0$ such that there is an induced planar subgraph of G obtained by the removal of k vertexes of G. Considering that the corresponding decision problem is *NP*-complete and an approximation algorithm for graphs planarization by vertexes deletion does not exist, this work proposes an evolutionary algorithm that uses a constructive heuristic algorithm for graph planarization, which has time complexity of O(n+m), based on the PQ-trees data structure and on the vertex deletion operation. The algorithm performance is verified by means of some case studies.

KEYWORDS: graph planarization, genetic algorithms, PQ-Tree, vertexes deletion

Main Area: Metaheuristics, Theory and Algorithms in Graphs

1. Introdução

As aplicações práticas de Desenho de Grafo (*Graph Drawing*), tal como projeto VLSI, requerem técnicas de desenho para grafos não planares. Entretanto, o resultado de algoritmos de desenho de grafo é limitado a grafos planares. Uma aproximação possível para trabalhar com a não planaridade em grafos é considerar suas invariantes topológicas, tal como o número de remoção de vértices, o qual pode ser usado como a medida de não planaridade.

Um *desenho simples* de um grafo G é um desenho de G no plano, sendo que as arestas não se cruzam em hipótese alguma. Um grafo é *planar* quando há um desenho simples para este grafo no plano, sem cruzamento de arestas. Ao longo do texto que segue, todos os desenhos são considerados simples.

Se um desenho de um grafo G tiver o número mínimo de cruzamentos entre todos os desenhos de G, então, este desenho é denominado de desenho *ótimo*. Este número é denominado de *número de cruzamentos* (*crossing number*) do grafo G.

O *número de remoção de arestas* (*skewness*) $sk(G)$ é o menor inteiro $k > 0$ tal que a remoção de k arestas de G torna o grafo planar.

O *número de divisão de vértices* (*splitting number*) $sp(G)$ de um grafo é o menor inteiro $k>0$ tal que um grafo planar pode ser obtido de G por operações de divisão de k vértices. Uma operação de divisão de vértice $v \in V(G)$, ou simplesmente divisão, particiona o conjunto de vértices adjacentes de v em dois conjuntos não vazios P_1 e P_2 e adicionam a $G\backslash\{v\}$ os novos vértices v_1 e v_2 não adjacentes, tais que os vértices de P_1 são adjacentes a v_1 e os vértices de P_2 são adjacentes a v_2. Se um grafo H for obtido de G por uma sequência de k divisões, então, é dito que H é o grafo resultante deste conjunto de k divisões em G.

O número de remoção de vértices $\Phi(G)$ é o menor inteiro $k>0$ tal que a remoção de k vértices de G produz um grafo planar. O problema de decisão correspondente ao número de remoção de vértice, ao número de divisão de vértice, ao número de remoção de arestas ou ao número de cruzamento são todos *NP*-completos (Yannakakis, 1978; Geldmacher e Liu, 1979; Garey e Johnson, 1983; Faria *et al.*, 1998). Faria *et al* (2006) provou que não existe algoritmo de aproximação para planarização de grafos por remoção de vértices, logo, um algoritmo heurístico se torna uma importante alternativa para solucionar o problema. Também, foi mostrado que permanece *NP*-difícil, mesmo para grafos cúbicos (Faria *et al.*, 1998, 2001, 2004). Além disso, Faria *et al.* (1999) mostram que o mesmo acontece para o número de divisão de vértices pelo resultado de Robertson e de Seymour (1995).

Na literatura são encontradas algumas invariantes de não planaridade para desenho de grafo, tais como o número de divisão de vértice e o número de remoção de arestas. O algoritmo *PLANARIZE* de Jayakumar, Thulasiraman e Swamy (1989) utiliza a operação de remoção de arestas para o desenho de grafo não planar. Eades e Mendonça (1993) consideraram o número de divisão de vértice adaptando o algoritmo *PLANARIZE* para o *SPLIT-PLANARIZE*. Isto foi feito substituindo a operação de remoção de aresta pela operação de divisão de vértice. Ambos os algoritmos têm complexidade de tempo $O(n^2)$ e complexidade de espaço $O(n + m)$, onde n é o número de vértices e m é o número de arestas de G. Na seção seguinte será discutido como o algoritmo *PLANARIZE* (Jayakumar *et al.*, 1989) foi adaptado para um novo algoritmo proposto neste trabalho com complexidade de tempo e espaço $O(n + m)$. Outro diferencial, consequente do uso da operação de remoção de vértice, é o fato de que o algoritmo *PLANARIZE* devolve um subgrafo planar enquanto que o algoritmo proposto devolve um subgrafo planar induzido.

A literatura relata muitos algoritmos que tentam remover um número mínimo das arestas para obter um subgrafo planar (Fisher e Wing, 1966; Pasedach, 1976; Marek-Sadowska, 1978; Chiba *et al.*, 1979; Ozawa e Takahashi, 1981). Uma das melhores tentativas é o algoritmo *PLANARIZE* de Jayakumar, Thulasiraman e Swamy (1989); resumidamente denotado por algoritmo *JTS PLANARIZE*. O algoritmo *JTS PLANARIZE* é baseado no algoritmo de teste de planaridade de Lempel, Even e Cederbaum (1967) e Even (1979) (em resumo, o algoritmo de LEC) e sua implementação usando árvores-PQ (Booth e Lueker, 1976). O algoritmo proposto

neste trabalho, denominado de *VD-PLANARIZE*, usa ideias similares do algoritmo *PLANARIZE* acima, porém, ele utiliza a operação de remoção de vértice ao invés da operação de remoção de aresta (usada por *PLANARIZE*)

A seção 2 descreve o algoritmo de LEC e a estrutura de dados chamada árvores-PQ e, ainda, alguns conceitos associados a esta estrutura de dados. Na seção 3 é apresentado o algoritmo *VD-PLANARIZE*. A seção 4 analisa a complexidade do algoritmo e o seu desempenho. A seção 5 apresenta o algoritmo evolutivo GA*VD-PLANARIZE* e posteriormente é apresentada uma análise empírica dos testes realizados com os algoritmos (seção 6).

