

GRAFO K -SOPORTE, PRODUTO FUNCIONAL E COLORAÇÃO TOTAL EQUILIBRADA EM GRAFOS REGULARES

Abel Rodolfo Garcia Lozano

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Departamento de Matemática
Rua Doutor Francisco Portela, 1470, São Gonçalo, RJ
Universidade do Grande Rio – Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Rua Professor José de Souza Herdy, 1160, Duque de Caxias, RJ
E-mail: arglozano@terra.com.br

Angelo Santos Siqueira

Universidade do Grande Rio – Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Rua Professor José de Souza Herdy, 1160, Duque de Caxias, RJ
E-mail: asiqueira@unigranrio.com.br

Clícia Valladares Peixoto Friedmann

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Departamento de Matemática
Rua Doutor Francisco Portela, 1470, São Gonçalo, RJ
Universidade do Grande Rio – Escola de Ciências, Educação, Letras, Artes e Humanidades
Rua Professor José de Souza Herdy, 1160, Duque de Caxias, RJ
E-mail: cliciavp@terra.com.br

Samuel Jurkiewicz

Universidade Federal do Rio de Janeiro – Programa de Engenharia de Produção
Ilha do Fundão, Centro de Tecnologia, Cidade Universitária, RJ
E-mail: jurki@pep.ufrj.br

RESUMO

Neste trabalho provamos que se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores, então existe uma coloração total equilibrada com no máximo $\Delta + 2$ cores. Em seguida, introduzimos os conceitos de produto funcional de grafos e de grafo k -suporte, que servem de alicerce para a construção uma nova subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos total e equilibradamente com $\Delta + 2$ cores. Para finalizar, mostramos que essa família é suficientemente grande, isto é, pode ser estendida preservando a coloração total equilibrada.

PALAVRAS CHAVE. Coloração total equilibrada, Produto funcional, Grafo k -suporte.

ABSTRACT

In this paper we prove that if a regular graph admits a special vertex coloring (with range Δ) with $\Delta + 1$ colors, then there exists an equitable total coloring with a maximum of $\Delta + 2$ colors. We also introduce the concepts of functional product of graphs and k -support graphs which are used as bases for the construction of a new subfamily of regular graphs, which admits an equitable total coloring with $\Delta + 2$ colors. Finally, we show that this family is sufficiently large, ie, it can be extended preserving the equitable total coloring.

KEYWORDS. Equitable total coloring, Functional product of graphs, k -support graph.

1. Introdução

Lozano *et al.* (2008) descreveram uma aplicação sobre coloração total equilibrada associada a redes de interconexão. Este conceito foi empregado para obter uma representação natural para o processamento paralelo nesse tipo de redes, onde uma coloração total equilibrada, que satisfizesse a conjectura de Vizing^a, foi utilizada para modelar as principais topologias das redes. Essa aplicação nos motivou a estudar a construção de grafos regulares que pudessem ser coloridos total e equilibradamente com $\Delta + 2$ cores, a fim de gerar possibilidades para novas topologias de redes de interconexão.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente revisaremos alguns conceitos básicos de grafos e coloração, e logo após mostraremos que, se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores, então sua coloração total é equilibrada com $\Delta + 2$ cores no máximo. Em seguida, introduziremos o conceito de produto funcional de grafos, que toma como base o produto cartesiano de grafos, e a partir daí, apresentaremos uma subfamília de grafos regulares, que podem ser coloridos total e equilibradamente com $\Delta + 2$ cores. Para finalizar, provaremos que essa família é suficientemente grande, isto é, pode ser estendida preservando a coloração total equilibrada.

2. Conceitos Básicos

Nesta seção, apresentamos definições básicas e terminologias da teoria de grafos utilizadas no decorrer do trabalho, e que também podem ser encontradas em Bondy e Murty (1976); Diestel (1997) e Yap (1986).

Um **grafo** $G(V(G), E(G))$ é uma estrutura composta por dois conjuntos $V(G)$ e $E(G)$, tais que $V(G)$ é finito e não vazio e $E(G)$ é formado por subconjuntos de dois elementos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ e $E(G)$ são respectivamente os **vértices** e as **arestas** do grafo. Denotamos um grafo $G(V(G), E(G))$ por $G(V, E)$ ou mais simplesmente por G , quando não houver necessidade de destacar o conjunto de vértices ou arestas. Representamos, respectivamente, por $|V|$ ou n e por $|E|$ ou m , os números de vértices e arestas de um grafo. Dados u e v , vértices quaisquer de $G(V, E)$, se existir a aresta $e = \{u, v\}$, ela será denotada por $e = uv$; os vértices u e v são **adjacentes** e a aresta uv é **incidente** aos vértices u e v . Duas arestas são **adjacentes** se existe um vértice em comum. Para cada vértice v , o número de arestas incidentes em v é dito **grau do vértice** e é representado por $d(v)$. Denotamos o menor e o maior grau dos vértices de G por $\delta(G)$ (ou δ) e $\Delta(G)$ (ou Δ), respectivamente.

