MÉTODO MATRICIAL PARA EL CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE OLSON K-BARICÉNTRICA

Felicia Villarroel
Universidad de Oriente
Avda. Universidad. Cerro del Medio. Departamento de Matemáticas. Cumaná. Estado Sucre. República Bolivariana de Venezuela
feliciavillarroel@gmail.com

Henry Márquez
Universidad de Oriente
Avda. Universidad. Cerro del Medio. Departamento de Matemáticas. Cumaná. Estado Sucre. República Bolivariana de Venezuela
henrylmarquez@gmail.com

Juan Otero
Instituto Tecnológico de Cumaná
Carretera Cumaná Cumanacoa, KM 4. Cumaná. Estado Sucre. República Bolivariana de Venezuela
jmotero74606@hotmail.com

RESUMEN

Dado un grupo abeliano finito G y un entero positivo k, la constante de Olson k−baricéntrica de G, denotada por BO(k, Z_n), es el mínimo t tal que cada subconjunto de t elementos de G contiene un subconjunto con k elementos {x_1, . . . , x_k} que cumple con la propiedad de que $\sum_{i=1}^{k} x_i = kx_j$ para algún j ∈ {1, . . . , k}. Un tal subconjunto con k−elementos se llama k−baricéntrico y el x_j correspondiente se llama un k−baricentro del conjunto. En este trabajo, después de recordar las definiciones pertinentes y contar sobre algunos resultados de la teoría baricéntrica, presentamos un algoritmo para calcular la constante BO(k, Zn). El algoritmo está ilustrado con el cálculo de BO(3, Z_6). Se calculan valores de BO(k, Z_n) para $3 \leq n \leq 23$ y $3 \leq k \leq n$.

PALABRAS CLAVES: Secuencia k-baricéntrica, Constante de Olson k-baricéntrica, método matricial.

ÀREA PRINCIPAL: TAG, OC, PM

ABSTRACT

Given a finite abelian group *G* and a positive integer *k*, the *k*−barycentric Olson constant of *G*, denoted by *BO*(*k*, Z_n), is the minimum *t* such that every subset of *t* elements of *G* contains a subset with *k* elements {x_1, . . . ,x_k} that satisfies the property that $\sum_{i=1}^{k} x_i = kx_j$ for some j ∈ {1, . . . , k}. One such subset with *k* elements is called *k*−barycentric and x_j is called a *k*−barycentric for it. In this paper, after recalling the relevant definitions and rely on some results of the theory barycenters we present an algorithm to calculate the constant *BO*(*k*, Z_n). The algorithm is illustrated with the calculation of *BO*(3, Z_6). Values are calculated *BO*(*k*, Z_n) for $3 \leq n \leq 23$ and $3 \leq k \leq n$.

KEYWORDS: $k-$barycentric sequence, $k-$barycentric Olson constant, matricial method.

MAIN AREA: TAG, OC, PM

1. Introducción

Sea G un grupo abeliano finito de orden *n*, *S* una secuencia de elementos de *G*, es decir la repetición de elementos es permitida y el orden de colocación de los elementos no se considera. Sean $S \subseteq G$ una secuencia o un conjunto, $|S|$ la longitud o cardinalidad de S y $\sum(S) = \{\sigma(A): A \subseteq S\}$, donde $\sigma(A)$ es la suma de los elementos de *A*. Si $\sigma(A) = 0$, decimos que *A es de suma cero*. El primer resultado conocido sobre problemas de suma cero, es el denominado por Erdôs como *lema prehistórico*: Sea *G* un grupo abeliano de orden *n*. Entonces toda secuencia de *n* elementos contiene una subsecuencia de suma cero. En Erdôs (1961), se presentó el siguiente teorema: toda secuencia de $2n - 1$ elementos en un grupo abeliano de orden *n*, contiene una *n*-subsecuencia de suma cero. Este resultado constituye la base fundamental del desarrollo del área de investigación denominada *problemas de suma cero*, la cual está inmersa en el campo de la *teoría aditiva* y, por tanto, utiliza muchos resultados de dicha teoría como herramientas básicas.

