UM MÉTODO BASEADO NA SUBSTITUIÇÃO DE VÉRTICES E TEORIA ESPECTRAL PARA O PROBLEMA DE P-MEDIANAS

Carolina Rocha Freitas
Universidade Federal do Rio Grande
Av. Itália km 8 Bairro Carreiros. Rio Grande - RS
c.rocha.freitas@gmail.com

Catia Maria dos Santos Machado
Universidade Federal do Rio Grande
catiamachado@furg.br

Mario Rocha Retamoso
Universidade Federal do Rio Grande
marioretamoso@furg.br

RESUMO

Este trabalho propõe um novo método de solução para o problema de p-medianas com vértices não-ponderados, elaborado a partir da relação entre a teoria espectral e a otimização combinatória. O estudo dos problemas de p-medianas contribui diretamente em problemas comuns na organização da vida em sociedade. Pela sua importância e diversidade de aplicações, determinar novos métodos de resolução que proporcionem melhores soluções em um bom tempo computacional vem a contribuir por meio da ampliação do leque de problemas que podem ser resolvidos eficientemente. Nesse sentido, o trabalho vem abordar problemas de localização formulados como os problemas de p-medianas, utilizando resultados da teoria espectral na construção de um algoritmo híbrido baseado no método de substituição de vértices e apresentar simulações computacionais que mostram sua eficácia quanto ao valor da solução, o número de reduções da função objetivo e o tempo de resolução quando comparado ao método clássico de Teitz e Bart.

PALAVARAS CHAVE. P-medianas, Teoria Espectral, Teitz e Bart.

Área principal: OC - Otimização Combinatória, PM - Programação Matemática, OA - Outras aplicações em PO

ABSTRACT

This work presents a new method for solving the p-medians problems with non-weighted vertexes, based on the relationship between spectral theory and combinatorial optimization. The study of p-medians problems contribute directly to the society's life. Its importance and diversity of applications motivate the determination of new resolution methods that provide better solutions in a good computational time. New and better methods contribute by broadening the range of real problems that can be effectively solved. In this sense, the work has addressed the location problems, more specifically, the p-medians problems, using the results of spectral theory in the construction of a hybrid algorithm based on the vertexes substitution method and present computational results that show its effectiveness on the value of the solution, the number of reductions of the objective function and the time resolution when compared to the traditional Teitz and Bart method.

KEYWORDS. P-medians. Spectral Theory. Teitz and Bart.

Main area: OC – Combinatorial Optimization, PM – Mathematical Programming, OA – Other applications in OR

1. Introdução

O estudo de Problemas de Localização de Facilidades é aplicado a várias situações do cotidiano. Podemos citar, por exemplo, a localização de empresas, escolas, hospitais, fábricas, centrais de tratamento de resíduos, de distribuição de produtos, prestação de serviços, entre outros. Pela diversidade de aplicações, muitas áreas do conhecimento possuem interesse no assunto como a logística, administração e engenharia de produção. O objetivo principal desses problemas é determinar a localização ideal de facilidades (instalações) de forma a atender da melhor maneira a um conjunto de usuários, maximizando lucros e minimizando custos. Através desta busca é que surgiu o chamado Problema de p-medianas, onde p é o número de facilidades a serem instaladas com o objetivo de minimizar a soma das distâncias de todos os pontos atendidos à mediana mais próxima. Estes problemas de otimização combinatória são classificados como NP-completos e, apesar do conjunto de soluções possíveis do problema ser finito, e, portanto, presumível de se obter a solução ótima por simples enumeração e avaliação de cada possibilidade, o conjunto de soluções admissíveis pode ser tão vasto que se torna impossível avaliar cada um dos seus elementos num espaço de tempo aceitável.

Pela sua importância econômica, surge a necessidade de uma abordagem heurística para a resolução dos problemas de localização através de procedimentos simples, muitas vezes empíricos, e que produzem boas soluções num tempo computacional razoável. Um dos métodos heurísticos mais citados na literatura para o problema de p-medianas é o de Teitz e Bart, também chamado de Método de Substituição de Vértices que aponta boas soluções, mas com um tempo de processamento que não se mostra muito eficaz em redes grandes, dependendo principalmente da solução inicial adotada. Neste sentido, o presente estudo vem abordar os problemas de localização, mais especificamente os problemas de p-medianas, sua modelagem matemática e aplicações, bem como o algoritmo de Teitz e Bart. Em seguida, será apresentada uma medida de centralidade que aponta os vértices mais importantes de um grafo fortemente conexo com arestas e vértices ponderados, com o objetivo de desenvolver um novo algoritmo que relaciona resultados da Álgebra Linear e da Otimização Combinatória, baseado no algoritmo clássico de Teitz e Bart, com o intuito de melhorar o tempo de processamento do mesmo para a localização de facilidades em redes médias e grandes. A implementação dos dois algoritmos e testes computacionais serão apresentados e ilustrarão a eficácia do método.