Um grafo $G(V, E)$, no qual todos os seus vértices têm o mesmo grau k é chamado de **grafo k -regular**. Se um grafo $G(V, E)$ é $(n-1)$ -regular, então ele é denominado **grafo completo de ordem n** e denotado por K_n . Um subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ é dito **subgrafo induzido** de G , se $uv \in E$ implicar em $uv \in E'$. Um **emparelhamento** de um grafo $G(V, E)$ é um subconjunto M de E , tal que nenhum par de seus elementos sejam adjacentes entre si. Um vértice v de G se diz **M -saturado** se alguma aresta de M é incidente a v , caso contrário v é dito **M -insaturado**. Um emparelhamento que satura todos os vértices de G é dito um **emparelhamento perfeito**. Dado $v \in V$, denotamos por $N(v)$ o conjunto dos vértices adjacentes a v ; $N(v)$ é a **vizinhança** de v e é formado pelos vizinhos deste vértice, e por $N[v]$ o conjunto $N(v) \cup \{v\}$. Se $S \subset V$, $N(S)$ denota o conjunto $\bigcup_{v \in S} N(v)$. Um subconjunto $S \subset V$ em um grafo $G(V, E)$ é **independente**, se $S \cap N(S) = \emptyset$.

^a Em 1965 o matemático Vadim Vizing conjecturou que todo grafo simples possui uma coloração total com no máximo $\Delta + 2$ cores.

3. Coloração de Vértices, Coloração com Folga, Coloração Total e Coloração Total Equilibrada

Nesta seção, apresentamos as definições de coloração de vértices, com folga, coloração total e total equilibrada, que servirão de suporte para o restante do trabalho. Estes conceitos, assim como propriedades e resultados referentes a essas colorações, podem ser encontrados com maior profundidade e detalhamento em Hajnal e Smezmëride (1970), Yap (1996), Lozano (2005) e Lozano *et al.* (2009).

Nas definições abaixo, consideramos um grafo $G(V, E)$ e C um conjunto de cores, $C \neq \emptyset$, tal que $C = \{c_1, \dots, c_k\}$; k um número inteiro positivo. Por questões de simplicidade, os elementos c_1, \dots, c_k de C podem ser também representados por $1, \dots, k$.

Uma **coloração de vértices** de G é uma aplicação c do conjunto de vértices V num conjunto de cores C . Se são usadas k cores para colorir os vértices, trata-se de uma **k -coloração** de vértices. Ela é **própria** se nenhum par de vértices adjacentes tem a mesma cor associada a ele. Uma coloração de vértices de G é denominada uma **coloração com folga de ordem k** de G quando, para todo $v \in V$, se $d(v) \leq k$ então $|c(N(v))| = d(v)$, caso contrário $|c(N(v))| \geq k$.

Uma **coloração de arestas** de G é uma aplicação do conjunto de arestas E num conjunto de cores C . Se são usadas k cores para colorir as arestas, trata-se de uma **k -coloração** de arestas. Ela é **própria** se nenhum par de arestas incidentes tem a mesma cor associada a ele.

Uma **coloração total** de G é uma aplicação do conjunto $V \cup E$ em um conjunto de cores C . Uma coloração total, com k cores, é chamada de **k -coloração total**. Ela é **própria** se nenhum par de elementos, incidentes ou adjacentes, do grafo tem a mesma cor associada a ele. A expressão “coloração total” será usada em referência a “coloração total própria”. Uma coloração total de G , com as cores de $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ é **equilibrada** se, para todo par de cores c_i e c_j , tem-se $|a(c_i) - a(c_j)| \leq 1$, sendo $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$ e $a(c_i)$ e $a(c_j)$ representam respectivamente os números de aparições das cores c_i e c_j na coloração.

Sejam C e C' dois conjuntos de cores, tais que $C \subset C'$, $c: V \rightarrow C$ uma coloração de vértices de G e $c': (V \cup E) \rightarrow C'$ uma coloração total de G . Diz-se que c' é uma **extensão da coloração c** , se para todo $v \in V$ tem-se que $c'(v) = c(v)$.

Neste texto, a expressão “coloração” sempre será usada em referência à “coloração de própria”.

4. Relação entre Coloração com Folga e Coloração Total Equilibrada em Grafos Regulares

A seguir, apresentamos três teoremas que têm como objetivo mostrar que se um grafo regular pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores, então existe uma extensão da coloração com no máximo $\Delta + 2$ cores, e a extensão é equilibrada.

Teorema 1. *Sejam $G(V, E)$ um grafo regular e $c: V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ . Então:*

a) $\Delta + 1$ divide $|V|$;

b) Cada cor $i \in C$, é usada exatamente $\frac{|V|}{\Delta + 1}$ vezes.

Prova. Para cada cor $i \in C$, denotamos por V_i o conjunto dos vértices que tem associada a cor i pela coloração c . Para dar continuidade a demonstração, os seguintes fatos são necessários:

Fato 1. Para todo $i \in C$, V_i é um conjunto independente de V . Como G é regular então $d(v) = \Delta$, portanto todas as cores de $C - \{c(v)\}$ são usadas em $N(v)$, isto é, $V_i \cap N(v) = \emptyset$.

Fato 2. Para todo $i \in C$, e dois vértices $u, v \in V_i$, tem-se que $N(u) \cap N(v) = \emptyset$. Isto é evidente, pois numa coloração com folga de ordem Δ , não pode existir nenhum vértice com dois vizinhos coloridos com a mesma cor.

