

# Influência das Medidas Educacionais no Controle de Epidemias via Modelo Matemático SIER

**Nilmar Bispo Santana,**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, CEFET-MG  
Avenida Amazonas, 7675-Nova Gameleira  
30519-000, Belo Horizonte, MG  
nilmatematica@yahoo.com.br

**Fausto de Camargo Júnior**

Departamento de Física e Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Avenida Amazonas, 7675-Nova Gameleira  
30519-000, Belo Horizonte, MG  
fausto@dppg.cefetmg.br

1 de agosto de 2012

## Resumo

Este modelo analisa os efeitos das campanhas de saúde pública no controle de epidemias. Trabalhos anteriores, como Kassa e Ouhinou, estudaram modelos em que a população mudava de comportamento em meio a um surto epidêmico para se protegerem da doença. Juntamos o modelo de Kassa e Ouhinou com o modelo SIR, proposto por Kermack e McKendrick, em 1927. No modelo, assumimos que a população muda o comportamento para se autoprotger da doença em meio a um surto epidêmico e dividimos a população total em quatro compartimentos, suscetíveis - infectados - educados - recuperados. Consideramos como educados os indivíduos que possuem informação da doença e passam a tomar medidas de autoproteção. Consideramos também que os indivíduos recuperados possam se reinfetar, antes porém, eles voltam a ser suscetíveis ou educados.

*Palavras - Chave:* Epidemiologia Matemática, Modelos Compartimentais, Estabilidade  
*Área Principal:* Simulação

## Abstract

This model analyzes the effects of public health campaigns to control epidemics. Previous works, such as Kassa and Ouhinou studied models in which the population changed behavior in the midst of an outbreak to protect themselves from disease. Together the model and Kassa Ouhinou the SIR model, proposed by Kermack and McKendrick in 1927. In the model, we

assume that the population changes the behavior of the disease to protect itself amid an outbreak and divided the population into four compartments, susceptible - infected - educated - recovered. We consider as educated individuals who have information of the disease and begin to take measures of self-protection. We also believe that it can reinfect individuals recovered, but before they are re-educated or susceptible.

*Keywords:* Epidemiology, Mathematics, A compartmental model, stability systems

*Main Area:* Simulation

## 1 Introdução

É antiga a preocupação em usar modelos matemáticos para estudar doenças epidemiológicas. O primeiro modelo que se tem registro data de 1760 e é da autoria de Daniel Bernouli (DEZOTTI, 2000). Em 1960, Hamer postulou que a lei de ação das massas, ela diz que a taxa de espalhamento de uma infecção é proporcional ao produto da densidade dos indivíduos suscetíveis pela densidade dos indivíduos infectados. A teoria do limiar, proposta por Kermack e McKendrick, em 1927, diz que a introdução de um pequeno número de indivíduos infecciosos em uma comunidade de suscetíveis não é capaz de se alastrar como um surto epidêmico a menos que a densidade (ou número) de suscetíveis esteja acima de um certo valor crítico, denominado limiar (KERMACK; MCKENDRICK, 1927).

A combinação entre a lei da ação de massas e a teoria do limiar formam a base da epidemiologia matemática moderna (DEZOTTI, 2000).

O mais famoso dos modelos de epidemiologia matemática, o modelo SIR, divide a população em três compartimentos, Suscetíveis, Infectados e Recuperados. Esse modelo considera que o comportamento humano permanece inalterado durante todo um surto epidêmico (KASSA; OUHINOU, 2010). Na prática não ocorre exatamente dessa forma, as pessoas ao perceberem um perigo por parte da doença começam a mudar os seus hábitos para se protegerem da doença.

Em todo o mundo, autoridades governamentais tem se preocupado em investimento de campanhas educacionais, principalmente voltada para jovens. O resultado, no entanto, está abaixo do esperado (PACHI, 2006).

Assim como em diversos modelos, entre eles o modelo SIR, o modelo proposto neste trabalho é do tipo compartimental, ou seja, a população é dividida em compartimentos que descrevem o atual estágio do indivíduo em relação a doença estudada. Os principais compartimentos são:

Suscetíveis: indivíduos que não possuem a doença e estão suscetíveis a contraí-la;

Infectados: indivíduos que possuem a doença;

Recuperados: indivíduos que se recuperaram da doença e estão imunes a ela;

Expostos: indivíduos infectados pela doença mas que não são infectantes.

