ALGORITMO DETERMINÍSTICO PARA RESOLVER EL PROBLEMA DEL TOUR ABIERTO DEL CABALLO SOBRE TABLEROS DE AJEDREZ $n \times n$

Deterministic Algorithm to solve the open knight's tour problem on square chessboards

David Álvarez-Martínez
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – São Paulo – Brasil
david.unesp@gmail.com

Rubén Augusto Romero Lázaro
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – São Paulo – Brasil
ruben.feis@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presenta un algoritmo determinístico para encontrar el tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez de tamaño $n \times n$ (con $n \geq 5$), iniciando desde cualquier casilla (si n es par) e iniciando solo desde casillas blancas si n es impar. La metodología propuesta implementa la regla de Warnsdorff y en el momento de desempate entre varios candidatos usa las propiedades especiales del grafo del caballo sobre el tablero. Como primer criterio de desempate utiliza la cercanía a las esquinas del tablero, como segundo criterio, la cercanía a uno de los lados (paredes) del tablero y por último, para asegurar un comportamiento determinístico usa un orden especifico de los movimientos del caballo.

PALABRAS CLAVE. Tour abierto del caballo, regla de Warnsdorff, Camino Hamiltoniano

ABSTRACT

In this work is presented a deterministic algorithm for finding open knight's tour on square chessboards of size $n \times n$ (where $n \geq 5$), starting from any square (if n is even) and starting just from white squares if n is odd. The proposed methodology used the Warnsdorff's rule and for tiebreaking between several squares employed the special properties of the knight's graph on square chessboards. The first tiebreaker used is the minor distance to the corners of the chessboard, the second criterion is the proximity to one of the sides (walls) of the chessboard and finally, to ensure a deterministic behavior is used a specific order of the movements of the knight.

KEYWORDS. Open Knight's tour, Warnsdorff's rule, Hamiltonian Path

TAG - Theory and Algorithms in Graphs

1. Introducción

El problema del tour de caballo de ajedrez es un rompecabezas antiguo, el cual consiste en visitar exactamente una vez todas las casillas del tablero a través de movimientos legales del caballo (ver figura 1). El tour del caballo es llamado cerrado si desde la última casilla visitada se puede alcanzar la casilla inicial, de lo contrario es llamado tour abierto. Es acreditado a (Euler, 1766) el inicio del estudio formal sobre este problema.

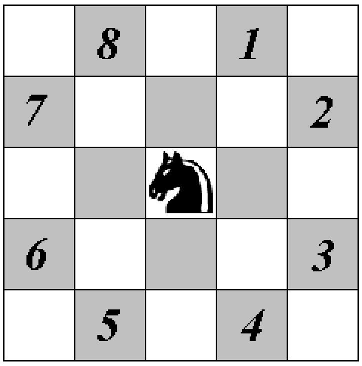

Figura 1. Movimientos legales del caballo de ajedrez (es el resultado de mover el caballo a través de dos casillas horizontalmente o verticalmente y después girarlo y avanzar una casilla).

Formalmente, el problema del tour abierto y cerrado del caballo representan los famosos problemas del camino y circuito Hamiltoniano de un grafo, respectivamente. (Garey and Johnson, 1979) demostraron que los problemas del camino y circuito Hamiltoniano de un grafo pertenecen a la categoría de problemas NP-Completo. (Dudeney, 1970) señala que en un tablero $n \times n$ existe tour abierto del caballo si y solo si $n \geq 5$ (y si n además es par existe tour cerrado), sin prueba alguna, esto es aceptado por la comunidad de pesquisa en esta temática. No es seguro si el problema del tour del caballo sea NP-Completo debido al gran número de algoritmos de solución de orden polinomial propuestos en la literatura (Conrad *et al*., 1994; Cull and Curtis., 1978; Squirrel and Cull, 1996). Por tanto, los problemas del tour abierto y cerrado del caballo son referenciados como casos especiales de los problemas del camino y circuito Hamiltoniano de un grafo (sobre un grafo del caballo, ver figura 2).

