Análise de modelos matemáticos para o problema de corte estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes

Aline Aparecida de Souza Leão
Marcos Nereu Arenales
Universidade de São Paulo-USP
Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro
Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP
e-mail: {aasleao, arenales}@icmc.usp.br

Resumo

Neste trabalho são propostas três formulações matemáticas para o problema de corte de estoque unidimensional integrado ao dimensionamento de lotes. Consideramos problemas com um e vários tipos de objetos para serem cortados e uma máquina para produzi-los. As formulações consideradas são denominadas compacta, estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Para estes modelos foram analisados limitantes inferiores e superiores. Nas formulações estendida e estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, os limitantes inferiores são obtidos pela aplicação do método geração de colunas. Apesar dessas técnicas serem clássicas, elas ainda não foram exploradas e analisadas na literatura para o problema em questão. Com a finalidade de comparar o desempenho dos métodos, os modelos analisados são simplificações de um modelo da literatura. Os resultados computacionais mostram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece melhores limitante inferiores. Entretanto, a formulação estendida fornece melhores soluções factíveis. Futuramente, esses modelos serão estendidos e comparados com a literatura.
PALAVRAS CHAVE. **Problemas de Corte. Problemas de Dimensionamento de Lotes. Métodos de Decomposição**.

Abstract

Three formulations for the one dimensional cutting stock problem integrated with the capacitated lot sizing problem are proposed. We consider problems with single and multiple raw-materials to be cut and one machine to produce them. The formulations are named as compact, extended and extended with Dantzig-Wolfe decomposition. For all formulations, we evaluate the upper and lower bounds. In the extended and extended with Dantzig-Wolfe decomposition formulations, the lower bounds are determined by the column generation method. Despite these methods are classical techniques, they have not been explored and analyzed in the literature for integrated problems. To compare the performance of the methods, these formulations are simplifications of one model in the literature. The computational results show that the extended formulation with Dantzig-Wolfe decomposition provides the best lower bounds. However, the extended formulation provides the best feasible solutions. For future research these formulations will be extended and compared with the literature.
KEYWORDS. **Cutting Problems. Lot Sizing Problems. Decomposition Methods**.

1. Introdução

Problemas de corte de estoque e de dimensionamento de lotes são amplamente estudados na literatura. Em indústrias de papel, móveis, metalúrgicas entre outras, estes problemas encontram-se de maneira acoplada. Para resolvê-los, uma prática bastante comum é primeiramente determinar uma solução para o problema de corte e, com os padrões determinados, resolve-se o problema de dimensionamento de lotes ou vice-versa. Entretanto, poucos trabalhos discutem estes problemas de maneira integrada. Na literatura, problemas de corte acoplado com programação da produção são relatados em Farley (1988), Reinders (1992), Hendry et al. (1996), Respício et al. (2002), Menon e Schrage (2002), Arbib e Marinelli (2005), Nonas e Thorstenson (2000, 2008), Poltroniere et al. (2008), Santos (2008), Ghidini (2008), Gramani e França (2006) e Gramani et al. (2009). Em alguns trabalhos os modelos propostos são complexos e, para resolvê-los, são utilizadas heurísticas que possuem duas fases: em uma fase resolve o problema de corte e em outra o dimensionamento de lotes.

No contexto de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes encontram-se as indústrias papeleiras. O processo produtivo, produzir matérias-primas (bobinas) e cortá-las em itens finais de modo que atenda a demanda, consiste de diversas etapas e decisões referentes à produção, estocagem e distribuição em um horizonte de planejamento. O estágio de produção de matéria-prima pode variar em algumas indústrias, o qual depende da origem do material (polpa) que será processado na máquina de papel, podendo ser adquirida ou produzida pela própria indústria. Posteriormente, na máquina de papel, a polpa é processada junto com papéis reciclados de diversos tipos. O material obtido ao final do processamento na máquina de papel são jumbos (ou bobinas) que possuem uma determinada gramatura. Após a produção dos jumbos existem dois tipos decisões a serem tomadas, que são o corte dos jumbos nos itens demandados (bobinas menores) e estoque de itens e jumbos no final do período no horizonte de planejamento. Assim, existe um planejamento conjunto de quanto produzir, estocar e cortar bobinas de papel.

Algumas outras características, além da origem da polpa, podem variar nas indústrias papeleiras, que são o número de máquinas e o gargalo da produção. No primeiro caso, existe na literatura indústrias com uma máquina para a produção de papel (Santos e Almada-Lobo, 2012; Correia et al., 2004; Respício et al., 2002) e duas máquinas (Poltroniere et al., 2008). No segundo caso, o gargalo da produção pode ser a máquina que produz papel (Santos e Almada-Lobo, 2012; Poltroniere et al., 2008; Respício et al., 2002) ou a máquina de corte (Menon e Schrage, 2002). No contexto de corte de estoque, em geral, as empresas possuem uma lista de padrões de cortes pré-definidos, e também, estimam uma perda devido ao corte dos objetos. Entretanto, é possível gerar outros tipos de padrões de corte que visam a redução do desperdício de material.

O objetivo deste trabalho é analisar formulações matemáticas de problemas corte de estoque unidimensional acoplado ao de dimensionamento de lotes no contexto de produção e corte de bobinas de papel, de modo que a demanda seja atendida. O gargalo do processo produtivo é a capacidade da máquina que produz as bobinas. Além disso, os problemas de dimensionamento de lotes considerados tem capacidade limitada, com uma máquina para a produção de bobinas de papel de um tipo ou vários tipos definidas pela gramatura.