Propomos um modelo em que a população é dividida em quatro compartimentos, sendo eles, suscetíveis, infectados, educados e recuperados. Chamamos de educados os indivíduos que possuem informação de uma doença e adotam medidas de autoproteção contra ela.

## 2 O Modelo

Baseado no modelo proposto por Kassa e Ouhinou (KASSA; OUHINO, 2010) e no modelo SIR, suscetíveis - infectados - recuperados, propomos um modelo em que a população é dividida em quatro compartimentos. Sendo eles Suscetíveis, Infectados, Educados e Recuperados.

Neste trabalho, propõe-se um estudo dos efeitos das campanhas de saúde pública na dinâmica das doenças evitáveis como dengue e AIDS, à medida que as pessoas vão se protegendo da doença. É claro que as pessoas, com o tempo, vão abandonando as medidas de proteção, esse abandono será medido pelo nível de saturação, descrito na equação (1).

A função da mudança de comportamento,  $\xi$ , será definida em termos da prevalência  $P(t)$  como (KASSA; OUHINO, 2010)

$$\xi(P) = \frac{a \cdot P^n}{P_*^n + P^n} \tag{1}$$

Símbolo	Descrição
$a$	Nível de saturação de $\xi$
$P_*$	Valor da prevalência onde a população começa a mudar de comportamento
$n$	Número inteiro que retrata a intensidade de reação por parte da população

Tabela 1: Parâmetros da função  $\xi$

Seguem-se os gráficos, figura (1), para  $n = 2, n = 4$  e  $n = 6$ , ambos para  $a = 1$  e  $P_* = 4\%$

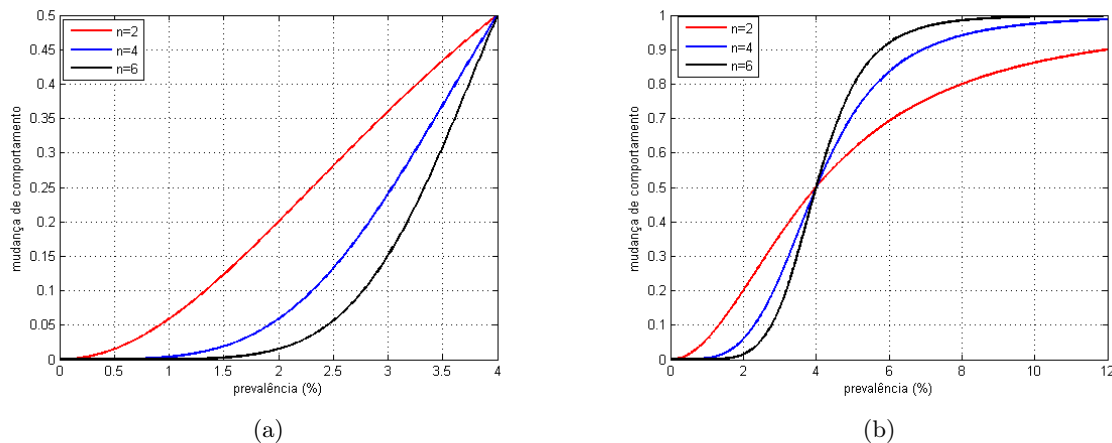


Figura 1: Gráficos da função de prevalência  $\xi$  para  $n = \{2, 4, 6\}$

Considerando  $\alpha$  a taxa de disseminação da informação na população, o valor  $\alpha\xi S$  representa o número de indivíduos que deixam de ser suscetíveis e se tornam educados. Sendo  $c$  o número médio de contatos por pessoa por unidade de tempo e  $\beta$  a taxa de transmissão da doença, então,  $c\beta S \frac{I}{N}$  representa o número de pessoas que migram da classe de suscetíveis para a de infectados.

