

PROBLEMAS DE CORTE COM ITENS IRREGULARES

Adriana Cherri

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 – Bauru, Brasil
adriana@fc.unesp.br

Andréa Vianna

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 – Bauru, Brasil
vianna@fc.unesp.br

RESUMO

O problema de corte consiste em, dada uma unidade maior (objeto), cortá-la em unidades menores (itens), visando à otimização de um objetivo, como, por exemplo, minimização da perda de material. É um problema frequentemente encontrado em processos industriais de corte, cuja solução pode ser obtida computacionalmente. Neste trabalho propomos o estudo e a resolução computacional de um problema de corte bidimensional envolvendo itens retangulares e irregulares, cujo formato é do tipo L. Para resolver este problema, alteramos a abordagem Grafo E/OU, que é uma estratégia proposta na literatura para resolver problemas de corte bidimensionais. Para verificar o desempenho da estratégia proposta, testes computacionais foram realizados com exemplares da literatura.

PALAVARAS CHAVE. Problemas de corte e empacotamento, otimização combinatória, geração de padrões de corte.

Otimização Combinatória

ABSTRACT

The cutting problem consists, given a larger unit (object), cut it into smaller units (items), aiming to optimize an objective, for example, minimizing waste of material. This is a problem commonly encountered in industrial processes of cut, so that the solution can be obtained computationally. In this paper we propose a computational study and resolution of a problem involving two-dimensional cutting rectangular pieces and irregular, whose format is of type L. To solve this problem, we make modifications at the AND / OR Graph approach, which is a strategy proposed in the literature to solve two-dimensional cutting problems. To verify the performance of the proposed strategy, computational tests were performed with examples from the literature.

KEYWORDS. Cutting and packing problems. Combinatorial optimization. Generation of cutting patterns.

Combinatorial optimization

1. Introdução

O problema de corte consiste em cortar um objeto em estoque para a produção de itens menores, em quantidades especificadas, otimizando uma determinada função objetivo, que pode ser minimizar a perda de material, maximizar o lucro, etc. Este problema ocorre frequentemente em sistemas de produção industrial que possuem processos de corte, como por exemplo, o corte de chapas metálicas, chapas vidro e de madeira, peças de tecido, couro e plástico, bobinas de papel e alumínio, entre outros.

Semelhante e intimamente relacionado com os problemas de corte estão os problemas de empacotamento que consistem em empacotar as unidades menores dentro de uma unidade maior (objeto), otimizando uma função – como a minimização de espaço vago ou a maximização da quantidade de itens em cada objeto, e satisfazendo possíveis restrições como a estabilidade no transporte dos pacotes. Neste caso os objetos são representados por embalagens de produtos, caixas, contêineres, etc.

Estas duas classes de problemas de otimização possuem diversas aplicações práticas de grande potencial, e são tratadas na literatura como Problemas de Corte e Empacotamento (Dyckhoff, 1990). Na literatura existem diversas abordagens para resolvê-los, conforme mostram os livros, artigos de revisão e edições especiais de periódicos em Brown (1971), Golden (1976), Hinxman (1980), Dyckhoff e Waescher (1990), Lirov (1992), Dowsland e Dowsland (1992), Sweeney e Paternoster (1992), Dyckhoff e Finke (1992), Martello (1994a, 1994b), Bischoff e Waescher (1995), Mukhacheva (1997), Dyckhoff *et al.* (1997), Arenales *et al.* (1999), Valdés *et al.* (2002), SICUP (2011), entre outros.

O problema de corte de itens do tipo L é um problema pouco explorado na literatura e também é conhecido como problema de corte bidimensional com itens irregulares. Aplicação deste tipo de problema foi identificada no corte de espuma para a fabricação de colchões. Roberts (1984) desenvolveu um procedimento heurístico para resolver o problema de corte com itens do tipo L. Neste problema, os padrões de corte combinam itens retangulares e itens com o formato L. Lins *et al.* (2003) apresentou um algoritmo recursivo baseado em uma estratégia que resolve problemas de empacotamento de itens retangulares. A motivação para o desenvolvimento deste trabalho foi a aplicação na resolução de difíceis problemas de carregamento de paletes. Nakatake *et al.* (1996) apresentaram um método de alocação dos itens utilizando a estrutura BSG (*bounded-sliceline grid*) e utilizou *simulated annealing* na sua resolução. Xu *et al.* (1998) utilizaram uma abordagem que combina as formas de acordo com algumas regras pré-definidas. Oliveira *et al.* (2011) propuseram uma heurística construtiva para a resolução do problema de minimização da área da placa na alocação de itens.