2. O Algoritmo de LEC e Árvores-PQ

Esta seção apresenta os princípios do algoritmo *JTS PLANARIZE* baseado no algoritmo de teste de planaridade de LEC executado com auxílio de árvores-PQ. As definições desta estrutura de dados e as operações sobre ela são descritas nesta seção. Entretanto, acerca dos detalhes de implementação das operações com árvores-PQ é recomendado ao leitor que consulte o trabalho de Booth e Lueker (1976).

O algoritmo de LEC trata somente de grafos biconexos. Considerando que é fácil dividir um grafo em uma árvore de componentes biconexos (blocos). Gibbons (1984) apresenta um algoritmo de complexidade linear que reconhece uma árvore de componentes biconexos de um grafo. Consideram-se, neste trabalho, somente grafos biconexos.

Considere um grafo biconexo $G=(V, E)$ com $n=|V|$ vértices e $m=|E|$ arestas. Uma *st*-numeração é uma rotulação dos vértices de G por números inteiros 1, 2,…, n sendo que "1" é adjacente a "n" e o vértice j é adjacente a um par de vértices i e k se $i < j < k$. O vértice "1" (resp. "n") é chamado fonte (resp. sumidouro) e denotado por s (resp. t). Cada grafo biconexo tem uma *st*-numeração (Lempel *et al.*, 1967) e tal rotulação pode ser encontrada em tempo linear (Even e Tarjan, 1976). O grafo G rotulado com *st*-numeração é chamado *st*-grafo.

Seja G_k, $1 \le k \le n$, um subgrafo de um *st*-grafo G induzido pelo conjunto de vértices $V_k = \{1, 2,\ldots, k\}$. Seja B_k um grafo associado ao subgrafo G_k e de todas as arestas de G incidentes com os vértices de V_k e de V-V_k em G. Estas arestas são chamadas *arestas virtuais* e os vértices de V-V_k são chamados de vértices virtuais. Os vértices virtuais são rotulados como seus vértices equivalentes em G; no entanto mantidos separados (uma folha para cada adjacente que não tenha sido imerso – *embeded*). Consequentemente, em B_k pode haver diversos vértices virtuais com o mesmo rótulo, cada um com exatamente uma aresta virtual. Um desenho de B_k é chamado de *arbusto* (*bush form*) de B_k se os vértices com rótulos menores aparecerem em um nível mais elevado e todos os vértices virtuais aparecerem no mesmo nível. Figura 1 (a) mostra o $K_{3,6}$ com uma *st*-numeração; (b) mostra, também, um arbusto B_5.

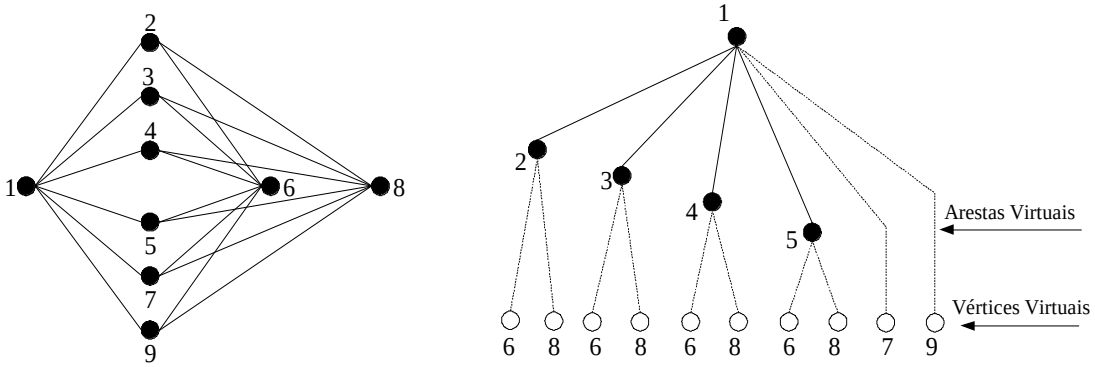


Figura 1: Um *st*-grafo e um arbusto B_5

Pode-se mostrar (Lempel *et al.*, 1967; Even, 1979) que um *st*-grafo é planar se e somente se para cada B_k, $2 \le k \le n$ - 2, existir um grafo planar B'_k isomorfo a B_k tal que todos os vértices virtuais em B'_k rotulados k+1 aparecerem consecutivamente.

Uma árvore-*PQ* (Booth e Lueker, 1976) *T* é uma estrutura de dados que representa um conjunto das permutações em um conjunto *S*. Os nós de *T* são:

- folhas, representando os elementos de *S*;
- nós-P, convencionalmente representado como um círculo;
- nós-Q, convencionalmente representado como um retângulo.

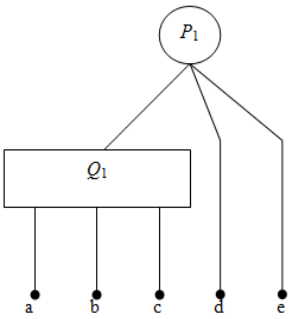


Figura 2: Uma árvore-*PQ*

Para este tipo de árvore é muito importante a ordem de como os filhos de um nó aparecem. Define-se a *fronteira* de *T* como sendo a permutação representada pela ordem da esquerda para direita de todas as folhas de *T*. Por exemplo, a fronteira da árvore-*PQ* na figura 2 é [abcde].

O conjunto das permutações representadas por *T* é gerado rearranjando os filhos de cada nó de P e de Q de acordo com duas regras:

(i) Os filhos de um nó-P podem ser permutados livremente;

(ii) A ordem dos filhos de um nó-Q só pode ser invertida.