Assumindo que  $\gamma \in [0, 1]$  seja a eficácia média das medidas de autoproteção então  $1 - \gamma$  representa a não eficácia dessas medidas e o número  $(1 - \gamma)c\beta E \frac{I}{N}$  são os indivíduos educados que se infectaram. O número de indivíduos que se recuperam e migram para a classe dos recuperados é  $\delta I$ , sendo que  $\delta$  é a taxa de recuperação da doença. Chamamos de  $\mu$  a taxa de morte natural e  $\sigma$  a taxa de morte devido a doença.

Seguem as equações do modelo

$$\frac{dS}{dt} = \tau - \alpha\xi S - c\beta \frac{I}{N}S + \rho R - \mu S \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha\xi S - (1 - \gamma)c\beta E \frac{I}{N} + \varphi R - \mu E \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dt} = c\beta \frac{I}{N}S + (1 - \gamma)c\beta E \frac{I}{N} - (\mu + \sigma + \delta)I \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - (\varphi + \rho + \mu)R \quad (5)$$

onde:

- $\tau$  taxa de afluxo de indivíduos suscetíveis
- $\beta$  taxa de transmissão da doença
- $c$  número médio de contatos por pessoa, por unidade de tempo
- $\mu$  taxa de mortalidade natural
- $\sigma$  taxa de mortalidade devido a doença
- $\alpha$  taxa de disseminação da informação da doença na população
- $\gamma$  eficácia média das medidas auto-preventivas
- $\delta$  taxa em que os indivíduos deixam de ser Infectados e passam a ser Educados
- $\varphi$  taxa de migração de indivíduos recuperados para educados
- $\rho$  taxa de migração de indivíduos recuperados para suscetíveis

Não estamos considerando que o indivíduo recuperado tenha imunidade perene. Eles podem voltar a ser suscetíveis, a uma taxa  $\rho$  ou educados, a uma taxa  $\varphi$ . Neste trabalho consideramos que  $\varphi > \rho$ .

## 2.1 Taxa Básica de Reprodução

A chance de uma epidemia permanecer sobre uma população e esta, por sua vez, vir a tornar-se infectada e diminuir por morte ocasionada pela doença é mostrada pelo número de reprodutibilidade basal,  $R_0$ , o qual é definido como o número de infecções secundárias causadas por uma infecção simples (ROSSI, 2008; BRAUER, 2005). Este número é também conhecido como taxa básica de reprodução (NEPOMUCENO, 2005).

A taxa básica de reprodução é um número importante em epidemiologia matemática, ele vai definir o futuro de uma epidemia na população. O sucesso do número básico de reprodução, como também é chamado, decorre de sua interpretação clara biológica, bem como de suas propriedades importantes no estudo de uma doença (PELLIS; BALL; TRAPMAN, 2012). Se

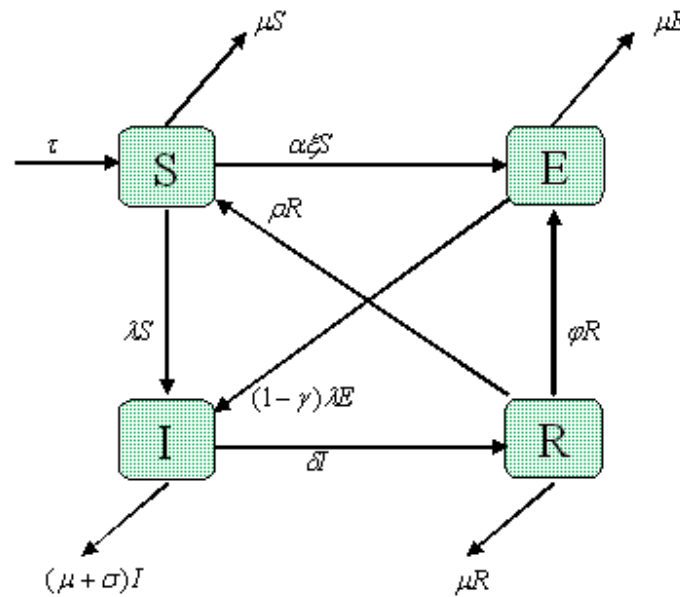


Figura 2: Representação esquemática do modelo Suscetível-Infetado-Educado-Recuperado

esse número for menor do que 1, então a doença erradica por conta própria, senão, ela persiste na população (OZCAGLAR et al., 2012)(ALLEN; BURGIN, 2000).