Agora, dados $i, j \in C$, com $i \neq j$, e uma aplicação $f: V_i \rightarrow V_j$, construída da seguinte forma: $f(u) = v$, se e somente se $v \in V_j \cap N(u)$. Pelos Fatos 1 e 2, a aplicação acima, além de bem definida, é uma bijeção, o que acarreta $|V_i| = |V_j|$. As afirmações a) e b) do Teorema 4.5 são consequências diretas deste resultado. ■

Teorema 2. (Friedmann *et al.*, 2011). *Sejam $G(V, E)$ um grafo e $c: V \rightarrow C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \Delta + 1$, uma coloração com folga de ordem Δ dos vértices de G . Então, existe uma coloração total de G com no máximo $k + 1$ cores.*

Prova. Sejam $H_k(V', E')$ o grafo completo de ordem k , e $c': V' \cup E' \rightarrow C' = \{1, 2, \dots, k + 1\}$ uma coloração total de H_k . Identificamos cada vértice de H_k com a cor associada a ele pela coloração c' e utilizamos as cores $1, 2, 3, \dots, k$, para colorir os vértices de H_k . Definimos a aplicação $f: V \rightarrow V'$ $f(u) = i$ onde i é o vértice de H_k , tal que $c(u) = c'(i) = i$ e uma coloração total $\bar{c}: V \cup E \rightarrow C'$, tal que para todo vértice $u \in V$, $\bar{c}(u) = c(u) = c'(i) = i$ e para cada aresta $uv \in E$, $\bar{c}(uv) = c'(f(u)f(v))$. Observe que a coloração assim definida é própria, pois se duas arestas uv e uv' são incidentes em u , então $c(v) \neq c(v')$. Consequentemente $f(v) \neq f(v')$ e como $c'(f(u)f(v)) \neq c'(f(u)f(v'))$, então $\bar{c}(uv) \neq \bar{c}(uv')$. Por outro lado, se uma aresta $uv \in E$ é incidente no vértice $v \in V$, então $c'(f(v)) \neq c'(f(u)f(v))$, e daí $c(u) \neq \bar{c}(uv)$. ■

A coloração total obtida pela técnica utilizada na prova do Teorema 2 é uma **extensão natural de uma coloração com folga de ordem Δ** .

Teorema 3. *Sejam $G(V, E)$ um grafo regular, e $c: V \rightarrow C = \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ uma coloração com folga de ordem Δ . Então, a extensão natural de c a G , é uma coloração total equilibrada.*

Prova. Denotamos por c' a extensão de c em G e por C' o conjunto $\{1, 2, \dots, \Delta + 2\}$. Para cada cor $i \in C'$, E_i é o conjunto das arestas que tem associada a cor i pela coloração c' . A prova será dividida em dois casos:

Caso 1. A cor $\Delta + 2$ não foi usada na coloração total, logo Δ é par. Novamente, alguns fatos são necessários:

Fato 3. Dados $i \in C$ e $v \in V$, com $c(v) \neq i$, existe $e \in E_i$, tal que v é um extremo de e . Como $d(v) = \Delta$, todas as cores $C - \{c(v)\}$ são usadas nas arestas incidentes em v , mas $c(v) \neq i$, logo existe uma aresta incidente em v com a cor i .

Fato 4. Dado $i \in C$, sejam V_i o conjunto dos vértices que tem associada a cor i pela coloração c , $V' = V - V_i$, $G'(V', E')$ o subgrafo de G induzido por V' , e c'' a restrição da coloração c' referente à G' . Como consequência do fato 3, temos que o conjunto E_i das arestas coloridas com a cor i pela coloração c'' é um emparelhamento perfeito de G' .

Pelos Fatos 3 e 4, cada cor $i \in C$ é usada exatamente $\frac{|V - V_i|}{2}$ vezes nas arestas, o que prova que a coloração é equilibrada.

Caso 2. A cor $\Delta + 2$ foi usada, logo Δ é ímpar.

Fato 5. Para todo vértice $u \in V$, existe uma aresta e incidente em v com a cor $\Delta + 2$. Para provar este fato, basta lembrar que para cada vértice $u \in V$, $d_G(u) = d_{H_{\Delta+1}}(f(u)) = \Delta$; onde $H_{\Delta+1}$ é o grafo completo de ordem $\Delta + 1$. De acordo com o Teorema 2, definimos a aplicação $f: V \rightarrow V'$, $f(u) = i$ onde i é o vértice de $H_{\Delta+1}$, tal que $c(u) = c'(i) = i$. Logo, o conjunto de cores usado para colorir as arestas incidentes em u no grafo G , é exatamente o mesmo conjunto usado para colorir as arestas incidentes em $f(u)$ no grafo $H_{\Delta+1}$, onde a cor $\Delta + 2$ aparece em alguma aresta incidente em $f(u)$. Com isso, a cor $\Delta + 2$ é usada $\frac{|V|}{2}$ vezes, uma vez que $|V|$ é par, pois G é regular de grau ímpar.