As modelagens matemáticas para o problema são analisadas de acordo com algumas formulações de problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional. No caso do problema de dimensionamento de lotes, consideramos o problema com um único tipo de objeto (i.e, não existe classificação dos objetos de acordo com a gramatura) e vários tipos de objetos (diferentes tipos de gramatura). Para um único tipo de objetos não existe tempo e custo de preparação de máquina. Enquanto que, para vários tipos de objetos existem custo e tempo de preparação de máquina, que na prática é dependente da sequência, entretanto, consideramos sequência independente. Para cada uma dessas abordagens (único e múltiplos objetos) são propostos três modelos definidos por decomposições do problema. A primeira abordagem (formulação compacta) consiste em modelar o problema de corte de estoque com uma formulação compacta, conhecida na literatura como a formulação de Kantorovich (1960). A segunda (formulação estendida) consiste em considerar a formulação estendida de corte de estoque proposta por Gilmore e Gomory (1961). Por fim, a terceira abordagem consiste em combinar a formulação estendida com a decomposição de Dantzig e Wolfe (1960) para o problema de dimensionamento de lotes. A decomposição Dantzig-Wolfe utilizada é denominada na literatura por decomposição por períodos.

Os modelos apresentados neste trabalho estão baseados em técnicas clássicas da literatura de corte e dimensionamento de lotes. Entretanto, não foi encontrado nenhum trabalho na literatura que comparam elas para estes problemas acoplados. Além disso, a decomposição Dantzig-Wolfe nunca foi aplicada à problemas acoplados, bem como, a combinação de duas decomposições, isto é, a decomposição de Gilmore e Gomory (1961) com a decomposição de Dantzig e Wolfe (1960). Os resultados computacionais mostram que a combinação dessas decomposições fornecem melhores limitantes inferiores para o problema que a abordagem de geração de colunas realizada apenas com os princípios propostos por Gilmore e Gomory (1961).

O problema considerado neste trabalho consiste em uma simplificação do problema estudado em Poltroniere et al. (2008), que é a redução do número de máquinas utilizadas para produzir matéria-prima. Poltroniere et al. (2008) consideram que existem várias máquinas para a produção de matéria-prima e testes computacionais foram realizados para duas máquinas. Enquanto que, neste trabalho é considerado apenas uma máquina para a produção de objetos. Futuramente, os modelos e métodos abordados neste trabalho serão estendidos para o problema proposto em Poltroniere et al.(2008) e comparados com suas heurísticas. Para resolver o problema acoplado, Poltroniere et al. (2008) desconsideram algumas definições do modelo apresentado, como por exemplo, o estoque de itens no final do período do horizonte de planejamento. Enquanto que neste trabalho, as técnicas apresentadas permitem determinar soluções factíveis para o problema com todas as suas características.

Na Seção 2 são propostas três formulações matemáticas para o problema acoplado considerando uma máquina para a produção de um e vários tipos de gramaturas para as bobinas. A seção 3 apresenta os limitantes inferiores provenientes das formulações descritas na Seção 2. Na Seção 4 encontram-se os resultados computacionais para dados gerados com base numa indústria portuguesa. As observações finais são apresentadas na Seção 5.

2. Problema acoplado

Nesta seção são apresentadas três formulações para o problema de dimensionamento de lotes acoplado ao problema de corte de estoque unidimensional com um ou vários tipos de objetos. Para as formulações matemáticas, considere os parâmetros e variáveis dados a seguir.

Dados:

- T: número de períodos no horizonte de planejamento;
- K: número de diferentes tipos de objetos;
- $\{n_0+1, ...n_1, n_1+1, ..., n_2, ..., n_{k-1}+1, n_K\}$: o conjunto de tipos de itens demandados, em que $n_0 = 0$ e $n_K = n$. Assim, o conjunto de itens demandados para o objeto do tipo k é definido por $\{n_{k-1}+1, ..., n_k\}$, $k = 1, ..., K$;
- m_{kt}: número total de padrões de cortes para o objeto do tipo k no período t, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$.
- $\bar{h}_k$: custo de estoque de uma bobina tipo k, $k = 1, ..., K$;
- F_k: custo de estoque inicial de uma bobina tipo k, $k = 1, ..., K$;

- h_i: custo de estoque de um item do tipo i, $i = 1, ..., n$;
- f_i: custo de estoque inicial de um item do tipo $i = 1, ..., n$;
- l_i: comprimento de um item do tipo i, $i = 1, ..., n$;
- d_i^t: número de itens demandados do tipo i no período t, $i = 1, ..., n$, $t = 1, ..., T$;
- b_k: comprimento das bobinas do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- C_t: capacidade da máquina no período t, $t = 1, ..., T$;
- st_k: tempo de preparação de máquina para produzir bobinas do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- stc_k: custo de preparação de máquina para produzir bobinas do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- vt_k: tempo necessário para produzir uma bobina do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- cl_k: custo de papel perdido do tipo k durante o processo de corte, $k = 1, ..., K$.

Variáveis:

- e_k^t: número de bobinas do tipo k armazenadas no final do período t, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$;
- s_i^t: número de itens do tipo i armazenados no final do período t, $i = 1, ..., n$, $t = 1, ..., T$;
- r_k^t: número de bobinas do tipo k produzidas no período t, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$;
- z_k^t: é 1, se bobinas do tipo k são produzidas no período t, 0, caso contrário, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$.