El grafo del caballo se obtiene al reemplazar la definición de movimientos legales del caballo por casillas adyacentes (o nodos adyacentes, donde un nodo puede ser representado como un par ordenado (i, j) siendo i y j el número de la fila y columna correspondientemente). Por tanto, dos casillas son adyacentes si desde una se puede alcanzar a la otra a través de un movimiento legal del caballo. Formalmente un nodo (a, b) es adyacente a un nodo (c, d) si y solo si $1 \leq a, b, c, d \leq n$ y $(c, d) \in \left\{ \begin{matrix} (a-2, b+1), (a-1, b+2), (a+1, b+2), (a+2, b+1), \\ (a+2, b-1), (a+1, b-2), (a-1, b-2), (a-2, b-1) \end{matrix} \right\}$.

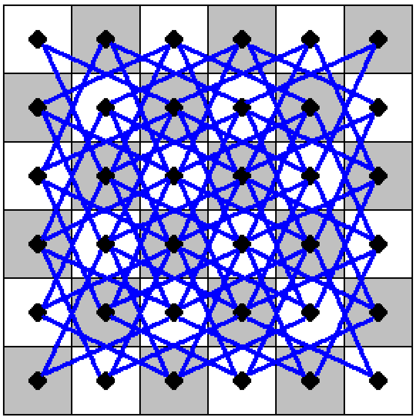

Figura 2. Grafo del caballo de ajedrez sobre un tablero 6×6, las diferentes casillas (nodos) son unidos a través de las aristas representadas por los movimientos legales del caballo.

Diferentes metodologías de solución han sido propuestas. Algunas intuitivas y fáciles de implementar que en problemas de pequeño porte son rápidas, pero cuando el tamaño del tablero aumenta el tiempo computacional necesario ya no es razonable o en algunos casos solo funcionan para tamaños especiales del tablero (Euler, 1766; Roget, 1840; Moon, 1843; Jaenisch, 1862-3). (Ball and Coxeter, 1974) describen los métodos de solución propuestos por (Euler, 1766; Roget, 1840; Moon, 1843). Una característica interesante de estas soluciones es que no dependen de la casilla inicial.

Por otro lado, existen propuestas robustas más complejas. (Parberry, 1996) combina la heurística de (Warnsdorff, 1823) con el algoritmo de pisadas aleatorias de (Euler, 1766), obteniendo poco desempeño, en este la casilla inicial es restringida a una de las esquinas del tablero. (Roth, -) propone una regla de desempate para la heurística de Warnsdorff que consiste en escoger el vecino más alejado del centro del tablero. (Roth, -) señala que su algoritmo falla por primera vez al resolver un tablero de $428x428$. (Roth, -) también limita la casilla inicial a ser una de las esquinas. (Pohl, 1967) considera aplicar dos veces la regla de Warnsdorff para eliminar empates, además de esto, incluye un procedimiento de *backtracking* si su algoritmo falla, el desempeño de su algoritmo se reduce con al aumentar el tamaño del tablero, debido a que el *backtracking* se convierte computacionalmente caro. (Squirrel and Cull, 1996) definen una regla de desempate para la heurística de Warnsdorff, basada en puntos de giro y ordenamiento de los movimientos del caballo. (Squirrel and Cull, 1996) señalan que para tableros con $n \leq 112$ su algoritmo falla, además de esto, la casilla de inicio está limitada a ser una esquina del tablero. (Ganzfried, 2004) corrige el algoritmo de (Squirrel and Cull, 1996) obteniendo un algoritmo más consistente. Ganzfried encuentra casos particulares donde los algoritmos de (Roth, - ; Pohl, 1967; Squirrel and Cull, 1996) fallan. En sus experimentos realizados su algoritmo solo falla para un tablero con $n = 74$. Al igual que (Squirrel and Cull, 1996) la casilla inicial es fijada en una de las esquinas del tablero.

(Cull and Curtis., 1978; Schwenk, 1991; Conrad et al., 1994) presentan elegantes algoritmos de dividir y conquistar, los cuales consisten en definir casos base y extrapolar estos para cualquier tamaño del tablero, lamentablemente si la casilla inicial no es una esquina del tablero se tendría que definir de nuevos los casos base (lo cuales son la magia de estos métodos de solución). (Takeji and Lee, 1992; Parberry, 1996) utilizan redes neuronales para resolver el problema, obteniendo resultados satisfactorios en problemas de pequeño porte.

En este artículo se presenta un algoritmo que emplea una regla de desempate basada en la particularidad de las esquinas del tablero, para el uso de la heurística de Warnsdorff. Este algoritmo es desarrollado para encontrar tours abiertos del caballo sobre tableros de ajedrez $n \times n$ (con $n \geq 5$), teniendo como casilla inicial cualquiera del tablero. La estructura de este trabajo es la siguiente: descripción del problema, metodología de solución, análisis de resultados y conclusiones.