Por outro lado, cada cor $i \in \{1, \dots, \Delta + 1\}$ é usada nas arestas de $H_{\Delta+1}$ exatamente $\frac{|V|-2}{2}$ vezes, isto é, ela somente não aparece no vértice com a cor i e em um outro vértice qualquer. Denotando por $g(i)$ a cor desse vértice, então uma cor $i \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$, aparece nas arestas de G exatamente $k = \frac{|V| - (|V_i| + |V_{g(i)}|)}{2}$ vezes, mas $|V_i| = |V_{g(i)}|$, logo $k = \frac{|V| - (2|V_i|)}{2}$, e como $|V_i| = \frac{|V|}{\Delta+1}$ segue que $|V| - 2|V_i| = |V| - 2 \frac{|V|}{\Delta+1} = \frac{(\Delta-1)|V|}{\Delta+1}$, de onde $k = \frac{(\Delta-1)|V|}{2(\Delta+1)}$, temos agora que na coloração total a cor i aparece:

$$\frac{|V|}{\Delta+1} + \frac{(\Delta-1)|V|}{2(\Delta+1)} = \frac{1}{\Delta+1} \left(|V| + \frac{(\Delta-1)|V|}{2} \right) = \frac{1}{\Delta+1} \frac{(\Delta+1)|V|}{2} = \frac{|V|}{2}$$

vezes, logo a coloração é equilibrada. ■

Pretendemos mostrar que é possível gerar uma família de grafos regulares, suficientemente grande, que podem ser coloridos de forma total e equilibrada com $\Delta + 2$ cores. Para tal, definimos o produto funcional de grafos e grafo k -suporte.

5. Produto Cartesiano de Digrafos

Na década de 60, o **Produto Cartesiano de Dois Grafos** G e H , denotado por $G \square H$, foi definido por Sabidussi (1960) e Vizing (1963). É o grafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $V(G) \times V(H)$ e dois vértices (u, v) e (u', v') são adjacentes se, e somente se,

- (i) $u = u'$ e a aresta $vv' \in E(H)$ ou
- (ii) $v = v'$ e a aresta $uu' \in E(G)$.

O **produto cartesiano de dois digrafos** \vec{G} e \vec{H} pode ser encontrado em Siqueira (2011); é o digrafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $V(\vec{G}) \times V(\vec{H})$. Dois vértices (u, v) e (u', v') são adjacentes se, e somente se, uma das afirmativas abaixo for verdadeira:

- (i) $u = u'$ e o arco $vv' \in E(\vec{H})$
- (ii) $u = u'$ e o arco $v'v \in E(\vec{H})$
- (iii) $v = v'$ e o arco $uu' \in E(\vec{G})$
- (iv) $v = v'$ e o arco $u'u \in E(\vec{G})$.

A Figura 1 mostra um produto cartesiano entre dois digrafos:

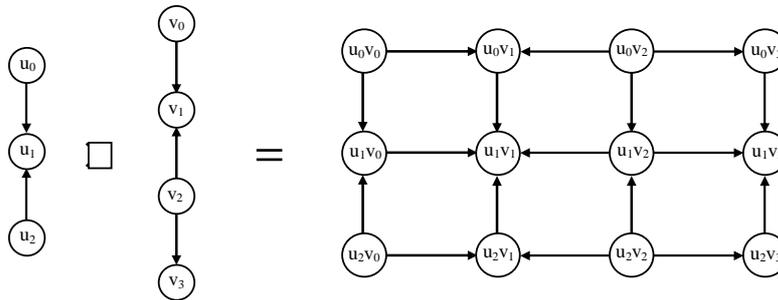


Figura 1. Produto cartesiano entre dois digrafos.

6. Produto Funcional de Grafos

A seguir, apresentamos dois novos conceitos: **produto funcional de grafos e de digrafos**. Para melhor entendimento desta seção, algumas definições iniciais se fazem necessárias. Dado um grafo $G(V, E)$, denotamos por $D(G)$ o digrafo obtido pela substituição de cada aresta $\{u, v\}$ pelos arcos (u, v) e (v, u) . Representamos por \mathcal{D} o conjunto de todos os digrafos que satisfazem a seguinte condição: (u, v) é um arco do digrafo se, e somente se, (v, u) também é um arco do digrafo, ou seja, um digrafo G' pertence a \mathcal{D} se e somente se $G' = D(G)$, para algum grafo G . Dado um digrafo $\bar{G}(V, E) \in \mathcal{D}$, $G(\bar{G})$ será o grafo obtido pela substituição de cada par de arcos $(u, v) \in E$ e $(v, u) \in E$ pela aresta $\{u, v\}$. Dado um conjunto finito C , denotamos por $F(C)$ o conjunto de todas as bijeções em C . Por exemplo, seja $C = \{1, 2, 3\}$; $F(C)$ pode ser descrito através do conjunto $F(C) = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$, onde $g_i, i = 1, \dots, 6$, representa cada bijeção em C . A Figura 2 ilustra essas bijeções:

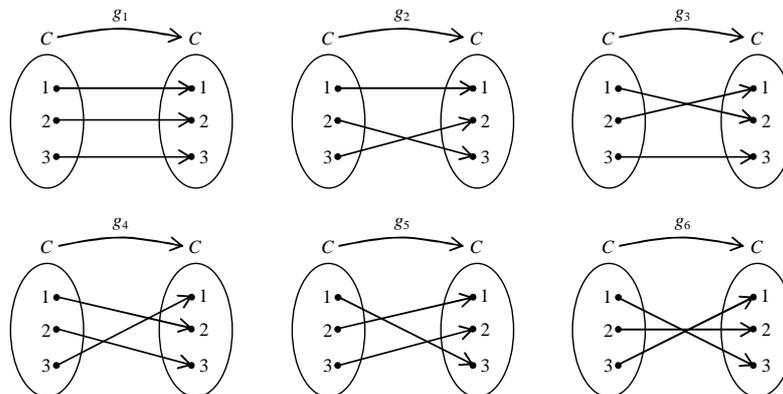


Figura 2. Bijeções em C .