2.1 Formulação compacta

O problema de corte de estoque unidimensional consiste em cortar objetos com uma dimensão relevante em objetos menores, que pode ter como objetivo reduzir a perda, maximizar o lucro, diminuir os custos de produção etc. As restrições do problema de corte considerando a formulação compacta, conhecida na literatura como formulação de Kantorovich (1960), consistem em determinar para cada objeto se ele será utilizado ou não. Caso seja utilizado, deve-se determinar um padrão de corte factível, isto é, corta-se o objeto em itens demandados de modo que não ultrapasse o comprimento do objeto. O número total de itens cortados a partir dos objetos deve satisfazer a demanda. Neste problema, é necessário estimar um limitante superior sobre o número de objetos utilizados para atender a demanda, definido por m_{kt}, para cada objeto do tipo k no período t, $k = 1, ..., K$ e $t = 1, ..., T$. Para o problema acoplado com a formulação de Kantorovich (1960), as variáveis associadas ao problema de corte de estoque são dadas por: y_{jk}^t, que é 1 se o papel do tipo k é cortado de acordo com o padrão j no período t, 0, caso contrário, $j = 1, ..., m_{kt}$, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$; x_{ij}^t que representa o número de itens do tipo i obtidos do padrão de corte j no período t, $i = n_{k-1} + 1, ..., n_k$, $j = 1, ..., m_{kt}$, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$. Os demais dados e variáveis estão definidos no início da seção. A formulação do problema é dada como segue.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_i s_i^t + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} \bar{h}_k e_k^t + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} stc_k z_k^t + \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^0 + \sum_{k=1}^{K} F_k e_k^0$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m_{kt}} cl_k (b_k y_{jk}^t - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ij}^t), \tag{1}$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{m_{kt}} x_{ij}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = 1, ..., n, t = 1, ..., T, \tag{2}$$

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i x_{ij}^t \leq b_k y_{jk}^t, j = 1, ..., m_{kt}, t = 1, ..., T, k = 1, ..., K, \tag{3}$$

$$r_k^t + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{m_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{K} (st_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, t = 1, ..., T, \tag{5}$$

$$r_k^t \leq M z_k^t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T, \tag{6}$$

$$x_{ij}^t \in \mathbb{Z}_+, s_i^t \in \mathbb{Z}_+, y_{jk}^t \in \{0,1\}, z_k^t \in \{0,1\}, e_k^t \in \mathbb{Z}_+, r_k^t \in \mathbb{Z}_+,$$
$$i = 1, ..., n, j = 1, ..., m_{kt}, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T. \tag{7}$$

As restrições (2) definem que o número total de itens cortados das bobinas no período t devem atender a demanda, considerando o estoque do período anterior e para o próximo período. As restrições (3) determinam padrões de corte factíveis. Essas restrições (2) e (3) são as restrições provenientes da formulação de Kantorovich (1960). Restrições (5) são as restrições de capacidade da máquina que produz os objetos. As restrições de preparação de máquina são definidas em (6). As restrições (4) integram o problema de corte com o de dimensionamento de lotes. O objetivo (1) é minimizar o custo de estoque das bobinas e dos itens, o custo de preparação de máquina, bem como, a perda de material proveniente do corte de objetos. Finalmente, as restrições (7) definem as variáveis como inteiras e não negativas.

Caso apenas um tipo de objeto é produzido ($K = 1$), as restrições (5) são dadas por: $vt * r_1^t \leq C_t$. As restrições (6) são eliminadas, bem como, as variáveis z_k^t e os custos preparação de máquina na função objetivo.

2.2 Formulação estendida

Para a modelo com a formulação do problema de corte de estoque de acordo com Gilmore e Gomory (1961), considere que todos os padrões de corte para cada objeto k de todos os períodos t sejam conhecidos. Além disso, considere a_{ij} como o número de itens finais do tipo i obtidos do padrão j, para $i = n_{k-1}+1, ..., n_k$, $j = 1, ..., m_{kt}$, $k = 1, ..., K$ e $t = 1, ..., T$, em que m_{kt} é o número total de padrões de corte. O padrão j é factível se satisfaz as seguintes condições para toda a classe k, $k = 1, ..., K$ (restrições da mochila, com o índice j omitido):

$$l_{n_{k-1}+1}a_{n_{k-1}+1} + ... + l_{n_k}a_{n_k} \leq b_k, \tag{8}$$

$$a_i \in \mathbb{Z}_+, \ i = n_{k-1}+1, ..., n_k. \tag{9}$$

As variáveis y_{jk}^t definem o número de vezes que o padrão j é utilizado no período t, $j = 1, ..., m_{kt}$, $k = 1, ..., K$ e $t = 1, ..., T$. Assim, a formulação matemática é dada como segue.

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_i s_i^t + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} \bar{h}_k e_k^t + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} stc_k z_k^t + \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^0 + \sum_{k=1}^{K} F_k e_k^0$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m_{kt}} cl_k(b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jk}^t, \tag{10}$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{m_{kt}} a_{ij} y_{jk}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1}+1, ..., n_k, t = 1, ..., T, k = 1, ..., K, \tag{11}$$

$$r_k^t + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{m_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{K}(st_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, t = 1, ..., T, \tag{13}$$

$$r_k^t \leq M z_k^t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T, \tag{14}$$

$$s_i^t \in \mathbb{Z}_+, y_{jk}^t \in \mathbb{Z}_+, z_k^t \in \{0,1\}, e_k^t \in \mathbb{Z}_+, r_k^t \in \mathbb{Z}_+,$$
$$i = 1, ..., n, j = 1, ..., m_{kt}, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T. \tag{15}$$

As restrições (11), (12), (13) e (14) são as restrições de demanda e estoque de itens, estoque e corte de objetos, capacidade e preparação de máquina, respectivamente. A função objetivo (10) é a mesma definida em (1). As restrições (15) definem as variáveis como inteiras e não negativas. Caso seja produzido apenas um tipo de objeto, as restrições (13) são dadas por: $vt * r_1^t \leq C_t$. Além disso, as restrições (14) são eliminadas, bem como, as variáveis z_k^t e os custos de preparação de máquina na função objetivo.