2. Descripción del problema

Formalmente el tour abierto del caballo consiste en encontrar un camino Hamiltoniano sobre un grafo del caballo de ajedrez. Este grafo en particular presenta las siguientes características (ver figura 3):

- El número de nodos es $n \times n$
- El número de aristas es $4(n-1)(n-2)$ para $n \geq 5$
- El menor grado de un nodo es 2 (esquinas) y el mayor es 8 (casillas del centro)

2	3	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	3	2

Figura 3. Grados de cada casilla (nodo) del tablero 7×7.

La prueba de que siempre existe un tour abierto del caballo en un tablero $n \times n$ ($n \geq 5,\ n$ siendo par), iniciando desde cualquier casilla, es una consecución de la afirmación realizada por (Dudeney, 1970), "*en un grafo del caballo sobre un tablero $n \times n$ ($n \geq 5,\ n$ siendo par) siempre existe un circuito Hamiltoniano*". Lo que implica que iniciando desde cualquier nodo (casilla) existe un camino Hamiltoniano (tour abierto del caballo).

Por otro lado, una prueba formal para un tablero $n \times n$ ($n \geq 5,\ n$ siendo impar), no es presentada en la literatura, pero sabiendo que $n \times n$ es impar y qué cada vez que hay un movimiento del caballo la casilla siguiente es de color contrario, se puede deducir que si existe un tour abierto del caballo este solo puede existir si la casilla de inicio es de color blanca. La función de color de las casillas para tableros de ajedrez es definida como (ver figura 4):

$ColorCasilla(i,j) = blanca$, si $i + j$ es par

$ColorCasilla(i,j) = negra$, si $i + j$ es impar

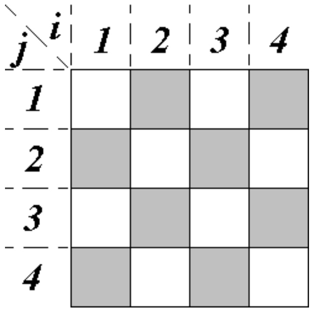

Figura 4. Tablero 4×4 coloreado.

El problema del tour abierto del caballo consiste en encontrar el orden en que se deben visitar las casillas, de tal forma que, todas las casillas del tablero sean visitadas exactamente solo una vez. La representación de una solución en literatura normalmente es hecha a través de un gráfico (directamente sobre el tablero marcando sobre la casilla su correspondiente momento en que debe ser visitada, ver figura 5.a) o en un vector (donde los elementos del vector indican la casilla a visitar y los índices del vector el momento exacto, ver figura 5.b).

3. Metodología de Solución

La heurística presentada por (Warnsdorff, 1823) es un procedimiento simple e intuitivamente parece una regla lógica, la idea consiste en visitar primero los nodos con menos aristas con el fin de evitar nodos insolados y así no obtener caminos sin salida. Formalmente la regla de Warnsdorff puede ser enunciada como:

Sea $(m + 1)$-esima casilla si esta casilla

1. es alcanzable legalmente desde la m-esima casilla,
2. aún no ha sido visitada y
3. es la casilla con el menor número de posibles jugadas (número de casillas adyacentes que aún no han sido visitadas).

Podrán haber más de una casilla que cumpla con las tres condiciones anteriores, en este caso una es escogida al azar, en caso que ninguna casilla satisfaga las restricciones el tour ha llegado a su fin.

13	40	3	34	15	36	5
2	47	14	39	4	33	16
41	12	1	46	35	6	37
48	29	42	23	38	17	32
11	26	49	30	45	20	7
28	43	24	9	22	31	18
25	10	27	44	19	8	21

a. Solución gráfica sobre el tablero

17	8	3	12	7	20	35	48	39	44	29	16	···
1	10	5	14	27	42	47	34	49	40	25	38	···
43	30	45	36	23	32	41	28	13	4	19	6	···
21	26	11	2	15	24	37	46	33	18	9	22	31

b. Solución representada en vector

Figura 5. Solución del tour abierto del caballo para un tablero de tamaño 7×7 iniciando desde la casilla (3, 3) o la casilla 17 (enumerando las casillas usando la formula $NúmeroCasilla(i, j) = n(i - 1) + j$).