2. Problemas de Localização

Os Problemas de Localização são estudados desde o século XVII, quando Pierre de Fermat buscava solucionar o seguinte problema: dados três pontos de um plano (os vértices de um triângulo), encontrar o ponto do plano (mediana), tal que a soma das distâncias entre cada um dos vértices e a mediana seja mínima.

Já Alfred Weber, no século XX, desenvolveu o modelo que deu origem à teoria das localizações. O trabalho aborda a localização de uma indústria, considerando os fornecedores e os consumidores e buscava a melhor localização que proporcionasse o menor custo em termos de transporte. Neste trabalho, Azzoni (1982) afirma que Weber considerou cada um dos três pontos correspondendo a um cliente e encontrar a mediana equivalendo a encontrar a melhor localização de uma facilidade para satisfazer seus clientes. Este e outros estudos da época tinham abordagem contínua, uma vez que para determinar uma localização no plano, o espaço de solução é infinito, no entanto, nas diversas aplicações em regiões urbanas, o espaço de solução é discreto, sendo necessário especificar os estudos. Na década de 60, com o desenvolvimento da teoria dos grafos, iniciou-se o estudo de localização em redes, onde Hakimi (1964) e (1965) apresentou as formulações mais importantes do problema de p-medianas e mostrou que o espaço de soluções consiste apenas nos vértices do grafo, e as distâncias são medidas ao longo dos arcos. Os trabalhos de Hakimi possibilitaram que os métodos de busca não perdessem tempo procurando a solução sobre os arcos do grafo e assim, propriedades matemáticas relevantes da teoria de grafos facilitaram a modelagem, tornando possível o desenvolvimento de procedimentos eficientes para resolvê-los.

O problema de p-medianas é um problema de localização e também um problema de alocação. Os modelos de p-medianas têm como objetivo minimizar a soma dos custos de distribuição entre facilidades que fornecem um serviço e pontos de demanda que precisam ser atendidos, em função disso, é também chamado de Minisum. Na visão da teoria dos grafos, Hakimi (1965) tornou simples a determinação de uma mediana. Considerando um grafo $G(V,E)$ onde V é o conjunto de vértices $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ e E é o conjunto de arestas $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$. Em muitas aplicações ocorre que aos vértices estão associados valores que representam a importância de cada um, isto é, os vértices são ponderados. Para que a formulação do problema seja mais abrangente, consideramos os pesos como sendo respectivamente $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. Por meio dessas informações, é construída uma matriz, chamada distância-peso, onde as entradas ij são a distância mínima entre o vértice i e o vértice j multiplicado pelo peso do vértice j, ou seja, $v_j d_{ij}$. Para cada vértice $x_i \in V$, considerando a distância do vértice x_i ao vértice x_j representada por $d(x_i,x_j)$, define-se o número de transmissão pela equação:

$$\sigma(x_i) = \sum_{x_j \in V} v_j d(x_i,x_j) \tag{1}$$

Observe que na prática, o número de transmissão $\sigma(x_i)$ pode ser visto como a soma dos elementos da linha i da matriz distância-peso. É possível então definir a Mediana de um grafo como o vértice $\bar{x}$ o qual satisfaz a equação acima.

$$\sigma(\bar{x}) = \min_{x_i \in V}[\sigma(x_i)] \tag{2}$$

Para o caso de p medianas, consideramos o subconjunto $V_p \subseteq V$ com p vértices do conjunto de vértices V. A distância do vértice x_j e o subconjunto de vértices V_p como sendo:

$$d(x_j,V_p) = \min_{x_i \in V_p}[d(x_j,x_i)] \tag{3}$$

Para o subconjunto V_p de V, define-se transmissão de V_p como:

$$\sigma(V_p) = \sum_{x_j \in V} v_j.d(V_p,x_j) \tag{4}$$

O problema de p-medianas consiste em encontrar o subconjunto $\bar{V}_p$ de cardinalidade p para o qual a transmissão $\sigma(\bar{V}_p)$ seja mínima, isto é:

$$\sigma(\bar{V}_p) = \min_{V_p \subseteq V}[\sigma(V_p)] \tag{5}$$

A formulação matemática para o problema de localização de p-medianas com a utilização de programação matemática inteira, de acordo com Pizzolato (1994), consiste em:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}.\xi_{ij} \tag{6}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} = 1 \qquad \forall j = 1,\dots,n \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} = p \qquad (8)$$

$$\xi_{ij} \leq \xi_{ii} \forall\, i,j = 1, \ldots, n \qquad (9)$$

$$\xi_{ij} \in \{0,1\} \qquad (10)$$

onde n é o número de vértices do grafo, p é o número de medianas a ser instalado, d_{ij} é o produto da distância entre os vértices x_i e x_j pelo peso v_j, sendo v_j a demanda de cada vértice x_j, [ξ_{ij}] é a matriz de alocação, que será 1 se o vértice x_j é alocado ao vértice mediana x_i e 0 no caso contrário e ainda ξ_{ii} é considerado 1 se o vértice x_i for um vértice mediana e 0 caso contrário. A equação (6) é a função objetivo a ser minimizada sujeita à algumas restrições: a equação (7) garante que apenas uma mediana seja instalada, a equação (8) garante a instalação das p medianas, a equação (9) afirma que um vértice j somente é alocado à um vértice i se este for um vértice mediana e a restrição de número (10) é a condição de integralidade.