Uma coluna correspondente ao padrão de corte j na formulação (10) - (15), para o período t e itens i da classe k ($i = n_{k+1} - 1, ..., n_k$), é dada por:

$$(\underbrace{0,...,0,a_{(n_{k-1}+1)j},...,a_{(n_k)j},0,...,0}_{\text{restrições}(11)},\underbrace{0,...,-1,0,...,0}_{(\text{restrições}12)}).$$

$a_{(n_{k-1}+1)j}$ está na $(n*(t-1)+n_{k-1})$-ésima posição do vetor e -1 está na $(n*T+(t-1)*k+t)$-ésima posição.

Note que, com a decomposição proposta por Gilmore e Gomory (1961) para o problema de corte de estoque, o modelo acoplado (10) - (15) é definido como problema mestre. As restrições da mochila (8) - (9) são restrições dos subproblemas, definindo assim $T*K$ subproblemas no caso de produção de vários tipos de objetos, isto é, K subproblemas para cada período do horizonte de planejamento. Para a produção de um tipo de objeto existem T subproblemas, um para cada período do horizonte de planejamento.

2.3 Formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe

Nesta seção, a decomposição Dantzig-Wolfe é aplicada à formulação estendida (10) - (15). Os subproblemas provenientes desta decomposição são definidos pelas restrições de capacidade da máquina de papel, isto é, um subproblema define o plano de produção de um dado período. Desta forma, são definidos T subproblemas e a decomposição é denominada decomposição por período. Devido à decomposição do problema de corte de estoque, existem dois tipos de subproblemas: um associado à decomposição de Gilmore e Gomory (1961) (Subproblema 1) e outro associado à decomposição por período (Subproblema 2). As restrições que determinam os padrões de cortes são restrições da mochila (8) - (9), que definem as restrições do Subproblema 1. As restrições que determinam os planos de produção (restrições do Subproblema 2), para $t=1,...,T$, são dadas como segue.

Para $K=1$:

$$vt_1 r_1^t \leq C_t, \tag{16}$$

$$r_1^t \in \mathbb{Z}_+. \tag{17}$$

Para $K>1$:

$$\sum_{k=1}^{K}(st_k z_k^t + vt_k r_k^t) \leq C_t, \tag{18}$$

$$r_k^t \leq M z_k^t,\ k=1,...,K, \tag{19}$$

$$z_k^t \in \{0,1\}, r_k^t \in \mathbb{Z}_+. \tag{20}$$

Suponha que para cada período t $(t=1,...,T)$ e classe k $(k=1,...,K)$ todas as soluções do Subproblema 1 sejam conhecidas, bem como, todas as soluções para cada período t $(t=1,...,T)$ do Subproblema 2. Para a definição do problema mestre considere os seguintes parâmetros e variáveis.

Parâmetros:

- P_t: número de planos de produção referente ao período t, $t=1,...,T$;
- $r_k^{tp_t}$: quantidade de objetos do tipo k produzidos no plano de produção p_t do período t, $k=1,...,K$, $p_t=1,...,P_t$, $t=1,...,T$;
- $z_k^{tp_t}$: 1 se objetos do tipo k são produzidos no plano de produção p_t do período t, 0, caso contrário, $k=1,...,K$, $p_t=1,...,P_t$, $t=1,...,T$.

Variáveis:

- $\bar{r}_t^{p_t}$: peso do plano de produção p_t do período t, $p_t=1,...,P_t$, $t=1,...,T$.

As variáveis r_k^t e z_k^t podem ser reescritas como uma combinação convexa dos planos de produção referentes ao período t, isto é, para cada $t=1,...,T$, tem-se que: $r_k^t=\displaystyle\sum_{p_t=1}^{P_t} r_k^{tp_t}\bar{r}_t^{p_t}$,

$z_k^t=\displaystyle\sum_{p_t=1}^{P_t} z_k^{tp_t}\bar{r}_t^{p_t}$, tal que $\displaystyle\sum_{p_t=1}^{P_t}\bar{r}_t^{p_t}\leq 1$ com $\bar{r}_t^{p_t}\in\mathbb{Z}_+, p_t=1,...,P_t$.

Neste caso, os planos de produção de cada período t são pontos extremos dos subproblemas. Assim, com a redefinição de z_k^t e r_k^t o problema mestre é definido por:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_i s_i^t + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} \bar{h}_k e_k^t + \sum_{t=1}^{T}\sum_{p_t=1}^{P_t}\sum_{k=1}^{K} z_k^{tp_t}\bar{r}_t^{p_t} + \sum_{i=1}^{n} f_i s_i^0 + \sum_{k=1}^{K} F_k e_k^0$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m_{kt}} cl_k(b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} l_i a_{ij}) y_{jk}^t, \quad (21)$$

$$\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{m_{kt}} a_{ij} y_{jk}^t + s_i^{t-1} - s_i^t = d_i^t, i = n_{k-1}+1, ..., n_k, t = 1, ..., T, k = 1, ..., K, \quad (22)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} r_k^{tp_t}\bar{r}_t^{p_t} + e_k^{t-1} - e_k^t = \sum_{j=1}^{m_{kt}} y_{jk}^t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T, \quad (23)$$

$$\sum_{p_t=1}^{P_t} \bar{r}_t^{p_t} \leq 1, t = 1, ..., T, \quad (24)$$

$$s_i^t \in \mathbb{Z}_+, y_{jk}^t \in \mathbb{Z}_+, \bar{r}_t^{p_t} \in \mathbb{Z}_+, e_k^t \in \mathbb{Z}_+,$$
$$i = 1, ..., n, j = 1, ..., m_{kt}, p_t = 1, ..., P_t, k = 1, ..., K, t = 1, ..., T. \quad (25)$$

A redefinição das variáveis r_k^t e z_k^t pelos planos de produção $r_k^{tp_t}$ no modelo (21) - (25) representa a seleção de um plano de produção, que seja suficiente para atender a necessidade de bobinas a serem cortadas para atender a demanda de acordo com as restrições (22). As restrições (23) acoplam os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes. Restrições (24) são as restrições de convexidade, uma para cada período do horizonte de planejamento. Por fim, as restrições (25) definem a integralidade e não negatividade das variáveis. Para problemas com produção de um tipo de objeto os parâmetros $z_k^{tp_t}$ não existem.