Específicamente se estudian las secuencias baricéntricas, las cuales se definen como: una secuencia $f: A \rightarrow G$ donde *A* es un conjunto finito con $|A| \geq 2$ y tal que existe $a \in A$ que verifica $\sum f = |A| f(a)$. Usamos la palabra secuencia porque podemos asociar, sin ningún inconveniente, al conjunto *A* con el conjunto $\{1, 2, \ldots, |A|\}$. Indistintamente se usan según sea el caso las dos notaciones para una secuencia, es decir, $f: A \rightarrow G$ o $a_1 a_2 \ldots a_n$. El elemento $f(a)$ se llama *baricentro*. Cuando $|A| = k$ hablamos de *secuencia* $k-$*baricéntrica* y cuando *f* es inyectiva hablamos de *conjunto* $k-$*baricéntrico*; por ejemplo, en Z_5, la secuencia 023 es 3-baricéntrica, ya que $0 + 2 + 3 = 0 = 3 \times 0$, mientras que la secuencia 112 no lo es. El estudio de las secuencias baricéntricas se inicia en Delorme (2004). En Ordaz (2009) se estudia la constante de Olson $k-$baricéntrica, $BO(k,G)$, es decir, el menor entero positivo *t* tal que todo *t*-conjunto, es decir, un conjunto de cardinalidad *t*, en *G* contenga un subconjunto $k-$baricéntrico y se presenta un método algorítmico basado en la teoría de órbitas, para el cálculo de dicha constante, para $3 \leq n \leq 12$ y $3 \leq k \leq n$. En este trabajo se presenta un método basado en la teoría matricial para el cálculo de $BO(k, Z_n)$. Se verifican los valores obtenidos en Ordaz (2009) y se corrigen cinco valores, además se calculan nuevos valores para $3 \leq n \leq 23$ y $3 \leq k \leq n$.

2. Método matricial para el cálculo de $BO(k, Z_n)$

En Otero (2011), se introduce el siguiente método: Supongamos que se quiere obtener $BO(k, Z_n)$, con los elementos de $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. En primer lugar, chequeamos el siguiente teorema dado en Ordaz (2009):

1. cuando $n = k$ y *n* es par se tiene que $BO(k, Z_n)$ no existe.
2. si *n* es impar con $k = n - 1$ se tiene que $BO(k, Z_n)$ no existe.

En caso contrario, se forman todas las combinaciones de esos elementos sin repetición mediante la fórmula

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \; ,$$

donde □□es la cardinalidad del conjunto a formar en la constante. Luego se verifica cuales de los conjuntos son □-baricéntricos y cuáles no. Si todos los conjuntos son □-baricéntricos nuestro método finaliza, y se tiene que $BO(k, Z_n) = k$. En caso contrario, se forman dos matrices, una formada por los conjuntos □-baricéntricos y otra formada por los conjuntos no □-baricéntricos, esta última matriz es de orden $p \times k$, donde □□es el número de conjuntos no □-baricéntricos. A partir de cada conjunto no □-baricéntrico se construyen matrices de orden $m \times (k + 1)$, donde □□≠ □□− □, y se verifica que sean matrices □-baricéntricas; de serlo, el valor de $BO(k, Z_n) = m + 1$, sino se construyen matrices, de otro nivel, es decir, de orden $(m-1) \times (k+2)$ y se verifican que las matrices sean □-baricéntricas, de serlo la $BO(k, Z_n) = k+2$. Así continúa el proceso hasta que todas las matrices sean □-baricéntricas, luego $BO(k, Z_n) = q$, donde □□es el número de columnas de las matrices □-baricéntricas del último nivel.

3. Ejemplo de aplicación del método

Verificar que $BO(3, Z_6) = 5$

Paso 1: Se busca el número de combinaciones sin repetición con los elementos de Z_6, tomados de 3 en 3, mediante la fórmula:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

que son:

$$\begin{pmatrix} 012 & 013 & 014 & 015 & 023 \\ 024 & 025 & 034 & 035 & 045 \\ 123 & 124 & 125 & 134 & 135 \\ 145 & 234 & 235 & 245 & 345 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Se chequean cuáles de estas secuencias son 3-baricéntricas y cuáles no; luego se forman dos matrices, una que va a contener como filas las secuencias 3-baricéntricas y otra que tendrá como filas las secuencias no 3-baricéntricas.