Infelizmente la heurística de Warnsdorff no garantiza un tour completo, además de no ser un algoritmo determinístico por su característica para resolver los desempates. Sin embargo, es una regla con un buen desempeño, la cual diferentes autores han intentado sofisticar para así obtener un algoritmo consistente.

Mientras Warnsdorff defendía realizar desempates escogiendo la siguiente casilla al azar, diferentes estudios demuestran que una mala decisión rápidamente impide la conversión del algoritmo. Para esto diferente reglas de desempate han sido desarrolladas, (Pohl, 1967) aplica de nuevo la regla para las casillas que se encuentran en empate, (Roth, -) desempata escogiendo la casilla más alejada del centro, (Squirrel and Cull, 1996; Ganzfried, 2004) desempatan mediante puntos de giros y el ordenamiento de los posibles movimientos. En este trabajo se propone desempatar escogiendo la casilla más cercana a una de las cuatro esquinas (debido a que en la zona de las esquinas se encuentran las casillas más especiales del tablero, ver figura 3), además de esto, como se pueden encontrar de nuevo empates, una segunda condición de desempate se impone escogiendo la casilla más cercana a uno de los cuatro lados (paredes) del tablero (otras casillas especiales, ver figura 3). Esta solución de desempate aún no garantiza que exista un solo candidato que cumplan las tres restricciones de Warnsdoff, además de las dos nuevas condiciones. Por lo tanto, una tercera y última condición es adicionada, esta rompe los empates definiendo el orden de los movimientos del caballo en sentido horario y teniendo como punto de inicio el cuadrante correspondiente a la casilla inicial del tour. Como ejemplo, si la casilla inicial de un tour cualquiera pertenece al segundo cuadrante del tablero, el orden de los movimientos para un tercer desempate sería el ilustrado en la figura 1.

La metodología propuesta explota las propiedades del grafo del caballo formado sobre tablero, el diferente número de desempates desarrollados elimina los elementos aleatorios de los trabajos anteriores, generando así un algoritmo determinístico. El esquema del algoritmo es presentado en la tabla 1.

Paso 1.	Escoja una casilla inicial, si $n \times n$ (el tamaño del tablero) es impar escoja una casilla cuyo color sea blanca, inclúyala al tour y siga al paso 2.
Paso 2.	Pase a la siguiente casilla (la casilla $m+1$) tal que: • sea alcanzable legalmente desde la m-esima casilla • aún no haya sido visitada • es la casilla con el menor número de posibles jugadas Si no existe ninguna casilla que cumpla con las condiciones anteriores, el tour ha terminado. De lo contrario, si existe exactamente una casilla que cumpla las tres condiciones, inclúyala al tour y repita el paso 2 (desde la nueva casilla). De lo contrario, si existe más de una casilla que cumple las condiciones vaya al paso 3.
Paso 3.	De las casillas candidatas pase a la casilla más cercana a cualquiera de las esquinas del tablero. Si existe un empate entre varias casillas pase al paso 4. De lo contrario, incluya la casilla ganadora al tour y regrese al paso 2.
Paso 4.	De las casillas empatadas con menor distancia pase a la casilla más cercana a una de las paredes del tablero. Si existe un empate entre varias casillas pase al paso 5. De lo contrario, incluya la casilla ganadora al tour y regrese al paso 2.
Paso 5.	De las casillas aun empatadas pase a la casilla siguiente dependiendo del orden de los movimientos del caballo en sentido horario y teniendo como punto de inicio el cuadrante correspondiente a la casilla inicial del tour. Solo una casilla puede cumplir está condición, por tanto, inclúyala al tour y regrese al paso 2.

Tabla 1. Esquema del algoritmo propuesto.