O problema de p-medianas tem grande importância prática. Diversos trabalhos são publicados aplicando o estudo na solução de problemas como, por exemplo, a determinação da localização de escolas públicas do Rio de Janeiro escrito por Pizzolato (1994), localização de shopping centers de Rozental e Pizzolato (2009), estudo de localização de maternidades apresentada por Galvão et all (2002), localização de plataformas marítimas de Estrella (2010), antenas de telecomunicação Lorena e Pereira (2002) entre outros.

3. Heurística de Teitz e Bart

O problema de p-medianas é um problema combinatorial e possui como característica a dificuldade de determinação da solução ótima através de métodos exaustivos e, devido à explosão combinatorial, torna-se necessário um elevado tempo computacional para que esta seja determinada. Atualmente, existem diversos métodos heurísticos e metaheurísticos utilizados para a resolução do problema de p-medianas, mas um deles chama a atenção, o método heurístico baseado na substituição de vértices desenvolvido por Teitz e Bart (1968).

O método é citado na literatura como um dos melhores algoritmos para o problema de p-medianas uma vez que é de fácil implementação e produz boas soluções. Hörner (2009) realizou testes comparando os métodos de Teitz e Bart, Algorítmo Genético e Busca Tabu e concluiu que o método de Teitz e Bart apresenta melhor qualidade de solução, mas o tempo computacional não foi considerado satisfatório. Para contornar este problema, Hörner indicou a possibilidade de o Teitz e Bart partir de uma boa solução inicial determinada por outro método a fim de que esta seja melhorada, diminuindo o tempo de processamento do método. Os passos do algoritmo são descritos como:

Passo 1: Selecionar um conjunto S de p vértices, formando uma aproximação inicial do conjunto ótimo V_p. Chamar todos os vértices $x_j \in S$ de vértices não testados e os $x_i \in S$ de testados;

Passo 2: Selecionar um vértice não testado $x_j \notin S$, compute a redução Δ_{ij} no número de transmissão, se x_i é substituído por x_j, isto é, compute a equação (11):

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_j\} - \{x_i\}) \qquad (11)$$

Passo 3: Encontre $\Delta_{i_0 j} = \max_{x_i \in S}[\Delta_{ij}]$

i) Se $\Delta_{i_0 j} \leq 0$ rotule o vértice x_j como testado e volte ao passo 2;

ii) Se $\Delta_{i_0 j} > 0$ efetuar $S \leftarrow S \cup \{x_j\} - \{x_i\}$, rotular x_j como testado e volte ao passo 2.

Passo 4: Repetir 2 e 3 até que todos os vértices do conjunto de vértices V estejam rotulados como testados. Este procedimento é referido como ciclo. Se, durante o último ciclo nenhuma substituição foi feita no passo 3(ii), vá para o passo 5. Caso contrário, se foi feita alguma substituição, rotule todos os vértices como não testados e retorne ao passo 2.

<u>Passo 5:</u> Pare. O conjunto S atual é o conjunto de p-medianas $\overline{V}_p$.

No intuito de preservar a qualidade de solução do método citada por Hörner (2009) e reduzir seu tempo de processamento, surge a motivação de criar um novo método, baseado na heurística clássica de substituição de vértices, mas combinada à exploração das características estruturais dos vértices do grafo que modelam os problemas de localização. Para isto, foram utilizados resultados da Teoria Espectral e de Grafos, que serão abordados na sequência.

4. Resultados da Teoria Espectral

A partir da análise da Heutística de Teitz e Bart, foi observado que o método utiliza como ferramenta a matriz de distância-peso definida anteriormente, uma vez que analisa a redução do número de transmissão $\sigma(S)$ que explora as entradas desta matriz. Com isto, foi realizado um estudo do espectro das matrizes de distância-peso e a noção de matrizes não-negativas, redutíveis e irredutíveis. O conceito de irredutibilidade desempenha um papel importante na teoria das matrizes não-negativas, e vem a ser equivalente a noção de grafos fortemente conexos.

Seja A uma matriz real nxn. A é dita não-negativa se $a_{ij} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Denota-se, neste caso, $A \geq 0$. Se $a_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ diz-se que A é positiva e é denotado $A > 0$. É possível observar que se uma matriz A é não-negativa, então, para qualquer $m \geq 0$ tem-se $A^m \geq 0$. Uma vez que a matriz A possui uma quantidade elevada de elementos não-nulos, então $A^m > 0$ para m suficientemente grande.

Para Brualdi e Cvetkovic (2009), seja A uma matriz nxn com $n \geq 2$. A é uma matriz redutível se existe uma matriz P associada a uma permutação $\sigma \in S_n$, a qual:

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{se } \sigma(\mathrm{i}) = \mathrm{j} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases} \tag{12}$$

De modo que:

$$P^t A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas de ordem menor que n. Se a matriz P não existir, diz-se que A é irredutível.