O conjunto das permutações de *S* represento por *T* é o conjunto das fronteiras das árvores *T* obtidas de *T*, rearranjando os filhos de acordo com estas regras. Por exemplo, o conjunto das permutações representadas pela árvore-*PQ* na figura 2 é: [abcde], [abced], [cbade], [cbaed], [dabce], [dcbae], [eabcd], [ecbad], [deabc], [decba], [edabc], e [edcba]. Estas permutações se dividem em doze árvores da figura 3.

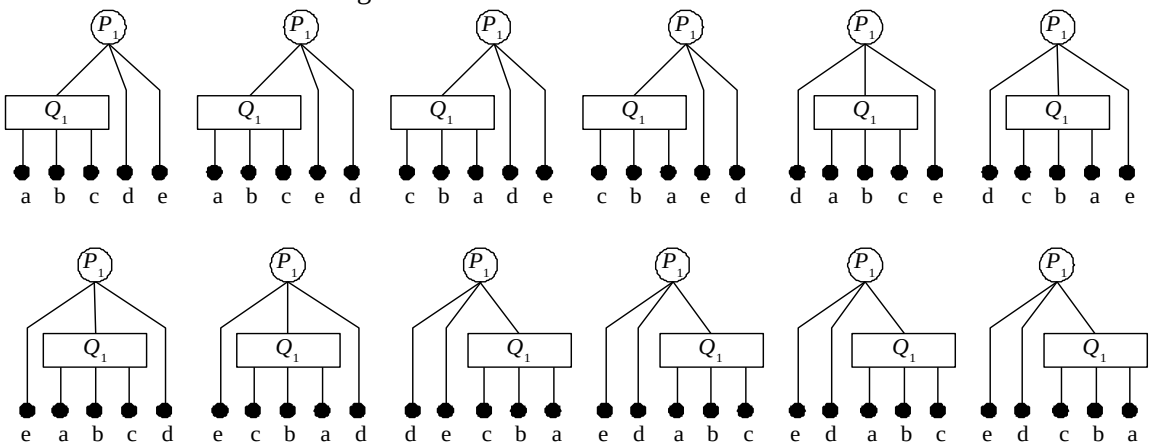


Figura 3: Doze permutações permitidas por uma árvore-*PQ*

Estas árvores-*PQ* provaram ser úteis em muitos problemas os quais envolvem a redução sucessiva dos conjuntos das permutações para encontrar uma permutação especial. Por exemplo, foram usados para reconhecer grafos planares, grafos de intervalo, matrizes com a propriedade de uns consecutivos (Booth e Lueker, 1976), os grafos planar hierárquicos (Di Battista e Nardelli, 1988), bem como os desenhos de dominância (Eades *et al.*, 1993).

Neste trabalho, uma árvore-*PQ* T_k é usada para representar o arbusto B_k no algoritmo. Os nós de T_k correspondem os seguintes:

(i) folhas: os vértices virtuais de B_k ,

(ii) nós-Q: os componentes biconexos maximal em B_k ,

(iii) nós-P: os vértices de articulação em B_k .

As folhas são chamadas *pertinentes* se corresponderem ao próximo vértice selecionado (rótulo k+1) com possibilidade de ser imerso; enquanto que as demais são chamadas folhas *não pertinentes*. Da mesma forma, um nó não folha X é dito pertinente se alguma folha descendente de X na árvore-*PQ* for pertinente. Se todas as folhas do descendente de um nó X na árvore-*PQ* forem pertinentes, então X é chamado de nó *cheio*. Se nenhuma folha descendente do nó X for pertinente, então X é dito *vazio*. A *fronteira* de X é definida pelo seu conjunto das folhas descendentes, lidas da esquerda para a direita. Um nó X é uma *raiz pertinente* se ele for o nó de mais baixo nível cuja fronteira contém todas as folhas pertinentes. A árvore enraizada em X é chamada de subárvore *pertinente*. Uma vez que uma raiz pertinente é identificada, pode-se usar uma série de testes de padrões e realocações descritos em (Booth e Lueker, 1976) para construir uma árvore nova em que todas as folhas pertinentes aparecem consecutivamente, se tal árvore existir. Caso isso ocorra, todas as folhas pertinentes na nova árvore aparecerão como filhos de um único nó. Por exemplo, vamos supor que a árvore-*PQ* da figura 4 representa um arbusto B_7; o nó P_1 é um nó pertinente; o nó Q_1 é um nó vazio; o nó P_2 é a raiz pertinente; o nó Q_2 é um nó cheio; as folhas pertinentes são rotuladas como 8; e as folhas não pertinentes são rotuladas como 9, 10, 11, 12.

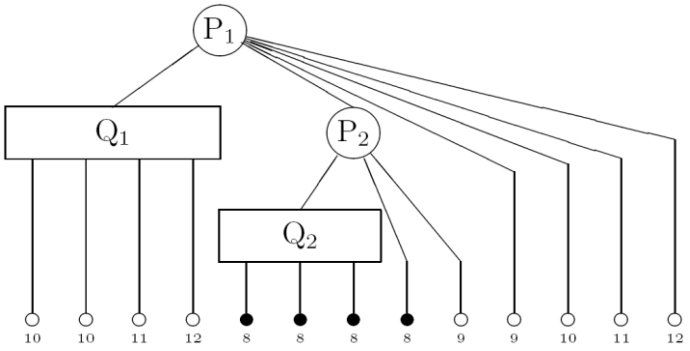


Figura 4: Uma árvore-*PQ* de um arbusto B_7

A *redução* é uma operação importante em uma árvore-*PQ*. Em um nível abstrato, a redução toma um conjunto das permutações Π de S e um subconjunto $S' \subseteq S$ e retorna um subconjunto Π' de Π tal que os elementos de S' aparecem consecutivamente em todas as permutações em Π'. Os elementos dos S' são ditos elementos *pertinentes* de S.