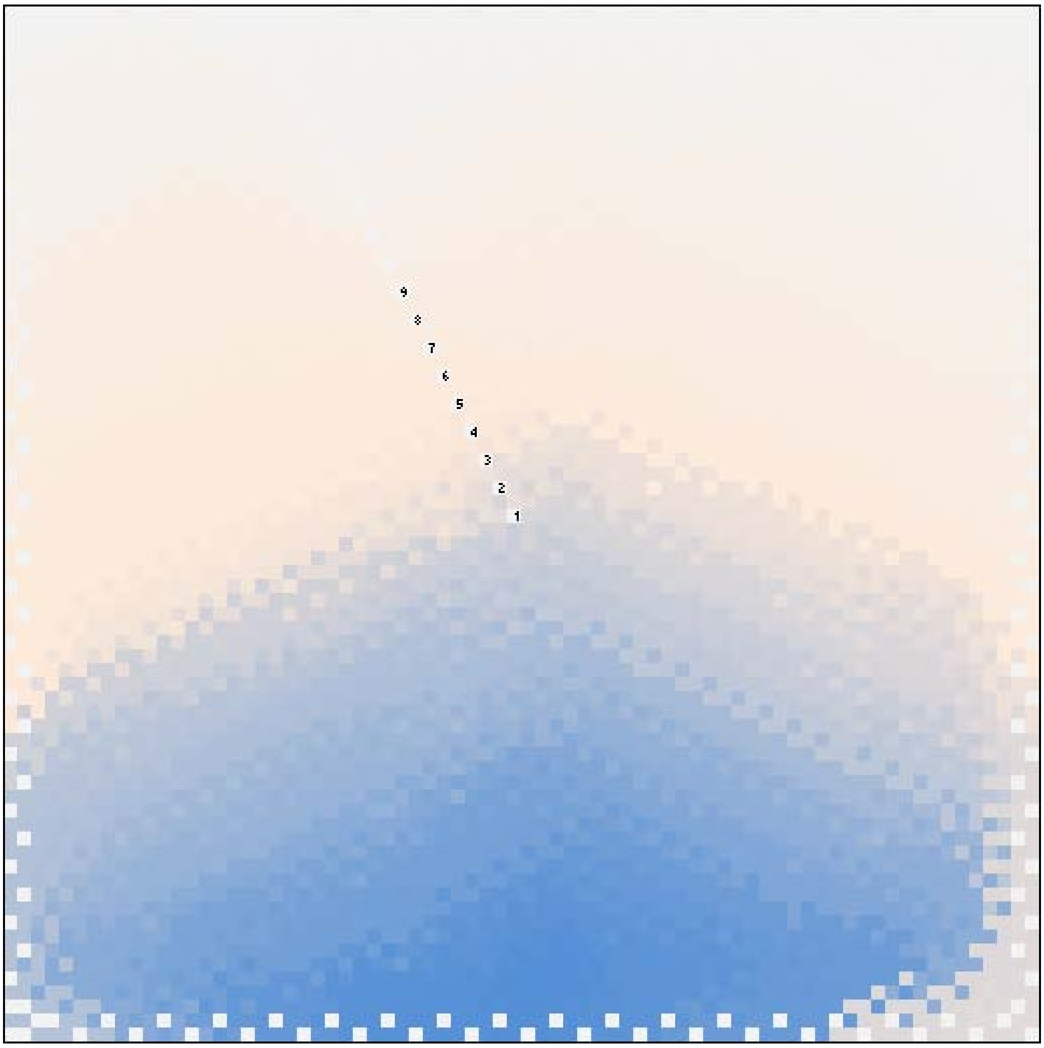

Figura 6. Solución para un tablero74×74 iniciando desde la casilla número 2701.

4. Análisis de Resultados

Diferentes metodologías han intentando resolver el problema, para esto han probado sobre cada tamaño del tablero. (Ganzfried, 2004) probó su algoritmo con tableros de tamaño menor a 610×610, teniendo solo dificultades para el tablero de 74×74 en el cual hace una pequeña modificación a su algoritmo y consigue alcanzar respuesta satisfactoria. Además de esto, señala que los casos $7 \times 7, 8 \times 8, 9 \times 9, 74 \times 74, 113 \times 113$ y 428×428 tienen un estructura especial. (Roth, -) prueba su algoritmo con tableros de tamaño menor a 2000×2000 y señala que su primer error lo encuentra en un tablero de 428×428. Por otro lado, Ganzfried experimenta con el algoritmo de Roth y logra encontrar errores en tableros de menor tamaño. (Squirrel and Cull, 1996) señalan que su algoritmo funciona para cualquier tamaño de tablero si $n \geq 112$. Por otro lado, Ganzfried muestra que este funciona para $n \geq 5$ excepto para $n = 74$, además de esto, Ganzfried indica que la prueba de completitud presentada por (Squirrel and Cull, 1996) está incompleta. Esto significa que nada garantiza que su algoritmo no pueda fallar para tableros de mayor tamaño. Por último, cabe aclarar que todos estos utilizan como casilla inicial una esquina del tablero.