Observe que toda matriz positiva é irredutível, bem como toda matriz não-negativa nxn com $n \geq 2$ que tenha no máximo $n - 2$ entradas nulas é irredutível.

Brualdi e Cvetkovic (2009) ainda afirmam que uma matriz não-negativa é irredutível se, e somente se, seu grafo dirigido associado é fortemente conexo. Lembrando que um grafo é fortemente conexo se e somente se não houver uma partição de seu conjunto de vértices em dois conjuntos não vazios U e W tal que cada aresta entre U e W tem seu vértice de saída em U e chegada em W. Assim, permutando as linhas e colunas da matriz de adjacência A de modo que as primeiras linhas e colunas de A correspondam aos vértices em U, se o grafo não for conexo, esta partição haverá e a matriz A após as permutações ficará:

$$P^t A P = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix} \tag{14}$$

Onde X e Z são matrizes quadradas de ordem pelo menos 1. Assim, se o grafo não for conexo, sua matriz de adjacência que possui entrada 1 se o vértice i é alocado ao vértice j e zero em caso contrário, será redutível.

Este é um importante resultado que permite a análise da irredutibilidade de matrizes relacionando com a teoria de grafos. Com as definições vistas até agora, é possível enunciar o mais importante teorema que norteia este trabalho emitido e demonstrado por Madrid (2009):

TEOREMA: (Perron-Frobenius) Seja $A \in \mathcal{M}_{nxn} \in (\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, então:

(i) A tem um autovalor positivo λ, igual ao raio espectral de A
(ii) Existe um autovetor positivo associado a
(iii) O autovalor tem multiplicidade algébrica igual a um.

As matrizes distância-peso dos grafos que modelam os problemas de localização possuem a característica de serem matrizes não-negativas e terem apenas a diagonal nula, uma vez que sempre há distância entre um vértice a outro e os pesos são sempre positivos. Dessa forma, não existe uma matriz de permutação P tal que o produto da equação (13) seja satisfeito. Assim, trata-se matrizes não-negativas e irredutíveis o que mostra que se enquadram nas hipóteses do teorema de Perron-Frobenius, havendo sempre a possibilidade da determinação do autovalor igual ao raio espectral de A denotado por $\rho(A)$, que é o número real não negativo $\rho(A)$ = max |λi|, onde λ1, . . . , λn são os autovalores de A, e do autovetor positivo associado através do Método das Potências exposto por Golub e Loan (1996). Estes autovetor e autovalor são chamados de autovalor e autovetor dominantes da matriz.

Assim como cada linha da matriz distância-peso está associada a um vértice do grafo, também é associado a cada coordenada do autovetor dominante dessas matrizes um valor que pode ser chamado de prestígio de um vértice do grafo. Este prestígio leva em consideração, os pesos e os prestígios dos demais vértices, bem como a distância mínima aos demais vértices, uma vez que temos para $\lambda_M = \rho(A)$, x_i a coordenada i do autovetor dominante x, e v_j o peso do vértice j, para $j = 1, \ldots, n$, a seguinte igualdade:

$$\lambda_M x_i = v_1 d_{i1} x_1 + v_2 d_{i2} x_2 + \cdots + v_n d_{in} x_n \tag{15}$$

Uma vez que trata-se de um problema de minimização, quanto menor for o valor de x_i maior será o prestígio do vértice e, assim, será definido neste trabalho uma nova forma de medir os vértices mais centrais de um grafo, chamada *Centralidade ADP*:

DEFINIÇÃO: Seja G um grafo fortemente conexo e A sua matriz distância-peso cujo autovetor dominante é representado por x. Define-se a medida de centralidade a qual denomina-se Centralidade ADP para os vértices v_i de G como sendo o inverso da componente x_i de x, isto é:

$$C_{ADP}(v_i) = \frac{1}{x_i} \tag{16}$$

A definição da Centralidade ADP permite que sejam identificados os vértices mais centrais de um grafo, sendo que será provado que o vértice de maior centralidade ADP sempre será o vértice mediana do grafo.

TEOREMA: Seja A uma matriz quadrada de ordem n, irredutível e não-negativa. Seja λ_M o autovalor positivo igual ao raio espectral de A e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o autovetor unitário positivo associado à λ_M. Considerando $x_i = min\ \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, então $\lambda_M x_i \leq \lambda_M x_k$ se, e somente se, para $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \tag{17}$$

<u>Demonstração:</u> Como x é autovetor de A associado ao autovalor λ_M, tem-se que, para $k = 1, 2, \ldots, n$

$$Ax = \lambda_M x \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda_M x_k \tag{19}$$

Considerando:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = min\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right\}_{k=1}^{n} \tag{20}$$

Como $\|x\| = 1$ pode-se notar que $x_j \leq 1, \forall j = 1,2,\dots,n$. (*). Assim:

$$\lambda_M x_i \leq \lambda_M x_k \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} x_j - a_{ij} x_j) \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - a_{ij}) x_j$$

De (*) segue que:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - a_{ij}) x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} - a_{ij}) \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{kj}$$

5. Método de Teitz e Bart Modificado por C_{ADP}

Através dessa nova medida para calcular os vértices mais centrais de uma rede e da prova que ele vale para a determinação de uma mediana, foi elaborado um novo método baseado no algoritmo de Teitz e Bart, mas que utiliza os vértices mais centrais como conjunto solução inicial, além de apontar quais os vértices devem ser testados. A seguir, será apresentado o método, aplicável a grafos com vértices não ponderados, chamado de *Método de Teitz e Bart Modificado por C_{ADP}*.