Both e Lueker (1976) criaram um algoritmo que reduz uma árvore T_k em uma árvore T_k^* de tal forma que todas as folhas pertinentes apareçam consecutivas na fronteira de T_k^* (quando for possível). A operação de redução pode ser executada eficientemente com uma implementação sofisticada de árvores-*PQ*. Este trabalho, no entanto, não discute essas operações que são descritas em detalhes em (Booth e Lueker, 1976). O processo de redução mencionado pode ser executado em duas etapas:

Bubble up: nesta etapa é identificada a subárvore pertinente (sobre a qual a redução deve ser processada).

Redução: nesta etapa é executada uma série de operações de teste de padrão e substituição usando as operações de inversão dos nós-*Q* e permutação dos nós-*P*.

Nota-se facilmente que nem sempre uma árvore-*PQ* T_k pode ser reduzida em uma árvore T_k^*, assim, Ozawa e Takahashi (1981) definiram alguns critérios para testar uma árvore antes de aplicar a redução. Sejam G um *st*-grafo biconexo e T_1, T_2,…, T_{n-1} as árvores-*PQ* correspondentes aos arbustos B_1, B_2,…, B_{n-1} de G. Um nó X de uma árvore-*PQ* é classificado de acordo com sua fronteira como segue:

Tipo A: se a subárvore enraizada em X puder ser rearranjada, de tal maneira que todas as folhas pertinentes descendentes de X apareçam consecutivamente no meio da fronteira, com pelo menos uma folha não pertinente em cada extremo da fronteira. Por exemplo, o nó P_1 na figura 4 é o tipo *A*.

Tipo B: se a fronteira da subárvore enraizada em X consistir somente em nós pertinentes, então X é um nó cheio. Por exemplo, o nó Q_2 na figura 4 é o tipo *B*.

Tipo H: se a subárvore enraizada em X puder ser rearranjada, de tal maneira que todas as folhas pertinentes do descendente de X apareçam consecutivamente em uma das extremidades da fronteira. Por exemplo, o nó P_2 na figura 4 é o tipo *H*.

Tipo W: se a fronteira da subárvore enraizada em X consistir somente de folhas não pertinentes, ou seja, X for um nó vazio. Por exemplo, o nó Q_1 na figura 4 é o tipo *W*.

Sabe-se que nem sempre uma árvore-*PQ* é um dos tipos *A*, *B*, *H* ou *W*. Entretanto, será visto mais adiante a necessidade de transformar (essencialmente pela remoção de vértice) toda árvore em uma árvore do tipo *W*.

Um grafo G de n vértices é planar se e somente se as raízes pertinentes em todas as árvores-*PQ*, T_2, T_3...,T_{n-2} de G forem do tipo *B*, *H* ou *A*. Uma árvore-*PQ* é *redutível* se sua raiz pertinente for o tipo *B*, *H* ou *A*, caso contrário é irredutível (Ozawa e Takahashi, 1981).

As duas árvores T_1 e T_{n-1} são *redutíveis*. A primeira porque tem somente uma folha pertinente correspondente à aresta {1, 2} e a última árvore porque tem somente um tipo de folha que é o nó que corresponde ao vértice virtual n.

3. Planarização por Remoção de Vértices

Nesta seção será introduzida a proposta do algoritmo de planarização de grafos por remoção de vértices, denominado de *VD-PLANARIZE*.

Em linhas gerais, o algoritmo *VD-PLANARIZE* inicia com um vértice e prossegue com a imersão de um vértice de cada vez construindo um subgrafo planar induzido G' de G. Os vértices são selecionados seguindo a ordem da rotulação introduzida pelo algoritmo de *st-numeração* (Lempel *et al.*, 1967). Seja v o próximo vértice selecionado cuja imersão será analisada no subgrafo planar G'. Seja E_v o subconjunto das arestas que incidem em v e em vértices de G' e seja $\hat{E}_v$ o subconjunto das outras arestas incidentes com v. Em cada iteração, se um vértice v não puder ser imerso em G', então ele é removido. O conjunto restante de arestas $vu \in \hat{E}_v$ é adicionado (como arestas *dummy*) ao primeiro vértice imerso (vértice 1). Isto será feito para cada vértice u que não tenha outro adjacente com rótulo menor que o rótulo de v, com o objetivo de manter a propriedade da *st*-numeração.

O algoritmo de LEC inicia com árvore T_1 e constrói a sequência de árvores-PQ T_1, T_2, ... Se um grafo for planar, o algoritmo de LEC termina depois de construir a árvore T_{n-1}, caso contrário ele termina quando detecta a impossibilidade de reduzir uma árvore T_k em T_k^*.

Considere T_k uma árvore-*PQ* irredutível de um grafo não planar, ou seja, é impossível reduzir uma árvore T_k em T_k^*. Neste caso, o algoritmo proposto adiciona uma nova operação denominada *Update*(k). Esta operação remove todas as folhas pertinentes transformando a árvore T_k no tipo *W*. Além disso, se algum vértice u com rótulo maior que k+1, adjacente ao vértice equivalente das folhas pertinentes removidas, não tiver outro adjacente com rótulo menor, uma nova aresta (*dummy*) é adicionada ao grafo de tal modo que u seja adjacente a s. Isto é necessário para manter a propriedade da *st*-numeração. Cada iteração de imersão do algoritmo pode

aumentar o número dos adjacentes de *s*. Entretanto, este número não excede o número dos vértices de *G*. A pergunta principal é como inspecionar os adjacentes do vértice a ser removido para assegurar a propriedade da *st*-numeração sem aumentar a complexidade de tempo. Isto pode ser feito adicionando um campo *small*(*u*) para cada vértice *u*. Este campo informa quantos adjacentes de *u* têm rótulos menores do que o rótulo de *u* estabelecido na etapa da *st*-numeração. Assim, quando os nós pertinentes – correspondentes ao vértice v_{k+1} – são removidos para fazer todas as subárvores T_k do tipo *W*, o campo *small*(*u*) é reduzido de uma unidade para cada adjacente *u* de v_{k+1} onde *u* tem a rótulo maior que *k*+1. Quando o valor do campo *small*(*u*) alcança o valor zero, uma aresta *dummy* é adicionada de *s* para *u*. Depois da execução da última iteração são removidas todas as arestas *dummy* de *s* para *u* onde o campo *small*(*u*) é zero.