Para resolver o problema de corte bidimensional envolvendo itens retangulares e do tipo L, realizamos alterações na abordagem em Grafo E/OU, estratégia proposta inicialmente por Morabito (1989) para resolver problemas de corte bidimensionais. O problema de corte com itens do tipo L apresenta uma dificuldade maior na sua resolução, pois os cortes aplicados na placa não são guilhotinados. Na avaliação do desempenho desta estratégia, realizamos testes computacionais usando instâncias da literatura.

Na Seção 2 apresentamos uma descrição do problema de corte bidimensional e do problema de corte com itens do tipo L. Na Seção 3 descrevemos a abordagem em Grafo E/OU que foi alterada para resolução do problema. Na Seção 4, apresentamos os resultados computacionais com uma análise das soluções obtidas. A Seção 5 é dedicada às conclusões e perspectivas para a continuidade deste trabalho.

2. O Problema de corte bidimensional com itens do tipo L

O problema de corte envolvendo itens do tipo L aparece em alguns processos industriais, entretanto, apresenta poucos estudos na literatura. Antes de definirmos este problema, apresentamos o problema de corte bidimensional com itens retangulares, pois a definição é semelhante ao problema de corte com item do tipo L. Além disso, a estratégia que apresentamos para resolver o problema deve combinar o corte de itens no formato L e o corte de itens retangulares.

Em um problema de corte bidimensional, uma placa retangular de dimensões (L, W) , em que L é o comprimento e W é a largura, deve ser cortada para a produção de itens com dimensões (l_i, w_i) . O objetivo do problema é cortar uma placa disponível em estoque de modo que a perda gerada seja mínima. O modo como os itens estão arranjados na placa é chamado de *padrão de corte*. A Figura 1 ilustra um problema de corte bidimensional.

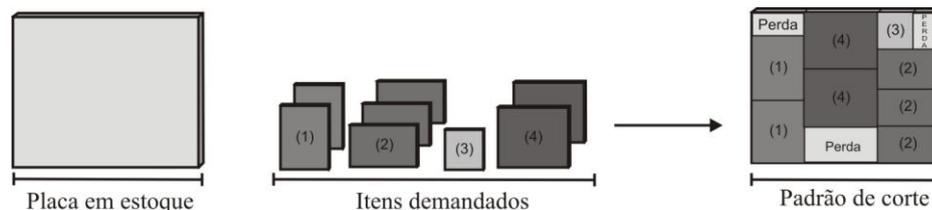


Figura 1: Problema de corte bidimensional.

Para resolver esse tipo de problema, cortes guilhotinados podem ser aplicados na placa em estoque. Um corte é chamado de guilhotinado, quando aplicado a um retângulo, produz dois novos retângulos. Os cortes guilhotinados podem ser horizontais ou verticais e, de modo geral, são simples de serem realizados.

A definição do problema de corte com itens do tipo L é semelhante ao problema de corte com itens retangulares, entretanto, as dimensões dos itens a serem alocados são representadas por $(l_{i1}, w_{i1}, l_{i2}, w_{i2})$, em que l_{i1} e l_{i2} representam o comprimento inferior e superior do item, respectivamente, e w_{i1} e w_{i2} representam a largura esquerda e direita do item, respectivamente. Além disso, o estoque de placas sempre é composto por placas retangulares. O objetivo do problema é cortar os itens disponíveis em estoque de modo que a perda gerada seja mínima.

Existem duas formas de alocação de itens quando o problema envolve itens do tipo L. Nas figuras 2 e 3 a seguir ilustramos estas possibilidades.