<u>Passo 1:</u> Divida a região R em p regiões, de modo que $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$

<u>Passo 2:</u> Aplique o método das potências em cada uma das p regiões, determinando assim os autovetores dominantes $V_1, V_2, \dots, V_p$ de cada uma delas.

<u>Passo 3:</u> Para cada vetor V_i, com $i = 1, \dots, p$, forme conjuntos V'_i com os vértices correspondentes às componentes de V_i ordenadas em ordem crescente.

<u>Passo 4:</u> Considere um percentual do total de elementos de V'_i. Para cada conjunto V'_ido passo 3, forme subconjuntos ordenados X_i com os j primeiros elementos de V'_i. Denote esses subconjuntos por: $X_i = \{x_{in} \in X_i, n = 1, \dots, j\}$

<u>Passo 5:</u> Forme o conjunto S, chamado solução inicial do problema, através de $S = \{x_{i1} \in X_i, i = 1, \dots, p\}$. Calcule o valor da Função Objetivo para o conjunto S.

<u>Passo 6:</u> Rotule os vértices de $x_{ik} \in (X_i - S)$, como não testados.

<u>Passo 7:</u> Para algum i, selecione o elemento $x_{ik} \in (X_i - S)$ não testado, mais próximo de $x_{in} \in S$ de acordo com a ordenação de X_i.

<u>Passo 8:</u> Compute a "redução" Δ^i_{nk} no número de transmissão, da substituição de x_{in} por x_{ik}, isto é, compute:

$$\Delta^i_{nk} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_{ik}\} - \{x_{in}\} \tag{21}$$

i) Se $\Delta^i_{nk} \leq 0$ rotule o vértice x_{ik} como testado e volte ao passo 7.

ii) Se $\Delta^i_{nk} > 0$ efetuar $S \leftarrow S \cup \{x_{ik}\} - \{x_{in}\}$, rotular x_{ik} como testado e volte ao passo 7.

<u>Passo 9:</u> Repetir os passos 7 e 8 até que todos os vértices dos subconjuntos X_i estejam rotulados como "testados". Este procedimento é referido como ciclo. Se, durante o último ciclo nenhuma substituição foi feita no passo 8(ii), vá ao passo 10. Caso contrário, se foi feita alguma substituição, rotule todos os vértices como "não testados" e retorne ao passo 7.

<u>Passo 10:</u> Pare. O conjunto S atual é o conjunto de p-medianas $\bar{X}_p$.

A primeira modificação do método clássico de Teitz e Bart está na determinação de um conjunto solução inicial apropriado para os problemas de localização através dos passos 1, 2, 3 e 5. A segunda importante modificação consiste em, uma vez que é sabido através da centralidade C_{ADP} quais são os vértices mais centrais de cada região, é plausível realizar a análise da redução da função objetivo apenas com os vértices que são bons candidatos à mediana, determinando uma porcentagem de vértices a serem testados a cargo do tomador de decisão (passo 4). Cabe aqui salientar que quanto mais precisa a divisão das regiões, menor pode ser a porcentagem de vértices a serem testados que a qualidade da solução é preservada. A terceira modificação consiste em que, enquanto o Teitz e Bart clássico toma, para a análise da redução do número de transmissão, um vértice qualquer não-testado, o método proposto segue a ordenação das centralidades C_{ADP} de cada região (passo 7). Por fim, embasada no fato que é desejado que em cada uma das regiões haja uma mediana, o vértice não-testado de maior centralidade que será analisado, será substituído apenas pelo vértice pertencente ao conjunto solução vigente que se encontra na mesma região que ele (passo 8). As modificações propostas reduzem significativamente o número de iterações do algoritmo, como será visto no item Resultados Computacionais.

Para fins de ilustração do algoritmo proposto neste trabalho, tendo como base o trabalho de Capri e Steiner (2006) desenvolvido no intuito de otimizar o serviço de estacionamento rotativo regulamentado da cidade de Ponta Grossa no Paraná, será apresentada uma situação problema. A Figura 1 representa o mapa da região de cobertura do estacionamento rotativo regulamentado da cidade de Rio Grande no Rio Grande do Sul. Cada pondo em azul representa um parquímetro e busca-se a distribuição dos trechos de quadra em setores a serem percorridos por três fiscais e a determinação das áreas compostas por estes setores de forma a minimizar o total das distâncias percorridas por eles ao final de um dia de trabalho.