O pseudocódigo do algoritmo proposto é apresentado como segue:

VD-PLANARIZE
Entrada: grafo *G*
Saída: subgrafo induzido planar de *G*
Pré-processamento: obter uma *st*-numeração válida para *G,* obter a lista *small* para todos os vértices de *G.*

1: **Início:**
2: construir a árvore inicial T_1;
3: **para** $k := 2$ **até** $n - 2$ **faça**: {seguindo a $st-$ numeração}
4: **se** T_{k-1} for redutível {teste de Ozawa e Takahashi} **então**:
5: aplica a redução {algoritmo de Booth e Lueker};
6: **senão**
7: $Update(v_k)$;
8: obter T_k substituindo todos os nós pertinentes de T^*_{k-1} por um novo nó-*P* P_k com todas as arestas saindo do vértice v_k com rótulo maior do que *k* aparecendo como filho de P_k;
9: **retorna** *G*;
10: **Fim;**

4. A Complexidade e Desempenho do Algoritmo *VD-PLANARIZE*

A redução Booth e Lueker de todas as árvores-PQ redutíveis T_k pode ser executada em tempo total de O(*n*+*m*) (Jayakumar *et al.*, 1989). Se uma árvore-PQ T_k não for redutível, executa-se a operação *Update*(*k*) que fará a remoção dos vértices pertinentes. Vamos supor o pior caso com o máximo de vértices removidos (note que isto é verdadeiro para o grafo K_n). Neste caso, para cada vértice *v* removido, o algoritmo inspeciona os rótulos de cada adjacente *u* de *v*. Se o rótulo de *u* for maior do que o rótulo de *v*, o valor de *small*(*u*) é reduzido uma unidade. Portanto, a operação *Update*(*k*) inspecionará cada vértice e seus adjacentes. Logo, no pior caso, o tempo total dessa operação é O(*n* + *m*) (similar à busca em largura). A adição de arestas *dummy* ao vértice *s* será feita, no pior caso, *n* vezes. Consequentemente, a complexidade de tempo do *VD-PLANARIZE* é O(*n* + *m*).

Por se tratar de um algoritmo heurístico, o questionamento que pode ser feito é quanto à qualidade das soluções obtidas, ou seja, a quantidade de vértices removidos. A solução ótima implica em remover o número mínimo de vértices. A eficiência do algoritmo, com exceção de poucos casos tal como para grafo completo K_n, é fortemente dependente da *st*-numeração, visto que as árvores-PQ são construídas nessa ordem. Portanto ficam as pergunta: quantas *st*-numerações diferentes um grafo pode possuir? E qual o impacto dessas *st*-numerações na qualidade das soluções?

Responder estas questões se mostra uma tarefa árdua, visto que o número de *st*-numerações admissíveis por um grafo varia de acordo com sua estrutura e características. Para um grafo completo de *n* vértices, após a escolha da aresta *st*, cada vértice ainda não *st*-numerado pode ser candidato ao próximo valor, portanto é trivial mostrar que existem *n! st*-numerações para este grafo. Evidente que para este caso as *st*-numerações são indiferentes, dado que todo vértice é adjacente a todo outro vértice, entretanto podemos utilizar *n!* como um limite superior de possíveis *st*-numerações.

Portanto, dado um espaço muito grande de possíveis *st*-numerações e sabendo que diferentes *st*-numerações afetam a qualidade das respostas fornecidas pelo *VD-PLANARIZE*, optou-se por utilizar uma técnica de busca a fim de refinar a qualidade das soluções encontradas. Alguns detalhes adicionais sobre o algoritmo *PLANARIZE* podem ser consultados no trabalho apresentado por Constantino *et al.* (2011)

5. O *GAVD-PLANARIZE*

Como o algoritmo *VD-PLANARIZE* possui complexidade de tempo linear, seu uso como função objetivo para técnicas de otimização se mostra eficiente, no caso de encontrar o menor número de vértices a ser removido. Sabendo que é possível efetuar a *st*-numeração em tempo linear, e que o espaço de possíveis *st*-numerações é demasiadamente grande para se enumerar, a aplicação de uma técnica de busca de busca em grandes espaços de soluções se mostra viável. Dessa maneira propomos o algoritmo *GAVD-PLANARIZE*.

O *GAVD-PLANARIZE* é definido sobre a estrutura básica de algoritmos genéticos (Goldberg, 1989). Os indivíduos são definidos em estruturas que contém uma cópia da lista de adjacências do grafo a ser planarizado, uma aresta $\{s, t\}$ para uso do método de *st*-numeração, um vetor contendo uma *st*-numeração gerada sobre a aresta $\{s, t\}$ e um valor de aptidão calculado após a geração da *st*-numeração.

O cromossomo de um indivíduo é uma cópia da lista de adjacências do grafo a ser planarizado. Dado um grafo *G* e um cromossomo *c*, esse cromossomo é constituído de *n* genes, onde *n* é o número de vértices de *G*. Cada gene g_k é composto pela lista de adjacências do vértice v_k.

Sempre que um indivíduo é gerado, seja na população inicial ou após um cruzamento, o algoritmo *TARJANST-NUMBERING* é aplicado sobre a sua estrutura de adjacências utilizando a aresta $\{s, t\}$ do próprio indivíduo para obter uma *st*-numeração, o qual é armazenada no vetor *st*. Depois de obtida uma *st*-numeração, o valor de aptidão do indivíduo é calculado e armazenado. Somente após esse processo o indivíduo está pronto para ser submetido aos processos de seleção e cruzamento.