3. Limitantes inferiores e geração de colunas

Nesta seção, são descritos os limitantes inferiores para o problema acoplado. Para este problema consideramos três tipos de relaxação: (1) Relaxação linear da formulação compacta; (2) Relaxação linear da formulação estendida; (3) Relaxação linear da formulação estendida com o problema de dimensionamento de lotes decomposto.

No primeiro caso a relaxação é trivial, basta relaxar a integralidade das variáveis. O segundo e terceiro caso, a solução relaxada é determinada através do método geração de colunas. Note que, determinar todos os padrões de corte para o problema pode ser computacionalmente inviável, bem como, determinar todas as possibilidades dos planos de produção no caso da formulação (21) - (25). O método simplex com geração de colunas apresenta uma maneira alternativa de determinar bons padrões de corte e planos de produção, viabilizando a determinação de bons limitantes inferiores e soluções factíveis de boa qualidade para o problema acoplado.

A técnica Geração de Colunas consiste em relaxar a condição de integralidade das variáveis do problema mestre e resolver o problema resultante pelo método simplex. Para selecionar uma nova coluna para entrar na base, os custos relativos das variáveis não básicas são analisados. Para isso, determinam-se as variáveis duais associadas às restrições do problema mestre e, então, calcula-se o custo relativo. A coluna com o melhor custo relativo entra na base, se nenhuma coluna é atrativa, então a solução obtida é ótima. No caso dos problemas de minimização, uma coluna é atrativa somente se o seu custo relativo é negativo. Ao final do processo, a solução obtida pode não ser inteira e para obtê-la podem ser utilizados outros métodos, como por exemplo, heurísticas de arredondamento ou métodos exatos. Na próxima seção são descritos o método geração de colunas para o problema estendido e o problema estendido com problema de dimensionamento de lotes decomposto, respectivamente.

3.1 Geração de colunas para o problema com formulação estendida

Ao relaxar a condição de integralidade das variáveis s_i^t, e_k^t, y_{jk}^t, r_k^t e z_k^t, é possivel aplicar o método simplex com geração de colunas para o problema (10) - (15). Em cada iteração do método são resolvidos $K*T$ subproblemas, dado por problemas da mochila, que determinam padrões de corte. Para determinar os custos reduzidos (um para cada período t e classe k), considere $(\pi_{(n_0+1)1}, ..., \pi_{(n_1)1}, ..., \pi_{(n_{K-1}+1)1}, ..., \pi_{(n_K)1}, \cdots, \pi_{(n_0+1)T}, ..., \pi_{(n_1)T}, ..., \pi_{(n_{K-1}+1)T}, ..., \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (11) e $(\sigma_{11}, ..., \sigma_{T1}, ..., \sigma_{1K}, ..., \sigma_{TK})$ as variáveis duais associadas às restrições (12). O custo reduzido para cada classe k no período t é dado por: $c^{kt} = min\{cl_k b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + cl_k l_i)a_i + \sigma_{kt}\}$.

Portanto, para cada período t e para cada classe k, $t = 1, ..., T$, $k = 1, ..., K$, o subproblema é dado por:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + cl_k l_i)a_i \tag{26}$$
$$\text{sujeito a :} \quad (8) - (9).$$

Se $c^{kt} < 0$ para algum k e t, a coluna é adicionada ao problema (10) - (15) relaxado. Caso contrário, $c^{kt} \geq 0$ para todo $t = 1, ..., T$ e $k = 1, ..., K$, então a solução ótima para o problema relaxado foi encontrada.

3.2 Geração de colunas para o problema com formulação estendida e decomposição Dantzig-Wolfe

Para aplicar o método geração de colunas ao problema (21) - (25), a condição de integralidade das variáveis s_i^t, e_k^t, y_{jk}^t e $r_t^{tp_t}$ do problema (21) - (25) são relaxadas. Nesta decomposição, a cada iteração do método simplex são resolvidos $K * T$ subproblemas, que determinam os padrões de corte (Subproblema 1), e T subproblemas, que determinam os planos de produção (Subproblema 2). Para determinar os custos reduzidos destes dois tipos de subproblemas, considere $(\pi_{(n_0+1)1}, ..., \pi_{(n_1)1}, ..., \pi_{(n_{K-1}+1)1}, ..., \pi_{(n_K)1}, \cdots, \pi_{(n_0+1)T}, ..., \pi_{(n_1)T}, ..., \pi_{(n_{K-1}+1)T}, ..., \pi_{(n_K)T})$ as variáveis duais associadas às restrições (22), $(\sigma_{11}, ..., \sigma_{K1}, ..., \sigma_{1T}, ..., \sigma_{KT})$ as variáveis duais associadas às restrições (23) e $(\gamma_1, ..., \gamma_T)$ as variáveis duais associadas às restrições (24). O custo reduzido associado ao subproblema relacionado ao objeto k no período t, que determina os padrões de corte é dado por: $c_1^{kt} = min\{cl_k b_k - \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + cl_k l_i)a_i + \sigma_{kt}\}$. O custo reduzido do subproblema que determina os planos de produção para o período t é dado por: $c_2^t = min\{\sum_{k=1}^{K} stc_k z_k^t - \sum_{k=1}^{K} \sigma_{kt} r_k^t - \gamma_t\}$.