$$M3B = \begin{pmatrix} 012 \\ 015 \\ 024 \\ 045 \\ 123 \\ 135 \\ 234 \\ 345 \end{pmatrix} \qquad MN3B = \begin{pmatrix} 013 \\ 014 \\ 023 \\ 025 \\ 034 \\ 035 \\ 124 \\ 125 \\ 134 \\ 145 \\ 235 \\ 245 \end{pmatrix}$$

M3B: matriz 3- baricéntrica   MN3B: matriz no 3- baricéntrica

Paso 3: Construcción de submatrices de orden 3×4. Con cada una de las filas de la matriz MN3B matriz nobaricéntrica, se construyen submatrices de orden $m\times(k+1)$, en donde [illegible] es el complemento de los elementos que no están en la secuencia, es decir, [illegible] = [illegible] − [illegible]. Luego, se chequean si todas las submatrices son 3-baricéntricas, de ser cierto el valor de $BO(3, Z_6) = k+1$, es decir $BO(3, Z_6) = 4$ [illegible] En el paso 3 se generan las siguientes matrices:

$$M_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_5^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_6^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_7^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_8^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_9^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{10}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{11}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{12}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Pero en la submatriz M_1^1, la fila 0134 no es 3-baricéntrica, por tanto el $BO(3, \mathbb{Z}_6) > 4$.

Paso 4: Construcción de submatrices de orden 2×5[illegible] Con la filas no 3- baricéntricas de las submatrices de orden 3×4, se construyen submatrices de orden $(m - 1) \times (m + 2)$, es decir, submatrices de orden 2×5, esto es,

$$M_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Así, se continúa el proceso hasta llegar a verificar que todas las submatrices que nos quedan sean 3-baricéntricas. En consecuencia, en este último nivel todas las matrices de orden 4×5 son 3-baricéntricas, esto quiere decir, que todas las filas de la submatrices son 3-baricéntricas por tanto, $BO(3, \mathbb{Z}_6) = 5$.

4. Algoritmo principal para el cálculo de la [illegible]

Entrada: [illegible] enteros positivos mayor o igual a 3
Salida: $BO(k, \mathbb{Z}_n)$

Paso 0 Se chequean las condiciones siguientes dadas por teoremas:

1. cuando [illegible] y [illegible] es par se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.
2. si n es impar con $k = n - 1$ se tiene que $BO(k, \mathbb{Z}_n)$ no existe.

Paso 1 Se busca el número de combinaciones sin repetición de los [illegible] elementos tomados de [illegible] en [illegible] mediante la fórmula

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Paso 2 Se chequean cuáles de la combinaciones del paso 1, mediante la subrutina secuenciakbari, son [illegible]-baricéntricas.

Paso 3 Se forman dos matrices, una que contiene las secuencias [illegible]-baricéntricas, denominada matrizbari y la otra contendrá las secuencias no [illegible]-baricéntricas, llamada matriznobari.

Paso 4 Con cada una de las filas de las matriznobari, se construyen submatrices de orden $m_1 \times (k+1)$, donde $m_1 = n - k$, es decir m_1 es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y [illegible] es la longitud de la secuencia en estudio.

Paso 5 Se chequean si todas las submatrices son [illegible]-baricéntricas. Esto es aplicándole el paso 2, a todas las filas de las submatrices del paso 4, de ser todas las submatrices [illegible]-baricéntricas, el $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k + 1$.

Paso 6 Sino, con cada una de las filas nobari de las submatrices del paso 4, se construyen submatrices de orden $m_2 \times (k + 2)$, donde $m_2 = n - k + 1$, es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y $k+1$ es la longitud de la secuencia o conjunto en estudio.

Paso 7 Se aplica nuevamente el paso 5, es decir, se chequean si todas las submatrices son [illegible]-baricéntricas, esto es aplicándole el paso 2, a todas las filas de las submatrices, de ser todas las submatrices [illegible]-baricéntricas, el $BO(k, \mathbb{Z}_n) = k + 2$.

Paso 8 Se aplica el paso 6, esto es, con cada una de las filas nobari de las submatrices del paso 7, se construyen submatrices de orden $m_3 \times (k + 3)$, donde $m_3 = n-k+2$, es la cardinalidad del complemento de los elementos que no están en la secuencia nobari y □+2 es la longitud de la secuencia o conjunto en estudio.
Paso 9 Así se continúa en este ciclo hasta que, todas las submatrices sean □-baricéntricas.
Paso 10 Salida $BO(k, \mathrm{Z}_n) = m$, donde □ es el número de columnas del último nivel analizado, en donde todas las matrices son □-baricéntricas.
Paso 11 Fin.