O *GAVD-PLANARIZE* utiliza uma população de tamanho fixo onde a geração dos indivíduos é feita aleatoriamente, copiando a lista de adjacências do grafo original e embaralhando a ordem dos vértices. Durante a seleção e renovação da população, optou-se por utilizar um sistema de elitismo. O elitismo consiste em manter parte da população e renovar a contraparte. O *GAVD-PLANARIZE* mantém os 10% melhores indivíduos da população e o restante passa pelo processo de seleção. Na geração da população, assim que um indivíduo é aleatoriamente gerado, uma aresta $\{s, t\}$ aleatória é atribuída a esse individuo.

O algoritmo utiliza uma técnica de *scaling* linear para determinar a aptidão de um indivíduo. Dessa forma temos que a função objetivo $f_{scaling}(f_O(x))$ para um indivíduo x qualquer é determinada pela equação:

$$f_{scaling}(f_O(x)) = f_O(x) \times a + b,$$

Sendo que

$$\begin{cases} a = (c-1) \times \frac{med}{\Delta} \text{ e } \quad b = med \times \frac{max - c \times med}{\Delta}, se\ \Delta \neq 0 \\ a = 1, b = 0, \text{caso contrário.} \end{cases},$$

$f_O(x)$ é o número de vértices do grafo planar do indivíduo x, max é o número de vértices do maior grafo planar encontrado, med é a média de todas as soluções, Δ é o número de vértices do maior grafo planar encontrado naquela população menos o valor de $f_O(x)$ e o fator escala foi definido $c = 1{,}5$ para que indivíduos menos aptos tenham maior de chances de serem sorteados a fim de melhorar a diversidade da população.

No processo de seleção, após definir a elite, escolhe-se, pela aplicação do método da roleta, pares de indivíduos cuja reprodução gerará a nova população. O processo de seleção pelo método da roleta é definido em função do valor de aptidão $t_k = f_{scaling}(f_O(k))$ de cada indivíduo, e o valor total $t_s = \sum_{k=1}^{n} t_k$, onde n é o número de indivíduos da população. Sorteia-se um valor aleatório r onde $1 \leq r \leq t_s$ e seleciona-se os indivíduos que pertencem às faixa do somatório do número sorteado.

O mecanismo de reprodução proposto para o *GAVD-PLANARIZE* é composto de duas fases. A primeira realiza a operação de *crossover* e a segunda efetua uma busca local gulosa para encontrar a melhor aresta $\{s, t\}$ para ser utilizada pelo método de *st*-numeração. A operação de *crossover* é efetuada pela aplicação do método uniforme, onde dois pais geram dois filhos. Para cada cruzamento, cada gene do primeiro filho é sorteado dentre seus pais. O segundo filho recebe os genes complementares em relação aos herdados pelo primeiro filho.

Depois de gerados os cromossomos e antes da definição do valor de aptidão de cada filho, todo indivíduo gerado é submetido a uma pequena chance α de sofrer uma mutação. O processo de mutação é realizado utilizando a técnica *flip* que escolhe um gene ao acaso e embaralha toda a ordem dos vértices deste gene.

Ao gerar os cromossomos dos filhos, o *GAVD-PLANARIZE* executa o procedimento de busca local gulosa na vizinhança das arestas $\{s, t\}$ para encontrar a melhor aresta para aquela representação do grafo. O procedimento inicia sua busca escolhendo a melhor aresta $\{s, t\}$ dos pais. A escolha dessa aresta é feita no momento do cruzamento e o processo consiste em encontrar a melhor *st*-numeração dadas as arestas $\{s, t\}$, e sua inversa $\{t, s\}$, de cada pai e a estrutura de adjacências do filho. Então o procedimento guloso é iniciado pela aresta $\{s, t\}$ selecionada e gera uma *st*-numeração para essa aresta, planarizando o grafo com o algoritmo *VD-PLANARIZE*, e para cada vértice v adjacente a s, o algoritmo *GREEDYST-SEARCH* gera uma *st*-numeração para a aresta $\{s, v\}$ e então planariza o grafo com o algoritmo *VD-PLANARIZE*. Se o resultado for um subgrafo planar de número de vértices maior do que o subgrafo planar obtido pela aresta $\{s, t\}$ inicial, então v substitui t. O algoritmo *GREEDYST-SEARCH* realiza o mesmo processo para a aresta $\{v, s\}$ e caso o grafo planar obtido tenha mais vértices que o melhor obtido até então, a aresta $\{s, t\} \coloneqq \{v, s\}$ e o algoritmo *GREEDYST-SEARCH* retorna uma chamada recursiva sobre a nova aresta $\{s, t\}$. O algoritmo encerra quando não encontrar melhora na solução corrente.