Seguindo o método descrito em (MEDAR, 1990) podemos encontrar a taxa básica de reprodução,  $R_0$ , como segue.

Da equação 4 temos que  $I' = \left[ c\beta \frac{S}{N} + (1-\gamma)c\beta \frac{E}{N} - (\mu + \sigma + \delta) \right] I$ . Mas, da definição de  $R_0$ , temos que, inicialmente a população total é aproximadamente igual ao número de suscetíveis, ou seja,  $S \approx N$  e  $E = 0$ , temos, portanto, que  $I' \approx [c\beta - (\mu + \sigma + \delta)]I \implies I' \approx (\mu + \sigma + \delta) \left( \frac{c\beta}{\mu + \delta + \sigma} - 1 \right)$  e a taxa básica de reprodução é

$$R_0 = \frac{c\beta}{\mu + \sigma + \delta} \tag{6}$$

**Teorema 2.1** *A doença erradica quando a taxa básica de reprodução ( $R_0$ ) for menor do que 1.*

**Demonstração 2.1** *Considere a equação 4*

$I'(t) = \left[ c\beta \frac{S(t)+(1-\gamma)E(t)}{N(t)} - (\mu + \sigma + \delta) \right] I(t) \implies I'(t) \leq [c\beta - (\mu + \sigma + \delta)]I(t)$ . Multiplicando e dividindo o segundo membro por  $\mu + \sigma + \delta$ , temos que  $I'(t) \leq (\mu + \sigma + \delta)(R_0 - 1)I(t)$ . Resolvendo por separação de variáveis encontramos  $I(t) \leq I(0)e^{(R_0-1)t}$ . Vemos que se  $R_0 < 1$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ .

### 3 Resultados

#### 3.1 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade do Sistema

Podemos encontrar os pontos de equilíbrio do sistema (4)-(5) fazendo  $dS/dt = dI/dt = dE/dt = dR/dt = 0$ . A função da mudança de comportamento  $\xi = \frac{P^n}{P_*^n + P^n}$  pode ser escrita de forma equivalente em termos da força de infecção  $\lambda = c\beta P$ , ou seja,  $\xi = \frac{\lambda^n}{\lambda_0^n + \lambda^n}$  e  $\lambda_0$  é a força de infecção equivalente a  $P_*$ , ou seja,  $\lambda_0 = c\beta P_*$ .

Fazendo isso encontramos o ponto de equilíbrio  $P^* = (S^*, I^*, E^*, R^*)$  de tal forma que

$$S^* = \frac{\tau[\lambda_0^n + (\lambda^*)^n][\delta\rho\lambda^* + (\sigma\lambda^* + c\beta\mu)(\varphi + \mu + \rho)]}{(\sigma\lambda^* + c\beta\mu)(\varphi + \mu + \rho)\{\alpha(\lambda^*)^n + [\lambda^* + \mu][\lambda_0^n + (\lambda^*)^n]\}} \quad (7)$$

$$E^* = \frac{\alpha\tau(\lambda^*)^n[\delta\rho\lambda^* + (\sigma\lambda^* + c\beta\mu)(\varphi + \mu + \rho)] + \varphi\delta\tau(\lambda^*)\{\alpha(\lambda^*)^n + (\mu + \lambda^*)[\lambda_0^n + (\lambda^*)^n]\}}{(\sigma\lambda^* + c\beta\mu)(\varphi + \mu + \rho)[\mu + (1 - \gamma)\lambda^*]\{\alpha(\lambda^*)^n + [\mu + \lambda^*][\lambda_0^n + (\lambda^*)^n]\}} \quad (8)$$

$$I^* = \frac{\tau\lambda^*}{\sigma\lambda^* + c\beta\mu} \quad (9)$$

$$R^* = \frac{\delta\tau\lambda^*}{(\varphi + \mu + \rho)(\sigma\lambda^* + c\beta\mu)} \quad (10)$$