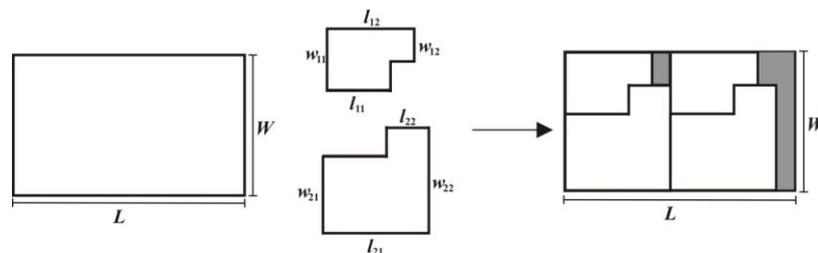


Figura 2: Problema de corte bidimensional com itens do tipo L – com encaixe dos itens.

Pela Figura 2, é possível observar que os itens a serem cortados são “encaixados”. Este tipo de solução pode fornecer soluções melhores para o problema de corte, entretanto, há uma dificuldade maior para o corte dos itens, dificultando sua utilização em algumas aplicações.

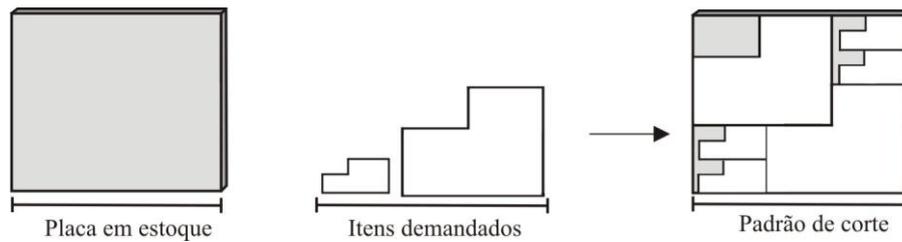


Figura 3: Problema de corte bidimensional com itens do tipo L – sem encaixe dos itens.

Na Figura 3, os itens possuem outra forma de alocação na placa. Esta estratégia para gerar padrões de corte, embora possibilite a geração de perdas maiores, facilita os cortes realizados na placa. Neste trabalho, a geração dos padrões de corte será da forma como apresentado na Figura 3.

Para a resolução deste problema não é possível realizar apenas cortes guilhotinados para geração dos itens demandados, ou seja, o padrão de corte combina cortes guilhotinados e não-guilhotinados (Morabito, 1989).

Nas figuras apresentadas nesta seção ilustramos apenas padrões de corte com um mesmo tipo de item (retangular ou L). Entretanto, a estratégia desenvolvida para resolução do problema combina em um padrão de corte itens do tipo L e itens retangulares.

Na próxima seção, apresentamos uma breve descrição da abordagem em Grafo E/OU (Morabito, 1989) e as alterações realizadas nesta estratégia para resolver o problema de corte com item do tipo L.

3. Abordagem Grafo E/OU para resolução do problema de corte

A abordagem em Grafo E/OU para resolução de problemas de corte foi inicialmente proposta por Morabito (1989) para problemas de corte bidimensionais, guilhotinados, irrestritos e não estagiados. Esta abordagem consiste em representar os padrões de corte como um caminho completo em um grafo e enumerá-los implicitamente com a finalidade de encontrar uma solução ótima. Também foram desenvolvidos outros trabalhos para a resolução de problemas de corte bidimensional (restrito, não guilhotinado, estagiado) e tridimensional usando a abordagem em Grafo E/OU para a representação dos padrões de corte (Morabito *et al.* (1992), Morabito e Arenales (1994), Arenales e Morabito (1995), e Morabito e Arenales (1996), Vianna (2000)).

Um Grafo E/OU pode ser definido para representar todos os possíveis padrões de corte de uma placa, em que os nós representam retângulos (no caso do problema de corte bidimensional, com placa e itens retangulares ou do tipo L) e os arcos representam cortes. Um arco (corte) estabelece uma relação entre um nó N do grafo (retângulo), com dois outros nós N_1 e N_2 (retângulos obtidos após o corte), portanto, um arco-E. Os nós N_1 e N_2 são chamados sucessores de N e, N predecessor de N_1 e N_2 . A Figura 4 apresenta dois arcos-OU emergindo do nó raiz, gerando duas possibilidades de padrões de corte.

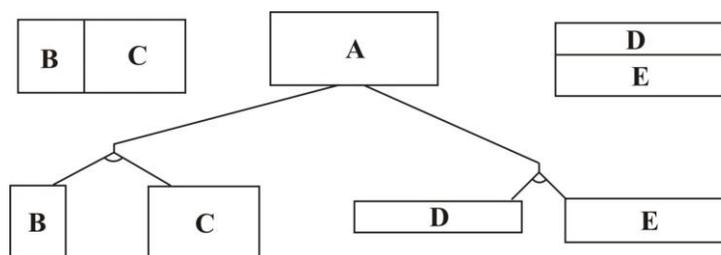


Figura 4: Arcos E/OU.