Os digrafos $\bar{G}_1(V_1, E_1)$ e $\bar{G}_2(V_2, E_2)$ são ditos **funcionalmente ligados** pelas aplicações $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$, se f_1 e f_2 são tais que:

- (i) Se $(u, v) \in E_1$ e $(v, u) \in E_1$ então $f_1((u, v)) = (f_1((v, u)))^{-1}$
- (ii) Se $(x, y) \in E_2$ e $(y, x) \in E_2$ então $f_2((x, y)) = (f_2((y, x)))^{-1}$

(iii) Se $(u, v) \in E_1$ e $(x, y) \in E_2$ então $f_2((x, y))(u) \neq v$ ou $f_1((u, v))(x) \neq y$.

As aplicações f_1 e f_2 são denominadas **aplicações de ligação**.

Sejam $\bar{G}_1(V_1, E_1)$ e $\bar{G}_2(V_2, E_2)$ digrafos funcionalmente ligados pelas aplicações $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$. O **produto funcional dos digrafos** \bar{G}_1 e \bar{G}_2 , segundo as aplicações f_1 e f_2 , representado por $(f_1, \bar{G}_1) \times (f_2, \bar{G}_2)$, é o digrafo $\bar{G}^*(V^*, E^*)$ definido por:

- (i) $V^* = V_1 \times V_2$
- (ii) $((u, x), (v, y)) \in E^*$ se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:
 - (a) $(u, v) \in E_1$ e $y = f_1((u, v))(x)$
 - (b) $(x, y) \in E_2$ e $v = f_2((x, y))(u)$.

Como exemplo, a Figura 3 mostra os digrafos $\bar{G}_1(V_1, E_1)$ e $\bar{G}_2(V_2, E_2)$ ligados pelas bijeções f_1 e f_2 , definidas por $f_1(x) = g_2$, para todo arco $x \in E_1$, e $f_2(x) = g_1$, para todo $x \in E_2$.

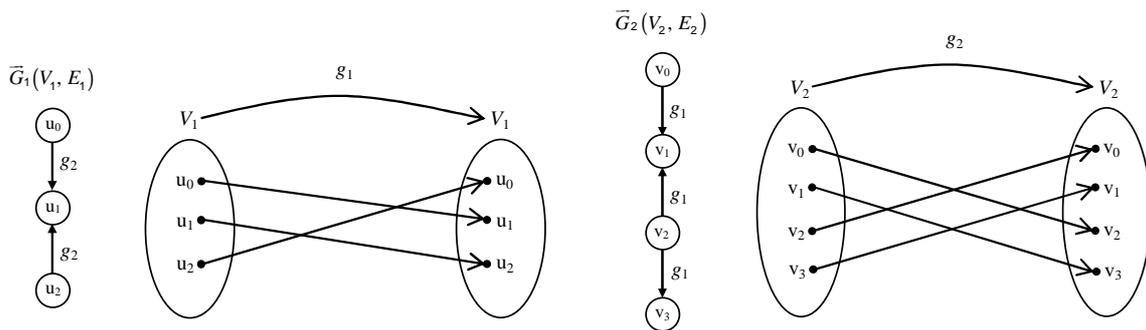


Figura 3. Digrafos \bar{G}_1 e \bar{G}_2 ligados pelas bijeções f_1 e f_2 .

A Figura 4 mostra o produto funcional dos digrafos $\bar{G}_1(V_1, E_1)$ e $\bar{G}_2(V_2, E_2)$, segundo as funções $f_1: E_1 \rightarrow F(V_2)$ e $f_2: E_2 \rightarrow F(V_1)$:

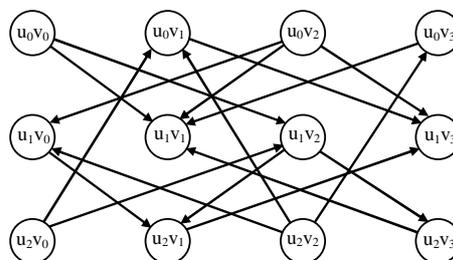


Figura 4. Produto funcional entre os digrafos \bar{G}_1 e \bar{G}_2 , segundo f_1 e f_2 .

7. Grafo k -Suporte

A seguir, apresentamos a definição de grafo k -suporte. Este grafo, que é regular, é utilizado como gerador de uma família de grafos regulares que podem ser coloridos total e equilibradamente com no máximo $\Delta + 2$ cores. Antes, porém definimos uma rotação em um conjunto finito.

Dado um conjunto finito $A = \{x_0, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma **rotação em A** é uma bijeção $f: A \rightarrow A$, tal que $f(x_i) = x_{k+i \pmod{n}}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, onde k é um valor prefixado do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Denotamos por r_k a rotação cuja imagem do elemento x_0 é x_k .

Seja C_k um ciclo de comprimento k . Um grafo $G(V, E)$ é um **k -suporte** se satisfaz as seguintes condições:

- (i) G é um grafo regular de grau $k - 3$;
- (ii) Existem aplicações $f_1: E(D(G)) \rightarrow F(V(C_k))$ e $f_2: E(D(C_k)) \rightarrow F(V)$, tais que G e C_k estão funcionalmente ligados por f_1 e f_2 ;
- (iii) O grafo $G^* = (f_1, G) \square (f_2, C_k)$ pode ser colorido com folga $\Delta(G^*)$ com $\Delta(G^*) + 1$ cores.