Assim, para cada período t e cada classe k o Subproblema 1 determina os padrões de corte, $k = 1, ..., K$ e $t = 1, ..., T$, e para cada período t o Subproblema 2 determina os planos de produção, $t = 1, ..., T$, dados a seguir.

Subproblema 1:

$$\text{maximize} \quad \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} (\pi_{it} + cl_k l_i)a_i \tag{27}$$
$$\text{sujeito a :} \quad (8) - (9).$$

Subproblema 2:

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{K} stc_k z_k^t - \sum_{k=1}^{K} \sigma_{kt} r_k^t, \tag{28}$$
$$\text{sujeito a :} \quad (18) - (20).$$

Caso o problema tenha apenas um objeto ($K = 1$) o Subproblema 2 é dado por:

$$\begin{aligned} \text{mininimze} \quad & \sigma_{1t} r_1^t, \\ \text{sujeito a :} \quad & (16) - (17). \end{aligned} \tag{29}$$

Se $c_1^{kt} < 0$ e $c_2^t < 0$ para algum k e t, a coluna é adicionada ao problema mestre restrito relaxado proveniente de (21) - (25). Caso contrário, $c_1^{kt} \geq 0$ e $c_2^t \geq 0$ para todo $k = 1, ..., K$ e $t = 1, ..., T$, a solução é ótima para o problema mestre relaxado.

4. Resultados Computacionais

Esta seção apresenta os resultados computacionais para os modelos da Seção 2, para os quais foram analisados limitante inferior e soluções factíveis. Os métodos do tipo geração de colunas foram implementados em C e as modelagens matemáticas resolvidas com o auxílio do Cplex 12.1. Para resolver os problemas da mochila foi implementado um método *branch-and-bound* baseado no método proposto em Gilmore e Gomoy (1961). Os algoritmos foram executados em um computador Intel Core2 Duo de 2 GHz e 4 Gbyte de memória. Os dados foram gerados com base nos dados de uma indústria de polpa e papel portuguesa e estão descritos na próxima seção.

4.1 Dados

A indústria considerada neste trabalho produz 13 tipos de papéis classificados de acordo com a gramatura (g/m^2), que são produzidos a partir da polpa virgem e polpa reciclada. As polpas seguem para a máquina de papel, que possui uma produção média de bobinas dada por toneladas por hora. A gramatura varia entre 115 e 300 g/m^2 com produção variando entre 36.4 a 47.5 toneladas por hora.

A produção de papel é contínua, deste modo a capacidade da máquina é definida por um dia de trabalho, isto é $C_t = 24$ horas para todo período do horizonte de planejamento. Além disso, as bobinas para cada tipo de gramatura tem comprimento dado por $b_k = 6,50m$ e seu peso em toneladas é dado por peso $= 10^{-2} *$ gramatura $* b_k$. Assim, o tempo necessário para produzir uma bobina é dado por $vt_k =$ peso/tempo de produção de uma tonelada. A partir desses valores é possível determinar o custo de preparação de máquina como $stc_k = 10 * vt_k$, tempo de preparação de máquina como $st_k = 0.1 * vt_k$ e custo de perda $cl_k = 10^5 * vt_k/b_k$. O custo de estoque de bobinas e de itens no final dos períodos são considerados de baixa relevância, com custo das bobinas dados por $h_k = 0.01$ e dos itens dados por $s_i^t = 0.01 * l_i/b_k$, em que $l_i \in [70, 334]$. A demanda dos itens é dada em unidades por $d_i^t \in [0, 20]$ e o número total de diferentes tipos de itens por classe é dado por $n_k \in [1, 10]$. O custo inicial de estoque de bobinas é dado por $F_k = 1000$ e dos itens por $f_i = 10000$. Os exemplos estão divididos em 10 grupos, definidos de acordo com o número de períodos (em dias), $T = 3, 5, 10, 15, 20$, e número de classes, $K = 8, 12$. Para cada grupo foram gerados 10 exemplos.

Para o problema acoplado com apenas um tipo de objeto, isto é, existe apenas um tipo de gramatura, o tempo de produção e o custo de perda são dados por $vt_1 = 0.2054$ e $cl_1 = 2.54$, respectivamente. O número de itens é dado pela soma total do número de itens dos exemplos gerados para o problema com vários tipos de objetos, com a mesma demanda, largura e custo de estoque.

Para a formulação compacta, o limitante superior sobre o número de objetos cortados m_{kt} foi dado pelo número de padrões de corte homogêneo necessário para atender a demanda total, isto é, a soma da demanda de todos os períodos.

4.2 Limitantes inferiores

As três relaxações lineares apresentadas na Seção 3 foram comparadas com a relaxação linear da formulação estendida resolvida pelo método geração de colunas. O gap é dado por:

$\frac{f_{FE}-f}{f_{FE}}$, em que f_{FE} é o valor da função objetivo ótima para o formulação estendida relaxada e f é o valor da função objetivo da formulação compacta relaxada (f.comp) ou da formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe relaxada (DW). A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais médios para os limitantes inferiores.