Os padrões de corte são gerados examinando-se todas as possibilidades alternativas de corte (arcos-OU) e uma delas é reproduzir o próprio retângulo N (chamado de corte-0, lê-se *corte zero*), ao qual nenhum outro corte será feito, indicando o final do processo de corte. Um corte-0 é representado por um arco ordinário (isto é, aponta para um único nó). O nó inicial é representado pela placa (L, W) e os nós finais são aqueles originados de um corte-0, sem perda de generalidade, associam-se aos retângulos finais um ou mais itens idênticos (o primeiro arco a esquerda emergindo da raiz na Figura 5). Os cortes (verticais ou horizontais) podem ser restritos, sem perda de generalidade, a um conjunto finito, chamado de “conjunto de discretização”, formado pelas combinações lineares não-negativas dos tamanhos dos itens (Herz (1972) e Morabito e Arenales (1996)).

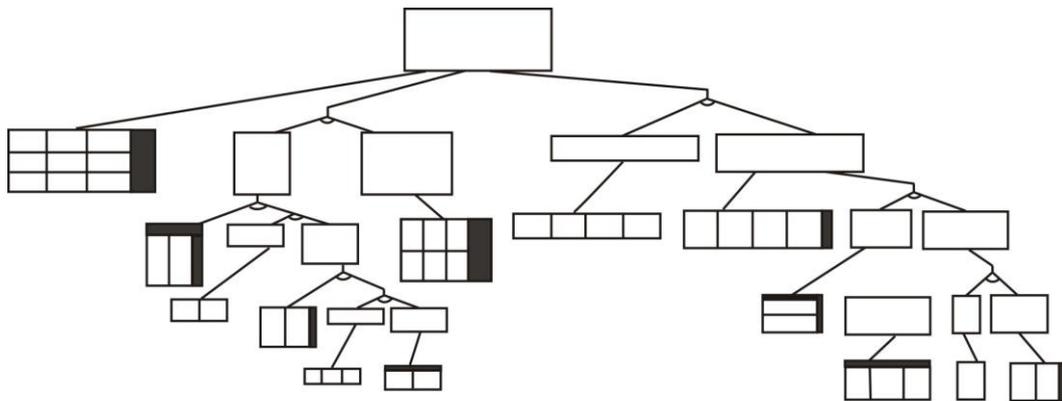


Figura 5: Grafo E/OU representando padrões de corte.

A Figura 5 ilustra três arcos-OU emergindo da raiz, indicando alternativas diferentes para se obter um padrão de corte. Note que um padrão de corte é bem definido seguindo-se uma sequência de arcos-E (cortes), a partir da raiz (placa inicial) até nós finais (nós após cortes-0). Esta sequência é chamada de caminho completo, sendo que todo padrão de corte tem um caminho completo associado. Observe também que um mesmo nó pode pertencer a sequências diferentes (isto é, retângulos de mesmos tamanhos podem ser obtidos por diferentes sequências de corte), o que caracteriza um ciclo. Apesar disso, por simplicidade de implementação computacional (limitação do uso de memória que pode ser explosivo), duplicamos tais nós (ou seja, nós diferentes podem representar retângulos idênticos, porém obtidos de sequências de corte diferentes) e, portanto, trabalhamos com árvores (grafo conexo sem ciclos). O valor de utilidade do padrão de corte é a soma dos valores de utilidade dos nós finais do caminho completo associado. A Figura 6 ilustra os caminhos completos utilizando a abordagem em Grafo E/OU e o padrão de corte associado.