En este estudio fue ejecutado el algoritmo sobre tableros $n \times n$, con $5 \leq n \leq 2000$. Utilizando cada casilla del tablero como casilla inicial (si n es par) y usando solo las casillas blancas como casillas de inicio en el caso cuando n es impar. A diferencia de las metodologías presentadas en la literatura, el trabajo aquí presentado consigue hallar un tour abierto completo para todos diferentes tamaños de tableros usados, iniciando desde cualquier casilla.

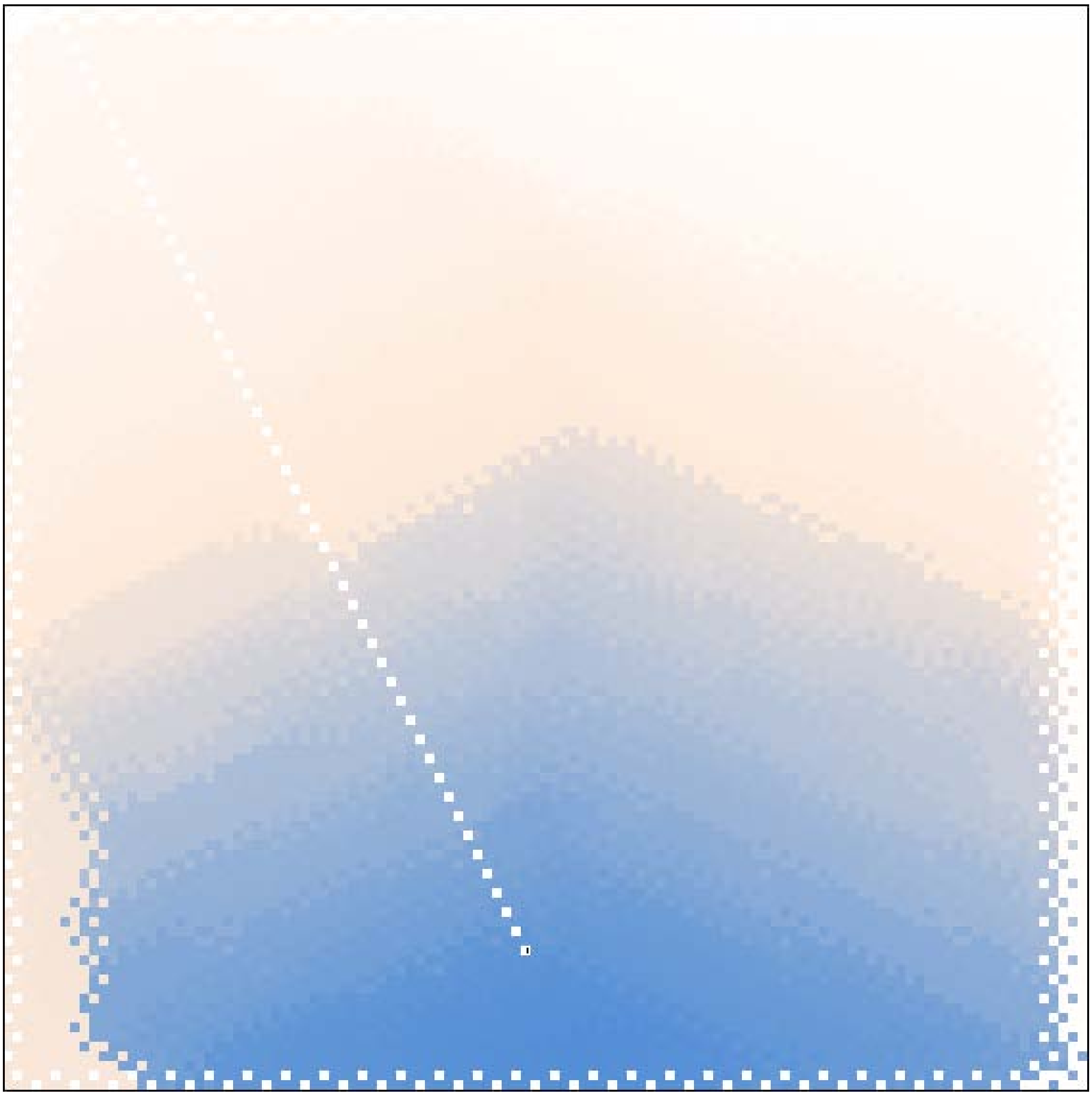

Figura 7. Solución para un tablero de 113×113, con casilla inicial $(98, 55)$.