Para os problemas com um tipo de objeto, os resultados mostram que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece limitante inferior melhor que a formulação estendida para exemplos com $K = 12$. Enquanto que, para vários objetos a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe foi melhor para todos os exemplos, com gap médio geral de 0.1%. A formulação compacta fornece um limitante inferior muito ruim, o gap médio para todos os grupos fica próximo a 100%. Além disso, para a formulação compacta, o tempo computacional foi limitado a 10 minutos para cada exemplo, e dentro desse tempo o Cplex 12.1 não conseguiu determinar a solução relaxada para todos exemplos do grupo $T = 20$ e $K = 12$ para problemas com um tipo de objeto. O tempo computacional médio gasto pelo método geração de colunas para a formulação estendida foi menor que 19 segundos para problemas com um tipo de objeto e menor que 6 segundos para vários tipos de objetos. Para a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, o tempo computacional médio foi menor que 21 segundos para um tipo de objeto e menor que 93 segundos para vários tipos de objetos. O número médio de iterações de ambos os métodos geração de colunas foi menor que 61 para o problema com um tipo de objeto e menor que 14 iterações para o problema com vários tipos de objetos. Portanto, a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece um limitante inferior melhor que as demais formulações e dentro de um bom tempo computacional.

Tabela 1: Limitantes inferiores

	um tipo de objeto						multiplos objetos					
	Gap(%)			tempo			Gap(%)			tempo		
T/K	FE	DW	f.comp	FE	DW	f.comp.	FE	DW	f.comp	FE	DW	f.comp
3/8	0,00	0,00	100,00	3,08	3,17	0,76	0,00	-0,05	99,99	1,28	6,20	0,26
3/12	0,00	-5,10	100,00	5,74	5,50	2,43	0,00	-0,31	96,31	1,01	9,19	0,31
5/8	0,00	0,00	100,00	3,45	3,76	3,52	0,00	-0,04	100,00	1,03	11,54	0,52
5/12	0,00	0,00	90,00	5,37	6,02	8,44	0,00	-0,83	99,21	1,28	16,89	0,58
10/8	0,00	0,00	100,00	3,89	4,37	17,94	0,00	-0,02	100,00	1,26	23,41	1,47
10/12	0,00	-0,17	95,60	8,20	10,62	53,65	0,00	-0,21	98,23	1,80	35,25	2,35
15/8	0,00	0,00	100,00	4,90	4,90	48,77	0,00	-0,02	100,00	1,61	36,79	3,53
15/12	0,00	-0,13	97,27	13,62	13,44	130,39	0,00	-0,25	97,91	3,21	61,97	6,04
20/8	0,00	0,00	100,00	6,87	5,33	147,54	0,00	-0,05	100,00	1,90	48,25	8,59
20/12	0,00	-5,06	98,58[1]	18,67	20,09	224,71	0,00	-0,21	95,93	5,39	92,17	14,01

[1]exemplos não resolvidos dentro do tempo limite: 2

4.3 Solução factível

Para a formulação estendida (FE) e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe (DW), ao final do método geração de colunas as variáveis foram redefinidas como inteiras e resolvidos pelo Cplex 12.1. Deste modo, uma solução factível é obtida para cada uma das formulações. Para determinar a solução inteira, o tempo computacional foi limitado em 10 minutos e o gap é dado por $\frac{f-LB}{f}$, em que LB é o melhor limitante inferior encontrado e f é o valor da solução factível encontrada pelos três modelos. A Tabela 2 mostra os resultados computacionais médios para os problemas com um tipo e vários tipos de objetos. Na Tabela 2, resol. representa o número de exemplos resolvidos pela a formulação compacta. O número médio de padrões utilizados para determinar a solução factível em cada um dos modelos é denotado por NP e a perda média (em porcentagem) por P (%).

Comparando os resultados para o problema com um tipo de objeto, temos que a formulação compacta fornece soluções piores, tanto em gap quanto em perda. Além disso, o Cplex não encontrou uma solução factível para todos os exemplos com o tempo limitado em 10 minutos. Para as formulações resolvidas pelo método geração de colunas, as soluções obtidas são muito próximas, em geral, iguais. Entretanto, o tempo computacional para a formulação estendida foi um pouco maior que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe, o qual a primeira teve um tempo computacional médio menor que 597 segundos, e a segunda menor que 581 segundos.

Para o problema com vários tipos de objetos, a formulação compacta também teve o pior desempenho e a formulação estendida o melhor gap em todos os exemplos gerados. O tempo computacional da formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe ficaram bastante próximos. Já o número de padrões necessários para atender a demanda dá formulação estendida com a decomposição Dantzig-Wolfe foi menor que da formulação estendida. Entretanto, a perda da formulação estendida foi um pouco menor que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe.