8. Relação entre Grafo k -Suporte e Coloração Total Equilibrada em Grafos Regulares

Nesta seção, apresentamos três teoremas que têm como objetivo mostrar que, a partir dos grafos k -suporte, é possível gerar subfamílias de grafos regulares que podem ser coloridas total e equilibradamente com, no máximo $\Delta + 2$ cores.

Teorema 4. Se $G(V, E)$ é um grafo k -regular de classe 1^b , então G é $(k + 3)$ -suporte.

Prova. Sejam $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V(C_{k+3}) = \{u_0, u_1, \dots, u_{k+2}\}$, $C = \{2, 3, 4, \dots, k + 1\}$, e $c: E \rightarrow C$, uma coloração de arestas de G . A prova será dividida em dois casos:

Caso 1. $k = \Delta(G)$ é par:

Observe que $\left(\frac{k}{2} + 1\right) + \left(\frac{k}{2} + 2\right) = k + 3$. Denote por i' o simétrico aditivo de $i \pmod{(k + 3)}$ dado

por $i' = (k + 3) - i$, para todo $i \in \left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k}{2} + 1\right)\right\}$. Para cada $\{i, i'\}$, o subgrafo $G_i(V_i, E_i)$

induzido pelo conjunto das arestas $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$ é um grafo regular de grau 2 em que $V = V_i$. Logo, as componentes conexas de cada subgrafo G_i são ciclos G_{i1}, \dots, G_{it_i} , $t_i \in \mathbb{N}$,

$t_i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, onde cada ciclo G_{ij} está associado a dois ciclos orientados \vec{G}_{ij}^1 e \vec{G}_{ij}^2 em $D(G)$.

Definem-se as aplicações $f_1: E(D(G)) \rightarrow V(C_{k+3})$ e $f_2: E(D(C_{k+3})) \rightarrow V$ como segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} r_i & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^1); i \in \left\{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\right\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \\ r_{i'} & \text{se } x \in E(\vec{G}_{ij}^2); i \in \left\{2, 3, \dots, \frac{k}{2} + 1\right\}; j \in \{1, 2, \dots, t_i\} \end{cases}$$

$f_2(x) = Id$, para todo arco $x \in D(C_{k+3})$, onde Id representa a função identidade.

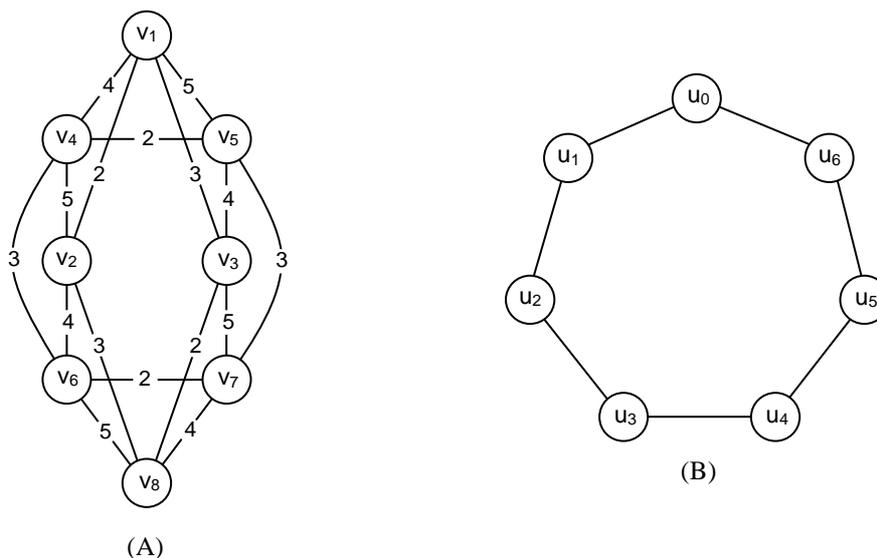
^b Dizemos que um grafo é de **classe 1** se admite uma coloração própria de arestas com Δ cores.

Seja $G^* = (f_1, G) \square (f_2, C_{\Delta+3})$, $V^* = V(G^*)$, $E^* = E(G^*)$. É fácil ver que o grafo G^* é um grafo regular de grau $\Delta(G) + \Delta(C_{\Delta+3}) = k + 2$. Defina a coloração $f: V^* \rightarrow \{0, 1, \dots, (k + 2)\}$ tal que $f((v_i, u_j)) = j$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, (k + 2)$. Observe que f é uma coloração com folga $\Delta(V^*)$ com as $\Delta(V^*) + 1$ cores do grafo G^* . Para verificar esse fato, veja que por simetria, basta analisar um vértice qualquer de V^* , por exemplo, (v_1, u_0) . No grafo G , seja a vizinhança de v_1 dada pelo conjunto $\{x_2, \dots, x_{k+1}\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $f((v_1, x_j)) = j$, $j \in \{2, \dots, k + 1\}$, então os extremos dos arcos de $(f_1, \vec{G}) \square (f_2, \vec{C}_{\Delta+3})$, que têm como origem (v_1, u_0) , são (v_1, u_1) , (v_1, u_{k+2}) , (x_2, u_2) , (x_3, u_3) , (x_4, u_4) , ..., (x_{k+1}, u_{k+1}) coloridos com as “cores” $1, k + 2, 2, 3, \dots, k + 1$, respectivamente. Logo, a coloração possui folga Δ .