$$N^* = \frac{c\beta\tau}{\sigma\lambda^* + c\beta\mu} \quad (11)$$

e  $\lambda^*$  é a raiz real não negativa do polinômio

$$P(\lambda) = \lambda[A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + A_3\lambda^3 + (A_4 + A_5\lambda + A_6\lambda^2 + A_7\lambda^3)\lambda^n] \quad (12)$$

onde

$$A_0 = c^2\beta^2\mu^3\lambda_0^n(1 - R_0)$$

$$A_1 = c\beta\tau\mu^2\lambda_0^n[(\varphi + \mu + \rho)c\beta(R_0 - 1) + \delta R_0\varphi]\gamma + c\beta\tau\mu^2\lambda_0^n\{(\varphi + \mu + \rho)[\sigma + c\beta + c\beta(1 - R_0) - 2\sigma R_0] - \delta R_0(\rho + \varphi)\}$$

$$A_2 = c\beta\tau\mu\lambda_0^n(\mu + \varphi + \rho)[\sigma + \sigma(1 - \gamma) + (1 - \gamma)c\beta] - R_0[\sigma\tau\mu\lambda_0^n\delta\rho + \sigma^2\tau\mu\lambda_0^n(\varphi + \mu + \rho) + 2\sigma\tau\lambda_0^n(1 - \gamma)(\varphi + \mu + \rho)c\beta\mu + \sigma(1 - \gamma)\varphi\delta\tau\mu\lambda_0^n + c\beta\mu(1 - \gamma)\varphi\delta\tau\lambda_0^n + c\beta\mu\tau\lambda_0^n(1 - \gamma)\delta\rho]$$

$$A_3 = (1 - \gamma)c\beta\tau\sigma\lambda_0^n(\varphi + \mu + \rho) - R_0[(1 - \gamma)\delta\rho\tau\sigma\lambda_0^n + \sigma^2\tau\lambda_0^n(\varphi + \mu + \rho)(1 - \gamma) + \sigma(1 - \gamma)\varphi\tau\delta\lambda_0^n]$$

$$A_4 = c^2\beta^2\mu^2\tau(\varphi + \mu + \rho)[\alpha + \mu - \mu R_0 - \alpha(1 - \gamma)R_0]$$

$$A_5 = c\beta\tau\mu^2(\varphi + \mu + \rho)\sigma + c^2\beta^2\tau(\varphi + \mu + \rho)\mu^2 + c^2\beta^2\tau(\varphi + \mu + \rho)\alpha\mu(1 - \gamma) + c^2\beta^2\tau(\varphi + \mu + \rho)\mu^2(1 - \gamma) + c\beta\tau(\varphi + \mu + \rho)\sigma\mu\alpha - R_0[2\sigma\tau\mu^2c\beta(\varphi + \mu + \rho) + 2\sigma(1 - \gamma)\tau\alpha(\varphi + \mu + \rho)c\beta\mu + c\beta\mu^2\tau\delta\rho + c^2\beta^2\mu^2\tau(\varphi + \mu + \rho)(1 - \gamma) + c\beta\mu(1 - \gamma)\alpha\tau\delta\rho + c\beta\mu(1 - \gamma)\varphi\delta\tau\alpha + c\beta\mu^2(1 - \gamma)\varphi\delta\tau]$$

$$A_6 = c\beta\tau(\mu + \varphi + \rho)[\mu\sigma + (1 - \gamma)\alpha\sigma + (1 - \gamma)c\beta\mu + (1 - \gamma)\mu\sigma] - R_0[\tau\mu\delta\rho\sigma + \tau\mu(\varphi + \mu + \rho)\sigma^2 + 2\sigma\tau(1 - \gamma)(\varphi + \mu + \rho)c\beta\mu + (1 - \gamma)\tau\alpha\delta\rho\sigma + (1 - \gamma)\alpha\tau(\varphi + \mu + \rho)\sigma^2 + (1 - \gamma)\varphi\delta\tau\alpha\sigma +$$

$$(1 - \gamma)\varphi\delta\pi\mu\sigma + (1 - \gamma)c\beta\pi\mu\delta\rho + (1 - \gamma)c\beta\mu\varphi\delta\pi]$$

$$A_7 = (1 - \gamma)\tau\sigma\mu R_0(\varphi + \mu + \rho + \delta)$$

Quando  $\lambda^* = 0$ , o ponto de equilíbrio  $P_1^* = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0)$  é o ponto de equilíbrio livre da doença.