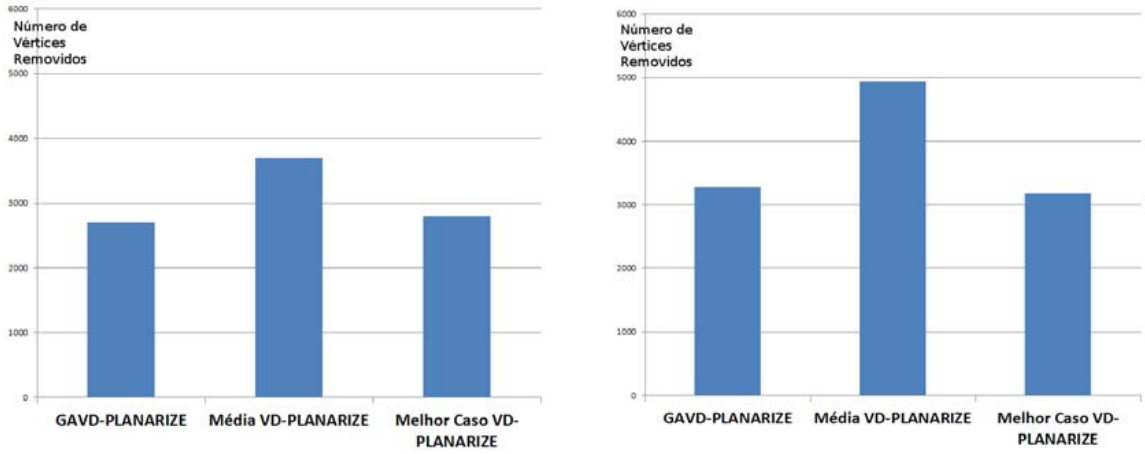
6. Resultados

O algoritmo foi implementado em *Java 6 Update 14* e os testes de medição de foram executados em um *PC AMD Athlon XP 2600+* com *1GB* de memória na plataforma *Windows XP*.

Testou-se o *GAVD-PLANARIZE* para duas classes de grafos; grafos cartesianos, por possuírem características de simetria entre os vértices e arestas, e grafos gerados aleatoriamente. O *VD-PLANARIZE* foi executado para todas as combinações de *st*-numerações possíveis, utilizando-se uma técnica de *backtracking* para a obtenção das mesmas. O comparativo da qualidade das soluções foi feito entre a média obtida pelas execuções do *VD-PLANARIZE* e uma execução do *GA-VDPLANARIZE*.

A Figura 5a apresenta o gráfico dos resultados obtidos nos testes de grafos $C_n \times C_m$, onde se gerou grafos para $3 \leq n \leq 10$ e $3 \leq m \leq 25$. O primeiro ponto de interesse no gráfico é a discrepância entre a média do *VD-PLANARIZE* e a melhor solução encontrada, o que

demonstra que as diferentes *st*-numerações de fato são fortemente impactantes na qualidade das soluções obtidas. Outro ponto de interesse é que o número de vértices removido pelo *GAVD-PLANARIZE* é muito próximo da melhor solução possível, provando a qualidade do algoritmo para essa classe de grafos.



(a) (b)

Figura 5: (a) Resultados para grafos $C_n \times C_m$ (b) Resultados para grafos randômicos

A Figura 5b mostra os resultados obtidos dos testes em grafos aleatórios de tamanhos que variam de 30 a 75 vértices. Os testes procederam como no caso anterior. Percebe-se que no geral o desempenho do *GAVD-PLANARIZE* é superior aos melhores resultados do que os obtidos pela exaustão de *st*-numerações. Isso ocorre, pois o *GAVD-PLANARIZE* não apenas testa diferentes *st*-numerações, mas também diferentes configurações da lista de adjacências do grafo, o que interfere no algoritmo de planarização.

O tempo computacional do algoritmo é ilustrado pela Figura 6 usando grafos de diferentes tamanhos em termos do número de vértices e arestas ($m+n$) e com tempo calculado em segundos. Nota pelo gráfico que complexidade de tempo do algoritmo tem uma leve tendência para uma taxa de crescimento não linear.

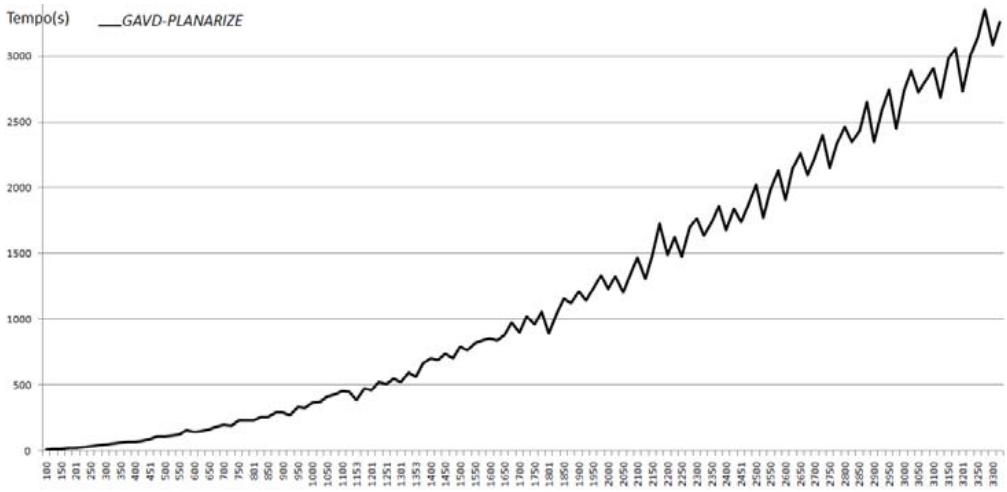


Figura 6. Curva do tempo de execução do algoritmo GAVD-PLANARIZE

7. Conclusões

Este trabalho apresentou um algoritmo evolutivo, denominado de *GAVD- PLANARIZE*, baseado em algoritmos genéticos para o problema de planarização de grafos. Como técnica de planarização, foi utilizado o algoritmo *VD-PLANARIZE* que utiliza a operação de remoção de vértices para a obtenção do grafo planar. No melhor do nosso conhecimento, este é o único algoritmo da literatura que procura otimizar o número de vértices a ser removido para o processo de planarização de grafos.

É importante salientar que não foi encontrado na literatura algoritmo algum com complexidade linear para planarização de grafos por remoção de vértice. Além do mais, o uso da remoção de vértice é muito raro como ferramenta para planarização de grafo. Note que o algoritmo encontra um subgrafo planar induzido, de componentes biconexos não planar. No entanto, é possível encontrar uma árvore (ou uma floresta se o gráfico não for conexo) de componentes biconexos em tempo linear e construir um subgrafo planar induzido a partir de aplicações sucessivas do algoritmo *VD-PLANARIZE*.