De acordo com o problema, é almejada a determinação de três medianas da rede cujos vértices são os parquímetros, considerando a distância euclidiana entre eles, então, divide-se a região em três sub-regiões de acordo com uma maior aglomeração de pontos, como mostra a Figura 2. Em cada uma das regiões, é determinada a matriz de distâncias mínimas e o autovetor dominante de cada uma delas através do método das potências. Através das coordenadas de cada autovetor, os vértices de cada região são ordenados de acordo com a centralidade C_{ADP} e apenas 30% dos vértices mais centrais serão considerados para análise.

Figura 1- Mapa Estacionamento Rotativo de Rio Grande – RS. Fonte: Prefeitura do Rio Grande

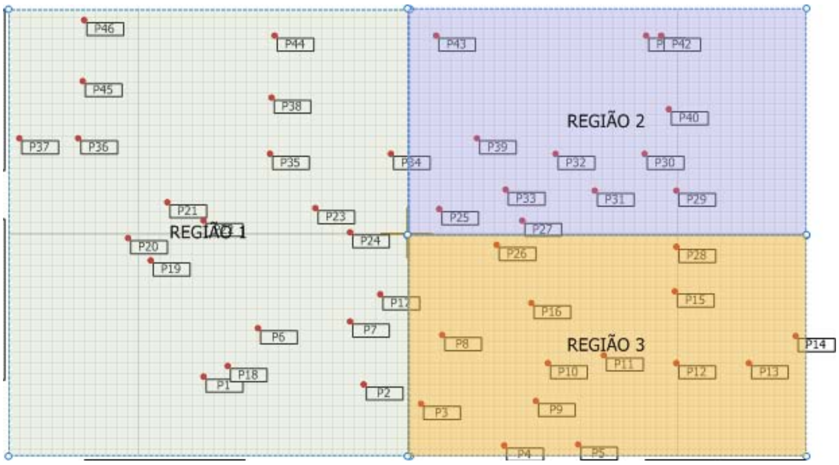

Figura 2 – Pontos que representam os parquímetros e Divisão em Três Regiões

A ordenação dos vértices de cada região é V'_1={P22, P21, P23, P35, P19, P20, P24, P6, P38, P36, P17, P7, P34, P18, P37, P45, P1, P44, P2, P46}; V'_2={P32, P30, P31, P33, P39, P40, P27, P29, P41, P25, P42, P43}; V'_3={P11, P10, P9, P12, P16, P15, P8, P5, P13, P4, P28, P3, P26, P14} e considerando 30% de cada um dos conjuntos, temos então X_1={P22, P21, P23, P35, P19, P20}; X_2={P32, P30, P31, P33}; X_3={P11, P10, P9, P12}. Esta escolha mostra que, o que o Teitz e Bart Clássico testaria todos os pontos dos conjuntos V'_1, V'_2 e V'_3, o método proposto apenas irá testar os pontos dos conjuntos X_1, X_2 e X_3. O conjunto solução inicial é então constituído pelos vértices mais centrais de cada região, isto é, S={P22, P32, P11}. Nos próximos passos é escolhido um vértice não testado pertencente a algum X, por exemplo, para X_3, o vértice a ser analisado será o P10 e será substituído no lugar do P11 de S para a análise da redução da função objetivo, se há redução, então a substituição é feita e o P10 passa a fazer parte de S e o vértice P9 passa a ser o próximo vértice a ser analisado, se não há redução, nenhuma substituição é feita e o P9 passa a ser o próximo vértice a ser analisado. O processo é repetido até que não haja mais vértices em nenhum dos conjuntos X a serem analisados.

Para este exemplo, quando resolvido através do método de Teitz e Bart e da modificação proposta o resultado foi o mesmo, ambos apresentando como conjunto solução S={P32, P10, P21} com função objetivo F.O=4484,32. No entanto, foram necessárias 17 substituições para gerar a redução na função objetivo no método de Teitz e Bart, enquanto que no método Modificado por C_{ADP}, com apenas 2 reduções já foi possível chegar no resultado. Além disso, o valor da função objetivo do conjunto solução inicial S={P22, P32, P11} foi de 4535,36 enquanto que no conjunto solução inicial aleatório utilizado pelo Teitz e Bart clássico foi de 7030,53 para S={P21, P14, P22} o que mostra a qualidade da solução inicial construída, uma vez que a diferença entre a F.O. inicial e final é pequena quando comparada com a diferença para a solução aleatória. A solução obtida é mostrada na figura 3 a seguir.

Figura 3-Solução obtida

6. Resultados Computacionais

Para a análise da eficácia do Método de Teitz e Bart Modificado por C_{ADP} em comparação com o método clássico de Teitz e Bart, foram gerados 104 problemas aleatórios. Estes problemas foram resolvidos pelos algoritmos com pesos iguais a um e escolhida a porcentagem de 30% das componentes ordenadas do autovetor dominante de cada região. Foi convencionado o termo redes médias para problemas de 150 a 500 nós, enquanto que redes grandes para problemas de 501 até 1000 nós. Em cada rede média criada, foram feitos testes que buscavam a localização de 5 a 30 medianas. Já para cada rede grande, buscou-se determinar de 1 a 30 medianas. O objetivo dos testes foi classificar o comportamento dos algoritmos aplicados ao problema de p-medianas quanto à qualidade da solução, isto é, do valor da função objetivo do conjunto de vértices apontados como medianas, quanto o tempo de processamento e quanto ao número de substituições necessárias para a redução do valor da função objetivo.