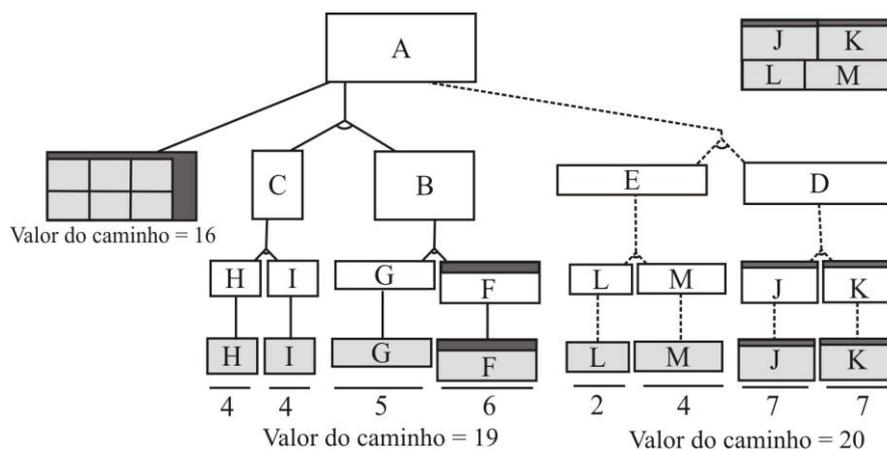


Figura 6: Grafo E/OU representando padrões de corte alternativos.

Na representação da Figura 6, o caminho com valor 20, por ser o mais valioso, fornece o melhor padrão de corte para a placa. O caminho com valor 16 representa um padrão de corte homogêneo (fácil de ser computado) e é utilizado como limitante inferior para as demais ramificações. Percorrer todos os caminhos possíveis de um grafo pode ser, muitas vezes, inviável durante o processo de busca. As soluções podem ser enumeradas implicitamente, descartando a expansão de um nó sem perder a solução ótima, através do uso de limitantes (inferior e superior).

Para a determinação de um limitante inferior, utiliza-se a solução homogênea, que é uma solução trivial para um subproblema do nó. O objetivo é preencher a área determinada somente com itens iguais. Essa solução é também chamada de padrão de corte homogêneo. No problema de corte com itens retangulares e itens do tipo L a solução homogênea pode ser calculada dos seguintes modos:

- 1) Solução homogênea formada por itens retangulares (Figura 7);

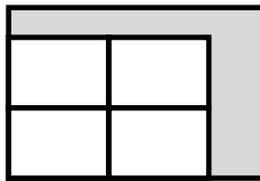


Figura 7: Solução homogênea formada por itens retangulares.

- 2) Solução homogênea formada por itens do tipo L dispostas lado a lado tanto na horizontal como na vertical (Figura 8);

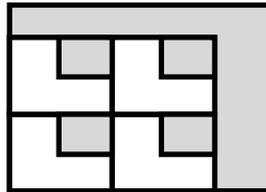


Figura 8: Solução homogênea formada por itens do tipo L.

O limitante superior é obtido pela relaxação do problema. O limitante superior trivial é aquele que considera que apenas a área dos itens alocados não exceda a área máxima permitida do retângulo.

Para resolver o problema proposto neste trabalho, os cortes são gerados de acordo com o tipo de retângulo a ser cortado (retangular ou do tipo L). Para itens retangulares utilizamos cortes guilhotinados e também um corte chamado de “corte degrau” (um retângulo gera um novo retângulo e um item com formato L). Para itens com formato L, os cortes são realizados de modo que o corte em um item retangular gera um novo retângulo e um item com formato L. Quando uma placa apresentar formato L, os cortes realizados neste retângulo geram dois novos retângulos ou um novo retângulo e um novo item em formato L. A Figura 9 ilustra esse tipo de corte.

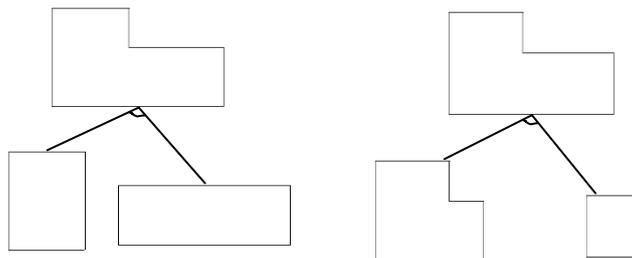


Figura 9: Corte realizado em uma placa intermediária com formato L.

Para realizar o corte dos itens do tipo L, alterações foram realizadas nos conjuntos de discretizações utilizados pela abordagem Grafo E/OU.

Na próxima seção, apresentamos os resultados computacionais obtidos utilizando a estratégia proposta.