Um aspecto muito importante a ser destacado é a justificativa do uso de um algoritmo heurístico para planarização de grafos por remoção de vértices. O trabalho de Faria *et al.*(2006) prova que não existe algoritmo de aproximação para planarização de grafos por remoção de vértices. Portanto, esta é uma forte razão para o uso de algoritmos heurísticos como alternativa para o problema.

O *GAVD-PLANARIZE* procura explorar o espaço de soluções planares possíveis utilizando diferentes *st*-numerações e obtém bons resultados. Porém, mesmo sendo capaz de refinar a solução, não existem garantias de que apenas alterando a *st*-numeração o *VD-PLANARIZE* possa obter a solução ótima. O *GAVD-PLANARIZE*, portanto, não somente altera a *st*-numeração, mas também efetua uma busca local em cada indivíduo, obtendo resultados de qualidade superior. Dessa forma, se sugere uma exploração mais abrangente do espaço de soluções, utilizando técnicas de busca mais avançadas que e que explorem um espaço mais abrangente, comparado com o gerado pelas combinações de *st*-numerações.

Agradecimentos: Agradecemos a CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro que apoiaram o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Booth, K. S. e Lueker, G. S. (1976), Testing for the Consecutive Ones Property, Interval Graphs, and Graph Planarity Using *PQ*-Tree Algorithms. *J. Comp. Syst. Sci.*, (3):335–379.

Chiba, T., Nishioka, I. e Shirakawa, I. (1979), An Algorithm of Maximal Planarization of Graphs. *In Proc. 1979 IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, 648–652.

Constantino, A. A., Mendonça, C. F. X. de, Pinheiro, R. L. (2011), Um Algoritmo Heurístico de Complexidade Linear para Planarização de Grafos por Remoção de Vértices. In: XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2011, Ubatuba. Anais do *XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional,* 2011. v. 1. p. 1-11.

Di Battista, G. e Nardelli, E. (1988), Hierarchies and Planarity Theory. *IEEE Trans. on Systems, Man., and Cybernetics*, (18): 1035-1046, 1988.

Eades, P. e de Mendonça, C. F. X. (1993), Heuristics for planarization by vertex splitting. In Proc. *ALCOM Int. Workshop on Graph Drawing*, GD'93, 83–85.

Eades, P., Elgindy, H., Houle, M., Lenhart, B., Miller, M., Rappaport, D. e Whitesides, S.

(1993), Dominance Drawings of Bipartite Graphs. *Workshop on Layout and Optimal Path Problems at Hawks Nest*, Australia, sponsored by the Department of Computer Science, The University of Newcastle, New South Wales, Australia, 1993.

Even, S. *Graph Algorithms*. Computer Science Press, Potomac, Maryland, (1979).

Even¸S. e Tarjan, R. E. (1976), Computing and st-Numbering. *Theoret. Comp. Sci*., 2:339–344.

Faria, L., Figueiredo, C. M. H. e Mendonça, C. F. X. (1998), Splitting number is Np-complete. 24th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 1998, *Lecture Notes in Computer Science*, 1517: 285-297.

Faria, L., Figueiredo, C. M. H. e Mendonça, C. F. X. (2001), On the Complexity of Approximation of Nonplanarity Parameters for Cubic Graphs. In Proc. Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics, GRACO'2001, *Eletronic Notes in Mathematics*, Elsevier, Fortaleza, Brazil.

Faria, L., Figueiredo, C. M. H. e Mendonça, C. F. X. (2004), On the complexity of the approximation of nonplanarity parameters for cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 141(1-3):119–134.

Faria, L., Figueiredo, C. M. H., Mendonça, C. F. X. e Stolfi, J. (2006), On maximum planar induced subgraphs, *Discrete Applied Mathematics*, 154: 1774-1782.

Faria, L., Figueiredo, C. M. H. e Mendonça, C. F. X. (1999), Optimal node-degree bounds for the complexity of nonplanarity parameters. In Proc. 10th. Ann ACM- SIAM Symp. on Discrete Algorithms SODA'99, pages 887–888.

Fisher, G. J. e Wing, O. (1966), Computer Recognition and Extraction of Planar Graphs from the Incidence Matrix. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-13:154–163.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1983), Crossing number is NP-complete. SIAM J. *Algebraic and Discrete Methods*, 4(3):312–316.

Geldmacher, R. C. e Liu, P. C. (1979), On the deletion of nonplanar edges of a graph. *Congressus Numerantium*, 24:727–738.

Gibbons, A. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

Goldberg, D. E, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Boston, MA: Addison-Wesley, 1989.

Jayakumar, R., Thulasiraman, K. e Swamy, M. N. S. (1989), O(n2) Algorithms for Graph Planarization. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 8(3):257–267.

A. Lempel, A., Even, S. e Cerderbaum, I. (1967), An Algorithm for Planarity Testing of Graphs, *Proceddings International Symposium on Theory of Graphs*, Rome, Italy, July 1966. P. Rosenstiel (Ed.), Gordon & Breach, (1):215–232.

Marek-Sadowska, M. (1978). Planarization Algorithm for Integrated Circuits Engineering. In Proc. 1978 *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, (1): 919–923.

Ozawa, T. e Takahashi, H. (1981), A Graph-Planarization Algorithm and its Applications to Random Graphs. *Graph Theory and Algorithms, Lectures Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 108: 95–107.

Pasedach, K. Criterion and Algorithms for Determination of Bipartite Subgraphs and their Application to Planarization of Graphs. in *Graphen-Sprachen und Algorithmen in Graphen*, 175-183, Carl Hanser Verlag, Germany, (1976).

Robertson, N. e Seymour, P. D. (1995), Graph minors. XIII. the disjoint paths problems. *Journal of Combinatorial Theory Ser*. B, 63:65–110.

Yannakakis, M. (1979), Node- and edge deletion NP-complete problems. In Proc. 10th. Ann ACM Symp. on Theory of Computing, New York, (1): 253–264.