Caso 2. $k = \Delta(G)$ é ímpar:

Observe que $\left(\frac{k-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{k+3}{2} + 1\right) = \left(\frac{k+1}{2} + 1\right) + \left(\frac{k+1}{2} + 1\right) = k + 3$. Denote por i' o simétrico aditivo de $i \pmod{(k + 3)}$ dado por $i' = (k + 3) - i$, para todo $i \in \left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k+1}{2} + 1\right)\right\}$. O subgrafo $G_i(V_i, E_i)$ induzido pelo conjunto da arestas $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\}$, $i \in \left\{2, 3, \dots, \left(\frac{k-1}{2} + 1\right)\right\}$ é um grafo regular de grau 2, e o subgrafo G_a , com $a = \frac{k+1}{2} + 1$, induzido pelo conjuntos de arestas $\left\{e \in E: c(e) = \frac{k+1}{2} + 1\right\}$ é um emparelhamento perfeito, e o raciocínio seguido no caso 1 é válido, o que prova o teorema. ■

A Figura 5 ilustra algumas etapas do Teorema 4 para o caso em que $k = \Delta(G) = 4$. A Figura 5(A) mostra um grafo G 4-regular de classe 1, onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$, enquanto na Figura 5(B) tem-se um ciclo de comprimento 7, C_7 , com $V(C_7) = \{u_0, u_1, \dots, u_6\}$.



A Figura 5(C) mostra o início do processo de coloração com folga 6 com 7 cores do grafo $G^* = (f_1, G) \square (f_2, C_7)$:

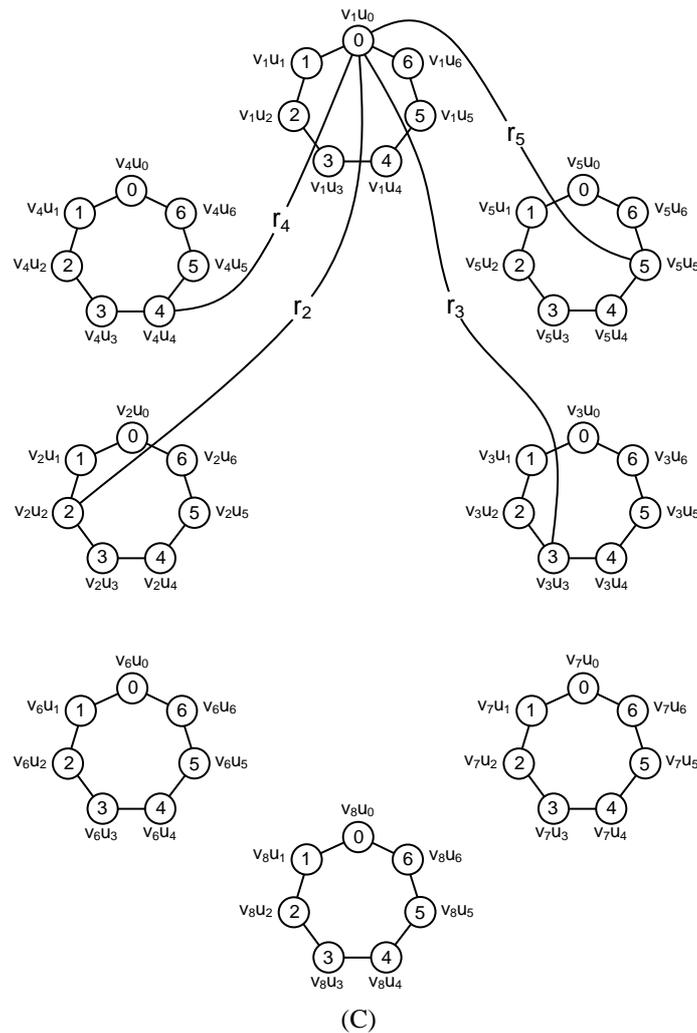


Figura 5. Etapas do processo de coloração com folga 6 com 7 cores do grafo $G^* = (f_1, G) \square (f_2, C_7)$.

Teorema 5. Se $G(V, E)$ é um grafo completo, então G é um $(|V| + 2)$ -suporte.

Prova. Seja $G(V, E) = K_n$. Se n é par então G é de classe 1 e o teorema está provado. Vamos supor que n é ímpar. Sejam $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e $c: E \rightarrow C = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ uma coloração de arestas de G definida por $c(v_i, v_j) = \frac{(n+1)}{2}(i+j)(\text{mod } n)$; $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; $i \neq j$. É claro

que c é própria, pois fixando $i_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, temos que $\frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_0) \equiv \frac{(n+1)}{2}(i_0 + j_1)(\text{mod } n)$ se, e somente se, $j_0 \equiv j_1 (\text{mod } n)$. A coloração c acima definida possui a

seguinte propriedade: se a cor $s \in C$, $s \neq 0$, está ausente no vértice v_{i_0} e $c(\{v_{i_0}, v_{i_1}\}) = 0$ então a cor s' , tal que s' é o inverso aditivo de $s (\text{mod } n)$, está ausente no vértice v_{i_1} . Usaremos essa propriedade na demonstração. Em K_n , observe inicialmente que para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, a cor i está ausente nas arestas incidentes no vértice v_i . Denotemos por e_i a aresta $\{v_i, v_{i'}\}$, sendo i'