### 3.2 Simulação Numérica

Os parâmetros utilizados na simulação numérica estão definidos na tabela (2)

Parâmetro	Valor utilizado	Parâmetro	Valor utilizado
$\tau$	60700	n	2
$\alpha$	(0,1)	c	10,4
$\beta$	(0,1)	$\sigma$	0,113
$\gamma$	(0,1)	$\varphi$	0,31
$\mu$	1/70	$\delta$	0,22
$P_*$	0,11	$\rho$	0,09

Tabela 2: Parâmetros utilizados neste trabalho

A figura (3) mostra a variação no número de indivíduos para  $\alpha = 0,22$ ;  $\beta = 0,13$  e  $\gamma = 0,91$ .

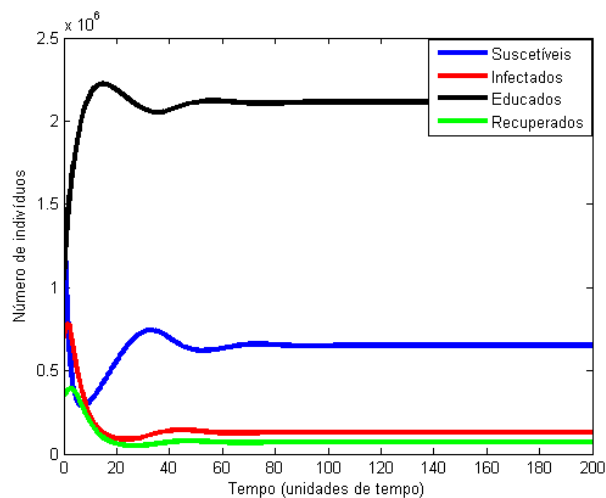


Figura 3: Variação do número de indivíduos suscetíveis, infectados, educados e recuperados para  $\alpha = 0,22$ ;  $\beta = 0,13$ ;  $\gamma = 0,91$

A relação entre o número de indivíduos suscetíveis e infectados está descrito na figura (4a) e a figura (4b) mostra a relação entre o número de indivíduos suscetíveis e educados.

Os gráficos da figura (5) descrevem a força de infecção para  $\gamma = 0,85$ ;  $\gamma = 0,91$ ;  $\gamma = 0,97$ .

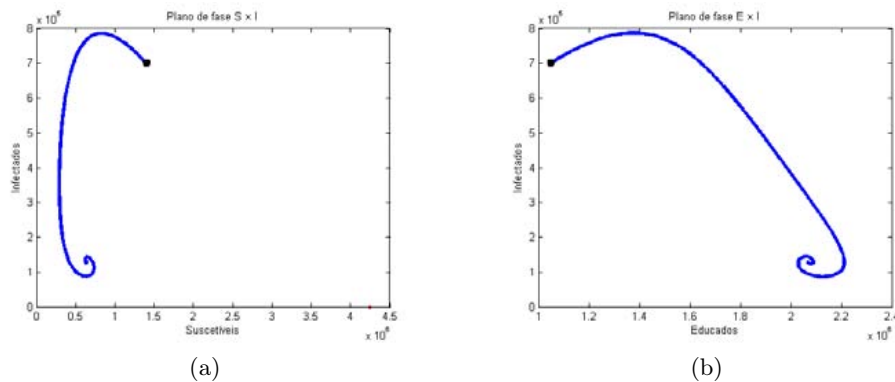


Figura 4: Evolução no plano de fases suscetíveis  $\times$  infectados, (4a) e suscetíveis  $\times$  educados, (4b)