Una vez publicado este artículo los resultados pueden ser accedidos en: http://www.dee.feis.unesp.br/lapsee/arquivos/down_sistemastestes/knightstour.html. La figura 6 ilustra la solución para un tablero de 74×74 iniciando desde la casilla número 2701 o $(36, 37)$, la figura 7 ilustra la solución para un tablero de 113×113 iniciando desde la casilla número 11129 o $(98, 55)$ y la figura 8 ilustra la solución para un tablero de 428×428 iniciando desde la casilla número 1 o $(1, 1)$. En estas figuras la solución se representa como una evolución (difuminado) del color de la casilla, iniciando desde blanco pasando por un rosado suave hasta llegar a un azul. Por otro lado, cabe anotar que en ningún tamaño del tablero ni desde ninguna casilla de inicio se presentaron irregularidades como las señaladas por (Ganzfried, 2004).

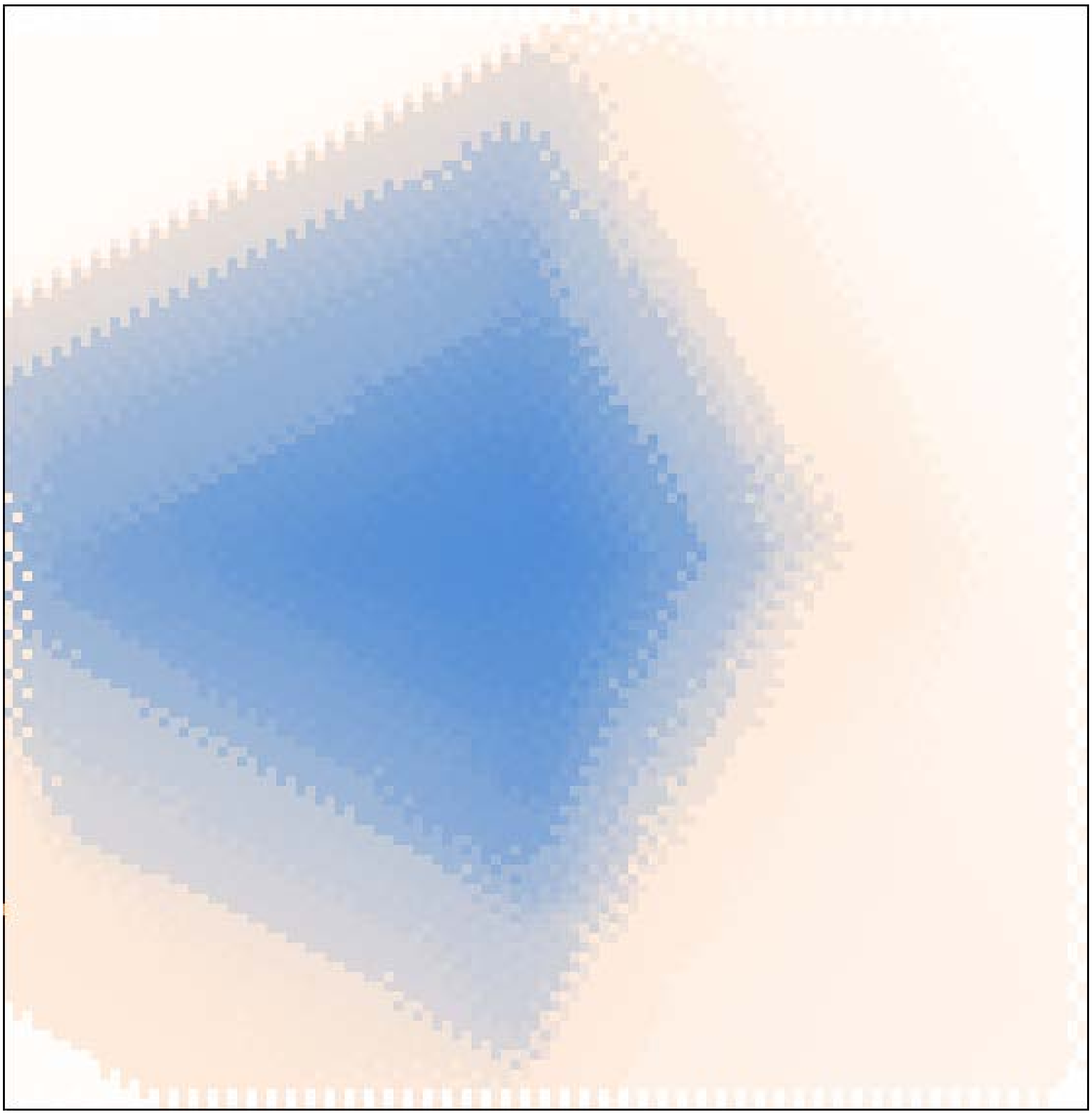

Figura 8. Solución para un tablero de 428×428 iniciando desde la casilla número 1.

5. Conclusiones

Se presenta un algoritmo determinístico para encontrar el tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez de tamaño $n \times n$ (con $n \geq 5$), iniciando desde cualquier casilla (si n es par) e iniciando solo desde casillas blancas si n es impar. La metodología propuesta implementa la regla de Warnsdorff y en el momento de desempate entre varios candidatos usa las propiedades especiales del grafo del caballo sobre el tablero. Como primer criterio de desempate utiliza la cercanía a las esquinas del tablero, como segundo criterio, la cercanía a uno de los lados (paredes) del tablero y por último para asegurar un comportamiento determinístico usa un orden de los movimientos del caballo.

Se reafirma la creencia general sobre la existencia de un tour abierto del caballo sobre tableros de ajedrez de tamaño $n \times n$ (con $n \geq 5$), así no exista una prueba formal en la literatura.

En este estudio se garantiza que siempre existe tour sin importa cuál sea la casilla inicial si n es par (si n es impar desde cualquier casilla blanca).

Los mecanismos de desempate propuestos pueden ser implementados junto con la regla de Warnsdorff para resolver problemas como el tour cerrado del caballo de ajedrez y el camino y el circuito Hamiltoniano de un grafo.