o inverso aditivo de $i \pmod n$. Agora, para cada par de cores $\{i, i'\}$, $i \in \left\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$, o subgrafo gerado pelo conjunto de arestas $\{e \in E: c(e) = i \text{ ou } c(e) = i'\} \cup \{e_i\}$ é um grafo regular de grau 2, logo temos $\frac{n-1}{2}$ ciclos que correspondem a $n-1$ ciclos orientados. Para cada $i = 2, \dots, n$, definimos i' tal que $i' = n + 2 - i$. Para cada par de ciclos orientados atribuímos aos seus arcos, num sentido, a rotação r_i e no outro, a rotação $r_{i'}$, a fim de construirmos o produto funcional de K_n por C_{n+2} segundo as aplicações $f_1: E(D(K_n)) \rightarrow V(C_{n+2})$ e $f_2: E(D(C_{n+2})) \rightarrow V$, conforme elas foram definidas na demonstração do Teorema 4. ■

A Figura 6 abaixo mostra a coloração total equilibrada de um grafo 5-suporte gerado a partir de um K_3 :

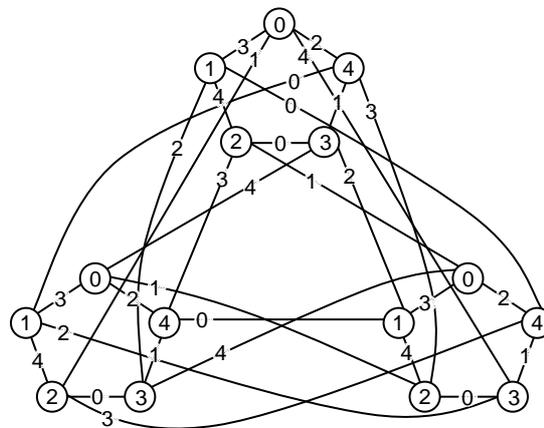


Figura 6. Coloração total equilibrada de um grafo 5-suporte gerado a partir de um K_3 .

O Teorema 6, enunciado e provado abaixo, mostra que é sempre possível gerar novos grafos regulares que sejam coloridos total e equilibradamente com, no máximo, $\Delta + 2$ cores.

Teorema 6. Se $G(V, E)$ é um k -suporte então $(f_1, G) \square (f_2, C_k)$ é um $(k + 2)$ -suporte, onde $f_1: E(D(G)) \rightarrow F(V(C_k))$ e $f_2: E(D(C_k)) \rightarrow F(V)$ são as aplicações de ligação entre G e C_k .

Prova. Note que se $G(V, E)$ é um k -suporte então $(f_1, G) \square (f_2, C_k)$ pode ser colorido com folga Δ com $\Delta + 1$ cores. Pelos Teoremas 1, 2 e 3, existe uma coloração total equilibrada de $(f_1, G) \square (f_2, C_k)$ com no máximo $\Delta + 2$ cores e, conseqüentemente, existe uma coloração de arestas própria. Para concluir a prova, basta usarmos esta coloração de arestas para gerar as rotações r_i e $r_{i'}$, juntamente com o raciocínio utilizado no Teorema 4. ■

9. Conclusões

Os resultados apresentados neste texto mostram que o produto funcional permite construir grafos que podem ser coloridos total e equilibradamente com, no máximo, $\Delta + 2$ cores e que podem servir como suporte para redes de interconexão, bastando para isso escolher grafos k -regulares de classe 1.

10. Bibliografia

Bondy, J. A., Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, New York, North-Holland, 1976.

Diestel, R., *Graph theory*, New York, Springer-Verlag, 1997.

Friedmann, C. V. P., Markenzon, L., Lozano, A. R. G., Waga, C. (2011), Total Coloring of Block-Cactus Graph, *JCMCC Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, vol 78, pp. 273-283.

Hajnal, A., Szemerédi, E. (1970), Proof of a conjecture of P. Erdős, *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, North-Holland, pp. 601-623.

Lozano, A. R. G., Coloração total equilibrada de grafos, *Tese de Doutorado em Engenharia de Produção*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

Lozano, A. R. G., Friedmann, C. V. P., Jurkiewicz, S. (2008), Coloração Total Equilibrada – Um Modelo para Redes de Interconexão, *Pesquisa Operacional*, v.28, n.1, pp.161-171.

Lozano, A. R. G., Friedmann, C. V. P., Waga, C., Markenzon, L. (2009), Coloração de Vértices com Folga, In: *XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, pp. 3084-3091.

Lozano, A. R. G., Friedmann, C. V. P., Siqueira, A. S. (2011), Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada, *Almanaque Unigranrio de Pesquisa*, v.1, pp. 103-106.

Sabidussi, G., (1960), Graph multiplication, *Math. Z.*, 72, pp. 446-457.

Siqueira, A. S., Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares, *Tese de Doutorado em Engenharia de Produção*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

Vizing, V. G., (1963), The Cartesian product of graph, *Vyc. Sis.*, 9, pp. 30-43.

Yap, H. P., *Some topics in graph theory*, London, Cambridge University Press, 1986.

Yap, H. P., *Total colorings of graphs*, Berlin, Springer, 1996.