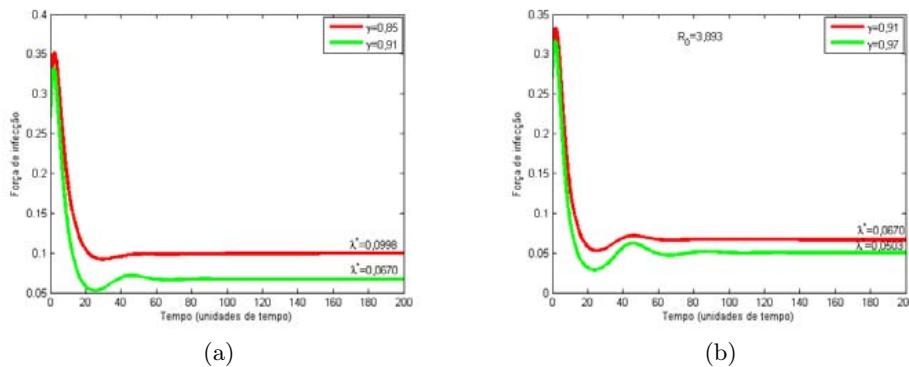


Figura 5: Força de infecção para  $\gamma = 0,85$ ;  $\gamma = 0,91$ ;  $\gamma = 0,97$

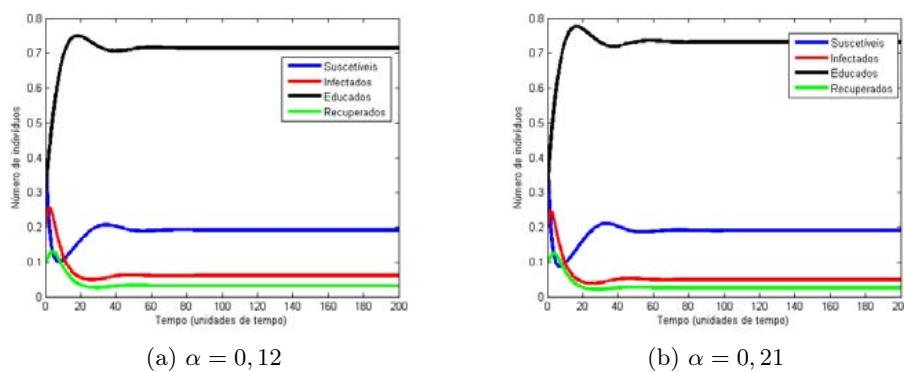


Figura 6: Variação no número de indivíduos suscetíveis, infectados, educados e recuperados para  $\alpha = 0,12$  e  $\alpha = 0,21$  ambos para  $\gamma = 0,91$

### 3.3 Eliminando a divulgação da informação

Fizemos simulações computacionais para mostrar que a transmissão da informação na população possui um efeito positivo no controle de epidemias, para eliminar essa informação, no nosso modelo, fazemos  $\alpha = 0$ , a figura (7) mostra a variação no número de indivíduos susce-



tíveis, infectados, educados e recuperados para a situação em que  $\alpha = 0$  (sem divulgação de informação) e  $\alpha = 0,12$  (com divulgação de informação), usando  $\beta = 0,13$  e  $\gamma = 0,91$ . A linha tracejada representa  $\alpha = 0$  nas figuras (7) e (8).

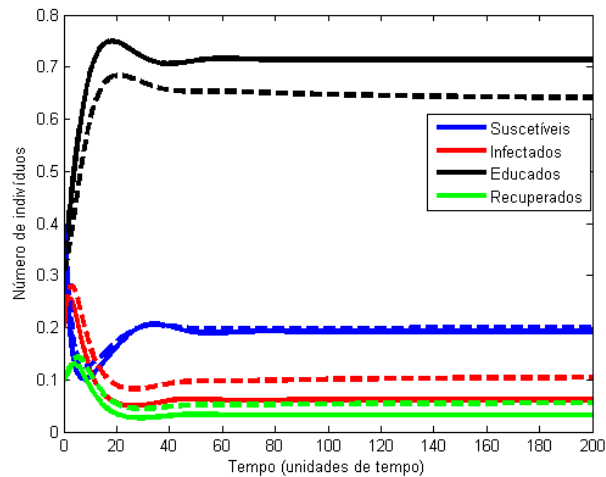


Figura 7

Ainda que  $\alpha$  seja pequeno, as medidas educacionais mantêm uma influência positiva no controle de epidemias.