4. Resultados Computacionais

Para avaliar o desempenho do procedimento descrito na Seção 3, utilizamos instâncias da literatura. Entretanto, as soluções obtidas não são comparadas com essas instâncias, visto que nesse trabalho se propõe a alocação dos itens minimizando a perda na placa e, não pode haver encaixe dos itens do tipo L. Nos exemplares propostos pela literatura, o objetivo consiste em minimizar a área total da placa em estoque.

A Tabela 1 apresenta os testes realizados com o algoritmo proposto, desenvolvido em linguagem de programação C++.

Tabela 1: Soluções obtidas

#	Instância	Dimensão da placa	Número total de itens	Número de itens retangulares	Número de itens do tipo L	Perda
1	ami33LT	1200 x 1000	32	30	2	4,80%
2	apteLT	7000 x 7000	9	8	1	2,44%
3	Nakatake_test1	310 x 310	35	25	10	4,78%
		700 x 250				47,71%
		594 x 255				18,96%
4	Xu_instance1	5500 x 6000	28	7	21	3,67%
		6314 x 5922				14,98%
5	L_20_20	250 x 220	20	16	4	8,45%
6	L_20_50	250 x 220	20	10	10	4,80%
7	L_20_100	250 x 240	20	0	20	3,45%

As instâncias #1, #2, #3 e #4, da Tabela 1, são derivadas de circuitos VLSI (*Very Large Scale Integration*) onde se pretende minimizar a área da placa envolvente (Nakatake *et al.*, 1996 e Xu *et al.* 1998).

As duas instâncias iniciais, #1 e #2, consideram originalmente itens em formato T Neste trabalho considerou-se apenas os itens retangulares e itens em formato L.

A terceira instância (#3), resolvida por Nakatake *et al.* (1996), originalmente aloca os itens possibilitando a combinação de itens retangulares e em formato L em uma placa de dimensão (594,255). Dessa forma, a perda determinada pelos autores foi de 13%. O algoritmo proposto por esse trabalho não permite o encaixe de itens em formato L, justificando assim a perda obtida de 18,96%. O teste realizado com essa instância utilizando a dimensão da placa (700,250) foi motivado por ser uma solução obtida manualmente. Observe que a perda é de 47,71%.

Os testes realizados com a instância #4, proposta por Xu *et al.* (1998), com dimensão da placa (6314,5922), apresentou uma perda de 14,98% utilizando o procedimento proposto por esse trabalho. Combinando os itens como blocos, sejam retangulares ou não, Xu *et al.* (1998) determinou uma solução com perda 5,20%.

As instâncias #5, #6 e #7 foram geradas a partir de um gerador concedido pelo Professor A. Miguel Gomes da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.

Nesse gerador de instâncias pode-se controlar a forma (retângulo, formato L ou formato T, que não é objeto de estudo desse trabalho), o número total de itens (20) e a percentagem (aproximada) de cada tipo de item. De acordo com os testes realizados essas instâncias apresentaram bons resultados para dimensões de mesma ordem de grandeza.

5. Conclusões

Neste trabalho, abordamos o problema de corte de estoque bidimensional com itens retangulares e irregulares (formato L). Para resolver esse problema, alteramos a abordagem em Grafo E/OU, proposta pela literatura. Os testes realizados apresentaram boas soluções, entretanto essas soluções não são comparadas com as instâncias da literatura, devido a particularidade de cada problema.

Como continuidade deste trabalho, pretende-se permitir o encaixe dos itens do tipo L no cálculo da solução homogênea, dessa forma um padrão de corte como o apresentado pela Figura 2 poderia ser gerado. O limitante inferior também pode ser melhorado combinando itens retangulares e itens do tipo L. Isso é motivado pelo fato dos problemas da literatura apresentarem demanda dos itens pequena.