Em cada um dos gráficos que apontam os resultados em redes médias, o eixo horizontal corresponde ao número do teste efetivado, sendo que os primeiros testes foram realizados considerando 150 vértices e 5 medianas até 150 vértices e 30 medianas e o último teste foi considerado 500 vértices e 30 medianas. Nos gráficos de redes grandes, os primeiros testes foram feitos com 550 vértices considerando de 1 até 30 medianas e o último teste foi realizado em um grafo com 1000 vértices e 30 medianas. Em todos os gráficos, as linhas azuis são os resultados obtidos mediante resolução pelo Método de Teitz e Bart enquanto que as linhas vermelhas representam as soluções do Método Modificado.

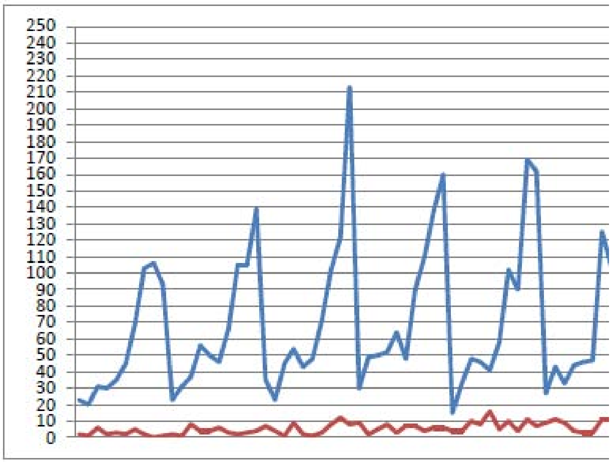

Figura 4- Reduções na F.O em Redes Médias

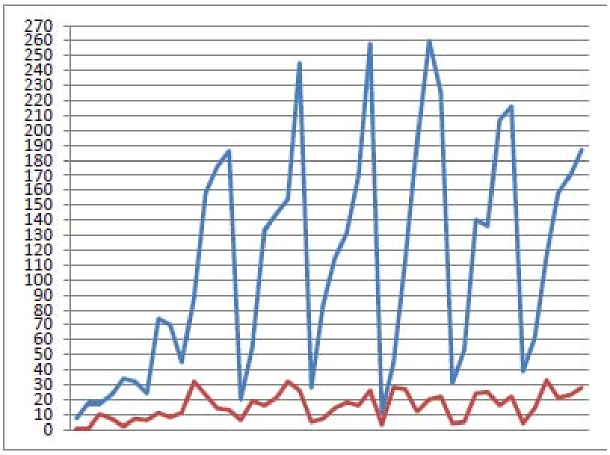

Figura 5-Reduções na F.O em Redes Grandes

Nas figuras 4 e 5, o eixo vertical corresponde ao número de reduções da função objetivo. Através de sua análise, podemos observar que tanto em redes de porte médio quanto em redes de porte grande, o número de reduções da função objetivo é sempre menor no método modificado e a diferença é significativa quando comparada ao método de Teitz e Bart clássico partindo de uma solução aleatória. Os picos nos gráficos mostram que quanto maior o número de medianas, mais eficaz se mostra o método proposto. Além disso, o número de reduções indica que a estratégia de obtenção da solução inicial é apropriada, pois explora regiões promissoras na busca por melhores soluções. Isso fez com que o tempo de processamento do método proposto fosse sempre menor que o tempo do Teitz e Bart, tornando também a diferença mais significativa quanto maior o número de medianas e também quanto maior o número de vértices, como pode ser verificado nos gráficos das Figuras 6 e 7 os quais o eixo vertical corresponde ao tempo de processamento, convertido em decimal, de cada método.