Tabela 2: Soluções factíveis

Problema com um tipo objeto													
	formulação compacta				FE				DW				
T/K	resol.	gap (%)	NP	P (%)	gap (%)	NP	P (%)	T (s)	gap (%)	NP	P (%)	T (s)	
3/8	10	100,0	185,1	0,8	12,0	161,9	0,0	342,0	12,0	161,9	0,0	337,4	
3/12	10	100,0	304,1	1,6	16,4	273,2	0,0	883,6	16,8	273,3	0,0	780,0	
5/8	10	100,0	308,8	2,3	6,1	292,4	0,0	500,9	6,1	292,3	0,0	373,8	
5/12	8	100,0	427,6	2,4	48,7	383,7	0,0	1093,9	48,8	383,5	0,0	1056,4	
10/8	9	100,0	543,2	4,1	5,4	579,3	0,0	896,7	5,8	579,1	0,0	773,2	
10/12	2	100,0	687,0	3,6	33,4	826,3	0,0	1093,8	33,3	826,4	0,0	949,0	
15/8	5	100,0	953,8	9,1	3,9	877,1	0,0	725,0	6,2	878,3	0,0	932,4	
15/12	0	-	-	-	43,5	1247,1	0,0	946,6	43,8	1247,6	0,0	1081,2	
20/8	4	100,0	887,5	11,9	4,1	1154,5	0,0	868,8	4,7	1154,7	0,0	929,4	
20/12	0	-	-	-	29,2	1645,7	0,0	1084,0	27,3	1646,2	0,0	1047,7	
Problema com vários tipos objetos													
	formulação compacta				FE				DW				
T/K	resol.	gap (%)	NP	P (%)	gap (%)	NP	P (%)	T (s)	gap (%)	NP	P (%)	T (s)	
3/8	10	36,2	205,4	4,4	3,5	222,4	3,5	35,9	52,9	157,1	4,0	95,9	
3/12	10	33,2	324,4	6,1	4,4	337,3	4,5	617,2	40,2	299,3	5,1	124,1	
5/8	10	47,5	344,0	6,4	2,7	376,0	4,4	512,1	43,8	268,3	4,9	299,0	
5/12	10	60,1	449,1	8,2	2,9	486,7	4,5	876,3	43,7	435,4	5,0	538,1	
10/8	10	69,5	635,5	11,4	1,2	764,5	5,3	861,3	28,6	585,0	6,5	1126,6	
10/12	8	75,4	983,3	15,7	5,2	1000,6	4,9	981,7	32,1	894,1	5,1	1166,2	
15/8	10	79,8	988,6	17,9	0,9	1182,1	5,1	1001,9	22,6	914,1	7,0	1127,3	
15/12	1	88,6	1414,3	19,8	11,1	1506,0	3,5	857,9	31,7	1424,6	3,9	1189,6	
20/8	10	77,7	1230,0	20,9	2,9	1403,2	5,5	614,4	18,5	1144,9	7,9	1175,8	
20/12	2	83,8	4618,5	56,5	14,5	1995,1	4,3	650,3	27,0	1834,2	5,1	1218,5	

5. Conclusões

Este trabalho compara três formulações matemáticas para o problema de corte de estoque acoplado com o problema de dimensionamento de lotes com um e vários tipos de objetos, o qual denominamos formulação compacta, formulação estendida e formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. As duas últimas formulações foram resolvidas por métodos geração de colunas e, ao final do método, para determinar uma solução factível, as variáveis foram redefindas como inteiras. A formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe fornece o melhor limitante inferior. Entretanto, a formulação estendida fornece melhores soluções factíveis e com perda um pouco menor que a formulação estendida com decomposição Dantzig-Wolfe. Na literatura não foi encontrado nenhum trabalho que compare estes tipos de formulações para problemas acoplados, bem como, a utilização da decomposição Dantzig-Wolfe na resolução de problemas acoplados. Os modelos abordados são simplificações de um modelo da literatura. O próximo passo será utilizar estes modelos e métodos para compará-los com um modelo e métodos da literatura.

Agradecimentos

Agradecemos a Prof. Maristela Oliveira dos Santos por fornecer os dados da indústria e ao Prof. Zeger Degraeve pela orientação neste trabalho. Este trabalho foi financiado pela FAPESP e CAPES.

6. Referências bibliográficas

Arbib, C., Marinelli, F.(2005) Integrating process optimization and inventory planning in cutting-stock with skiving option: An optimization model and its application. *European Journal of Operational Research*, v. 163(3), p. 617–630.

Correia, M. H., Oliveira, J. F.; Ferreira, J. S. (2004). Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers and Operations Research*, v. 31(8), p. 1223–1243.

Dantzig, G. B., Wolfe, P. (1960). Decomposition principle for linear programs. *Operations Research*, v. 8, p. 101–111.

Farley, A. (1994). Mathematical-programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *Journal of the Operational Research Society*, 39(1), 41–53.

Ghidini, C. T. L. S. (1995). Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque. *Tese de Doutorado*, Universidade de São Paulo, São Carlos-SP.

Gilmore, P. C., Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849–859.

Gramani, M. C. N.; França, P. M. (2006). The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, 174(1), 509–521.

Gramani, M. C. N.; França, P. M.; Arenales, M. N (2009). A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, 47(2), 219–227.

Hendry, L.; Fok, K.; Shek, K. (1996). A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *Journal of the Operational Research Society*, 47(1), 38–47.

Kantorovich, L. (1960) Mathematical methods of organising and planning production (translated from a report in Russian, dated 1939). *Management Science*, 6, 366–422.

Menon, S.; Schrage, L. (2002) Order Allocation for Stock Cutting in the Paper Industry. *Operations Research*,50(2), 324–332.

Nonas, S.; Thorstenson, A. (2000). A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 120(2), 327–342.

Nonas, S. L.; Thorstenson, A. (2008). Solving a combined cutting-stock and lot-sizing problem with a column generating procedure. *Computers and Operations Research*, 35(10), 3371–3392.

Poltroniere, S. C.; Poldi, K. C.; Toledo, F. M. B.; Arenales, M. N. (2008). A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, 157(1), 91–104.

Reinders, M. (1992). Cutting stock optimization and integral production planning for centralized wood processing. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(1), 37–55.

Respício, A.; Captivo, M. E.; Rodrigues, A. J. (2002). A dss for production planning and scheduling in the paper industry. *International Conference on Decision Making and Decision Support in the Internet Age*, University College Cork, Cork, Ireland, 298–308.

Santos, M. O.; Alamda-Lobo, B. (2012). Integrated pulp and papermill planning and scheduling. *Computers and Industrial Engineering*, in press.

Santos, S. M. P. G. (2008). Modelagem do problema integrado de dimensionamento do lotes e corte de estoque numa indústria moveleira. *Dissertação de Mestrado*, Ibilce-Unesp, São José do Rio Preto - SP.