5. Algunas tablas de nuevos valores de $BO(k,G)$

Cota Inferior	k	G	BO(k,G)	Tiempo(seg)
{0,1,3,4}	3	Z_{12}	5	4,837
{0,1,3,4}	3	Z_{13}	5	9,082
{0,1,3,7,8,10}	3	Z_{14}	7	28,509
{0,1,3,4}	3	Z_{15}	5	54,758
{0,1,3,7,8,10}	3	Z_{16}	7	169,004
{0,1,3,7,8}	3	Z_{17}	6	285,996
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	Z_{18}	9	1.481,930
{0,1,3,7,8,10}	3	Z_{19}	7	2.460,904
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	Z_{20}	9	3.889,228
{0,1,3,7,8,10}	3	Z_{21}	7	5.766,538
{0,1,3,4,10,11,13,14}	3	Z_{22}	9	16.733,393
{0,1,3,7,8,10}	3	Z_{23}	7	20.460,577

Tabla 1. Valores de BO(k,G) para k = 3 y 12 ≤ k ≤ 23

Cota Inferior	k	G	BO(k,G)	Tiempo(seg)
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{12}	7	12,765
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{13}	7	43,851
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{14}	7	146,062
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{15}	7	647,071
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	Z_{16}	9	701,792
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{17}	7	1.800,581
{0,1,2,3,7,11 }	5	Z_{18}	7	4.429,099
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{19}	7	14.555,809
{0,1 ,4,5,8,9,12,13 }	5	Z_{20}	9	44.482,105
{0,1,2,3,7,11}	5	Z_{21}	7	68.053,995
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	Z_{22}	9	90.345,290
{0,1,4,5,8,9,12,13}	5	Z_{23}	9	113.618,208

Tabla 2. Valores de BO(k,G) para k = 5 y 12 ≤ k ≤ 23

Cota Inferior	k	G	BO(k,G)	Tiempo(seg)
{0,1,2,3,…,12,13}	15	Z_{15}	15	Por Teorema

{0,1,2,3,…,12,13}	15	Z_{16}	15	Por Teorema
{0,1,2,3,…,12,13}	15	Z_{17}	15	0,239
{0,1,2,4,6,…,17}	15	Z_{18}	16	5.007
{0,1,2,4,6,…,17}	15	Z_{19}	16	19,330
{0,1,…,8,10,11,…,18}	15	Z_{20}	17	2.213,238
{0,1,2,4,6,…,17}	15	Z_{21}	16	27.665,613
{0,1,2,4,6,…,17}	15	Z_{22}	16	54.874,023
{0,1,2,4,6,…,17}	15	Z_{23}	16	87.241,909

Tabla 3. Valores de BO(k,G) para k = 15 y 15 ≤ k ≤ 23

Cota Inferior	k	G	BO(k,G)	Tiempo(seg)
{0,1,2,4,7,8}	4	Z_{10}	7	1.089
{0,1,2,4,7,8}	4	Z_{12}	7	11.155
{0,1,2,3,4,6,7}	6	Z_{12}	8	13.060
{0,1,2,3,5,7,8,10}	7	Z_{12}	9	3.192
{0,1,2,3,4,5,6,7,8}	9	Z_{12}	10	0.303

Tabla 4. Valores de BO(k,G) corregidos

Referencias

Delorme, C., González, S., Ordaz, O. and Varela, M.(2004), Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars. *Discrete Math*. 277, 45–56.

Erdos, P., Ginzburg, A. and Ziv, A. (1961), Theorem in the addittive number theory. *Bull. Res. Council Israel*. 10**,** 41–43.

Ordaz, O., Varela, M. and Villarroel, F. (2009), k−barycentric Olson Constant. *Math. Reports*. 11(61), 33–45.

Otero, J., Márquez, H. &Villarroel, F. (2011). Un método matricial para el cálculo de la constante de Olson k-baricéntrica. *Lecturas Matemáticas*. 32, 79-91.

.