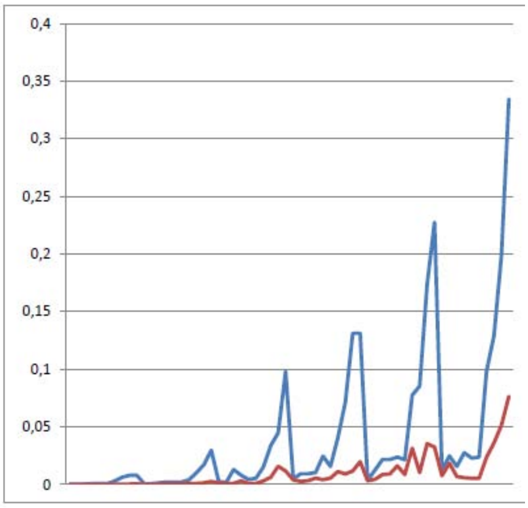

Figura 6-Tempo em Redes Médias

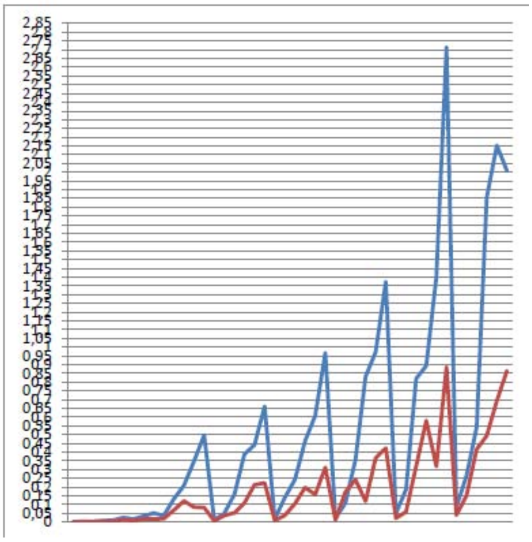

Figura 7-Tempo em Redes Grandes

Por fim, através da análise dos gráficos das Figuras 8 e 9, é possível concluir que tanto em redes médias quanto em redes grandes, a qualidade de solução final (valor da função objetivo) se manteve com a escolha de 30% das componentes ordenadas do autovetor dominante de cada região, uma vez que os gráficos ficaram sobrepostos. Cabe salientar que quanto melhor a delimitação das regiões, uma menor porcentagem garante a qualidade da solução em menor tempo, enquanto que quando não há a certeza da escolha de regiões apropriadas, uma maior porcentagem possibilita melhores soluções.

Figura 8-Valor da Função Objetivo F.O. em Redes Médias

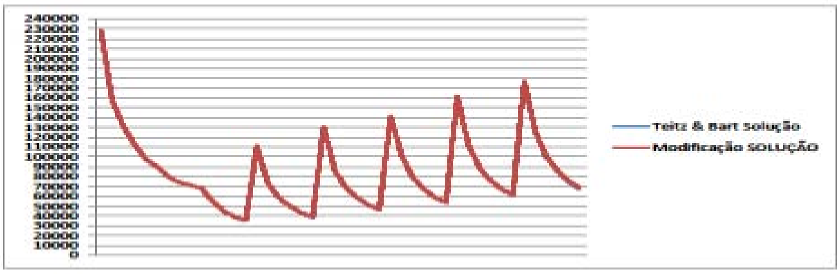

Figura 9-Valor da Função Objetivo F.O. em Redes Grandes

7. Conclusão

Através do estudo realizado, foi possível observar que importantes resultados da Teoria Espectral podem ser utilizados na obtenção de características estruturais de grafos que modelam os problemas de localização e na determinação de uma nova forma de medir centralidade de grafos. Esta medida possibilitou a construção de um conjunto solução apropriado para os problemas de localização e a elaboração de uma melhoria para o algoritmo de Teitz e Bart, matematicamente verificável, que fez com que o número de iterações fosse sensivelmente reduzido, possibilitando sua aplicação em redes de médio e grande porte. Finalmente, o estudo da teoria espectral combinado com estudos em otimização combinatória, torna-se uma ferramenta a mais no auxílio da tomada de decisão.

Referências

Azzoni, C. R, *Teoria da Localização: uma análise crítica*. São Paulo, IPE - USP, 1982.

Brualdi, R. A.; Cvetkovic, D. *A Mathematical Approach to Matrix Theory and its Applications*. Taylor & Francis Group, 2009.

Capri, M. A. V, and Steiner, M. T. A. *Otimização no serviço do estacionamento rotativo regulamentado utilizando técnicas da pesquisa operacional*. XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2006.

Estrella, E, *Localização de Plataformas Marítmas*. Dissertação de Mestrado, PUC/Rio, 2010.

Galvão, R. D; Acosta, L. G. E. and Boffey, B. A, *Hierarchical Model for the Location of Perinatal Facilities in Municipality of Rio de Janeiro*. European Journal of Operational Research, 138, 2002, pp. 495-517.

Golub, G. H. and Loan, C. F. V. *Matrix Computations*. 3rd ed. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences, 1996.

Hakimi, S. L, *Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph.* Operations Research, v. 12, p. 450-459, 1964.

Hakimi, S. L, *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*. Operations Research, v. 13, p. 462-475, 1965.

Hörner, D. Resolução *do problema das p-medianas não capacitado: Comparação de algumas técnicas heurísticas*. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2009.

Lorena, L. A. N. and Pereira, M. A. *A Lagrangean/surrogate heuristic for the maximal covering location problem using Hillsman's edition*, International Journal of Industrial Engineering, 9(1), p. 57-67, 2002.

Madrid, K. C. *A Teoria de Perron-Frobenius e Aplicações*. 2009. 46f. Tese (Mestrado em Matemática), Universidade Federal Fluminense, Niterói. 2009.

Pizzolato, N. D. *A Heuristic for Large-Size p-median Location Problems with Application to School Location*. Annals of Operations Research, 50, 1994, pp. 473-485.

Rozental, M. and Pizzolato, N. D. *Localização de Shopping Center de Vizinhança Estudo de Caso: Barra da Tijuca, Rio de Janeiro*. Podes, Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, Vol 1 (3), 2009.

Teitz, M. B. and Bart, P., *Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph*. Operations Research, v. 16, p. 955-961, 1968.