Referencias

Ball, W.W. R.; Coxeter, H.S.M.: *Mathematical Recreations and Essays*. 12th ed. Toronto: University of Toronto, 1974.

Conrad, A.; Hindrichs, T.; Morsy, H.; Wegener, I.: Solution of the knight's Hamiltonian path problem on chessboards, *Discrete Applied Mathematics*, vol.50, pp. 125-134, 1994.

Cull, P; Curtins, J.: Knight's tour revisited, *Fibonacci Quarterly*, vol.16, pp. 276-285, 1978.

Dudeney, H.E.: *Amusements in Mathematics*, Dover Publications, 1970.

Euler, L.: *Memoire de Berlin for 1759*, pp. 310-337, 1766.

Ganzfried, Sam.: *A new algorithm for knight's tours*. Oregon State REU Program, 2004.

Garey M.R.; Johnson, D.B.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, New York, 1979.

Jaenisch, C.F.: *Au jeu des echecs*, 3 vols., St Petersburg, 1862–3.

Moon, R.: On the Knight's Move at Chess, *Cambridge Mathematical Journal*; series 1, vol.3, no.17, February, pp. 233–236, 1843.

Parberry, I.: Scalability of a neural network for the knight's tour problem, *Neurocomputing*, vol.12, pp. 19-34, 1996.

Pohl, I.: A method for finding Hamilton paths and knight's tours, *Communications of the ACM 10*, pp. 446-449, 1967.

Roget, P.M.: Description of a method of moving the knight over every square of the chessboard without going twice over any one; commencing at any given square and ending at any other given square of a different colour, *London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, series 3, vol.16, April, pp.305-309, 1840.

Roth, A.: *The problem of the knight: a fast and simple algorithm*, Max-Planck-Institut fuer Medizinische Forschung, Heidelberg, Germany. MathSource item 0202-127, Mathematica Knight.nb notebook, Wolfram Research, Inc.

Schwenk, A. J.: Which rectangular chessboards have a knight's tour?, *Mathematics Magazine*, vol. 64, pp. 325-332, 1991.

Squirrel, D.; Cull, P.: *A Warnsdorff-rule algorithm for knight's tours on square chessboards.* Oregon State REU Program, 1996.

Takefuji, Y.; Lee, K.C.: Neural network computing for knight's tour problems, *Neurocomputing*, vol.4, pp.249-254, 1992.

Warnsdorff, H.C.: *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*, Schmalkalden, 1823.