Outra proposta de continuidade é considerar itens de formato T em estoque. Nesse caso, é necessário repensar na geração do conjunto de discretização e no cálculo de soluções homogêneas compostas.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- Arenales, M., Morabito, R.,** (1995), An AND/OR - graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, 84: 599-617.
- Arenales, M., Morabito, R. e Yanasse, H.,** (1999), Special issue: cutting and packing problems (eds.). *Pesquisa Operacional*. 19(2), 107-299.
- Bischoff, E. e Waescher, G.** (1995), Special issue: cutting and packing (eds.). *European Journal of Operational Research*. 84(3).
- Brown, A.** *Optimum Packing and Depletion*. New York. Elsevier Science, 1971.
- Dowland, K. e Dowland, W.** (1992), Packing Problems. *European Journal of Operational Research*. 56, 2-14.
- Dyckhoff, H.** (1990), A Typology of Cutting and Packing Problems. *European Journal of Operational Research*. 44, 145-159.
- Dyckhoff, H. e Finke, U.** *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Heidelberg: Springer, 1992.
- Dyckhoff, H. e Waescher, G.** (1990), Special issue: cutting and packing (eds). *European Journal of Operational Research*. 44(2).
- Dyckhoff, H., Scheithauer, G. e Terno, J.** Cutting and Packing. In *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, edited by M. Amico, F. Maffioli and S. Martello. New York: Wiley, 393-414, 1997.
- Golden, B.,** (1976) Approaches to the cutting stock problem. *AIIE Transactions*. 8, 265-274.

- Herz, J.** (1972). Recursive Computational Procedure for Two Dimensional Stock Cutting. *IBM Journal of Research and Development*, 16, 462-469.
- Hinxman, A.**, (1980) The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Research*. 5, 8-18.
- Lins, L, Lins, S. e Morabito, R.** (2003), An L-approach for packing (l,w)-rectangles into rectangular and L-shaped pieces. *Journal of the Operational Research Society*, 54(7), 777-789.
- Lirov, Y.** (1992) Special issue: cutting problem, geometric resource allocation. *Mathematical and Computer Modelling*. 16(1).
- Martello, S.** (1994a), Special issue: Knapsack, packing and cutting – Part I: One dimensional knapsack problems. *INFOR*, 32(2).
- Martello, S.** (1994b), Special issue: Knapsack, packing and cutting – Part II: Multidimensional knapsack and cutting stock problems. *INFOR*. 32(4).
- Morabito, R.** (1989). Corte de Estoque Bidimensional. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1989.
- Morabito, R., Arenales, M. e Arcaro, V.** (1992), An AND/OR-Graph Approach for Two-Dimensional Cutting Problems. *European Journal of Operational Research*. 58(2), 263-271.
- Morabito, R., Arenales, M.,** (1994), An AND/OR - graph approach to the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, 1, 59-73.
- Morabito, R., Arenales, M.,** (1996), Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR - graph approach. *European Journal of Operational Research*, 94: 548-560.
- Mukhacheva, E. A.** (ed.) Decision Making Under Conditions of Uncertainty: Cutting-Packing Problems. Ufa, Russia: The International Scientific Collection, 1997.
- Nakatake, S., Fujiyoshi, K., Murata, H., Kajitani, Y.** (1996), Module Placement on BSG-Structure and IC Layout Applications. *IEEE Computer Society*. 96, 484-491.
- Oliveira, J. M., Ferreira, E. P. e Gomes Miguel, A.** (2011), Estudo Paramétrico de uma Heurística Construtiva para o Problema da Minimização da Área Envolvente Rectangular no Posicionamento de Retângulos. *Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Ubatuba, SP.
- Roberts, S.** (1984), Application of Heuristic Techniques to the Cutting-Stock Problem for Worktops. *The Journal of the Operational Research Society*. 35(5), 369-377,
- SICUP** - Special Interest Group on Cutting and Packing. Disponível em: <http://www.apdio.pt/sicup/>, 2011.
- Sweeney, P., Paternoster, E.** (1992), Cutting and packing problems: a categorized application-oriented research bibliography. *Journal of the Operational Research Society*. 43, 691-706.
- Valdés, R. A., Parajón, A. e Tamarit, J. M.** (2002), A Tabu Search Algorithm for Large-Scale Guillotine (un)Constrained Two-Dimensional Cutting Problems. *Computers & Operations Research*. 29, 925-947.
- Vianna, A. C. G.** Problema de Corte e Empacotamento: uma Abordagem em Grafo E/OU. São Carlos: USP, 2000. Tese (Doutorado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2000.
- Xu, J., Guo, P.-n, Cheng, C.-k.** (1998), Rectilinear Block Placement Using Sequence-Pair. *Proceedings of the 1998 international symposium on Physical design (ISPD '98)*. 173-178.