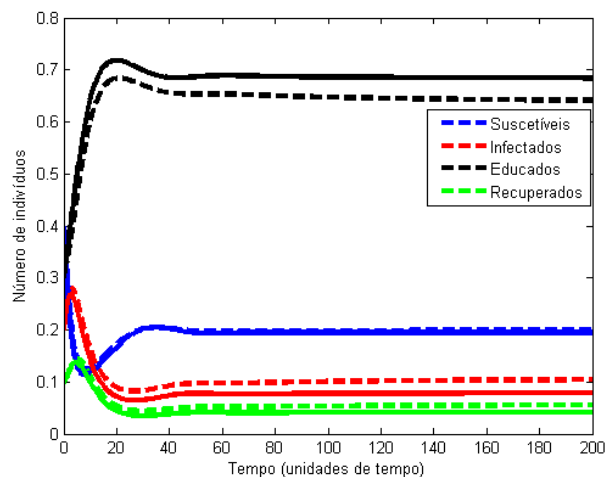


Figura 8

## 4 Conclusão

Propomos e analisamos um modelo matemático do tipo compartimental. Analisamos a influência das campanhas educativas na dinâmica do modelo. Encontramos os seus pontos de

equilíbrio e mostramos que a estabilidade do sistema pode ser endêmica se  $R_0 > 1$  ou a doença pode erradicar, caso em que  $R_0 < 1$ . As campanhas de saúde pública podem não surtir muito efeito se a eficácia média de autoproteção também não surtir efeito. Pequenas variações em  $\gamma$  podem variar a força de infecção.

A força de infecção depende do número médio de contato por pessoa por unidade de tempo. Ela pode, portanto, variar de região para região. A zona rural, por exemplo, pode ter um valor do número médio de contatos diferente do número das cidade ou até mesmo cidades pequenas possuem um valor menor do que os grandes centros urbanos.

Em se tratando de doenças que não possuem tratamento eficaz, resta - nos a prevenção (KASSA; OUHINO, 2010). Mostramos que o valor de  $\alpha$  possui uma influência positiva no controle de epidemias. As simulações computacionais mostraram ainda que, para  $\alpha$  acima de 0,21 e  $\gamma$  em torno de 0,85 a força de infecção se manterá abaixo de 0,1 seguindo os valores dos parâmetros utilizados neste trabalho.

## Referências

- ALLEN, L. J.; BURGIN, A. M. Comparison of deterministic and stochastic sis and sir models in discrete time-dependent. *Mathematical Biosciences*, v. 163, p. 1–33, 2000.
- BRAUER, F. The kermack-mckendrick epidemic model revisted. *Mathematical Biosciences*, v. 198, p. 119–31, 2005.
- DEZOTTI, C. H. *A Teoria Espectral e doenças Infeciosas de Tranmissão Direta*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- KASSA, S. M.; OUHINO. Epidemiological models with prevalence dependent endogenous self-protection measure. *Mathematical Biosciences*, v. 41-49, 2010.
- KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, v. 115, p. 700–721, 1927.
- MEDAR, M. D. R. *MODELOS MATEMÁTICOS DA AIDS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 1990.
- NEPOMUCENO, E. G. *Dinâmica, Modelagem e Controle de Epidemias*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- OZCAGLAR, C. et al. Epidemiological models of mycobacterium tuberculosis complex infections. *Mathematical Biosciences*, p. 77–96, 2012.
- PACHI, C. G. d. F. *Modelo Matemático para o estudo da propagação de informações por campanhas educativas e rumores*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2006.
- PELLIS, L.; BALL, F.; TRAPMAN, P. Reproduction numbers for epidemic models with households and other social structures. i. definition and calculation of  $r_0$ . *Mathematical Biosciences*, p. 85–97, 2012.

ROSSI, M. *Modelo Matemático da Resposta imune à Infecção Pelo Vírus HIV-1*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.