

Inundação em Grafos

Uéverton dos Santos Souza¹, Fábio Protti², Maise Dantas da Silva³

Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil

usouza@ic.uff.br¹, fabio@ic.uff.br², maisedantas@id.uff.br³

RESUMO

Este trabalho apresenta novos resultados sobre jogos de inundação, INUNDAÇÃO e INUNDAÇÃO LIVRE, no qual o jogador deseja tornar o tabuleiro monocromático com o número mínimo de movimentos possíveis. As versões clássicas de INUNDAÇÃO e INUNDAÇÃO LIVRE são jogadas sobre grades $n \times m$. Neste trabalho nós analisamos o comportamento desses jogos, quando jogador em outras classes de tabuleiros, tais como árvores binárias, d -tabuleiros, potência de ciclos e grades circulares. Nós descrevemos algoritmos de tempo polinomial para INUNDAÇÃO em C_n^2 (a segunda potência de um ciclo com n vértices), d -tabuleiros (tabuleiros com uma coluna monocromática) e caminhos. Também mostramos que INUNDAÇÃO é NP-difícil para árvores binárias, e INUNDAÇÃO LIVRE é NP-difícil para C_n^2 e grades circulares $2 \times n$. Além disso, descrevemos um algoritmo 2-aproximativo para INUNDAÇÃO em C_n^2 , o qual supera o tempo de execução do algoritmo exato por um fator de $O(kn)$, onde k é o número de cores usado pelo jogo.

Palavras-chave: Jogos Combinatórios, Algoritmos em Grafos, Complexidade Computacional, Inundação, Flood-Filling

ABSTRACT

This work presents new results on flood-filling games, Flood-it and Free-Flood-it, in which the player aims to make the board monochromatic with the minimum possible number of flooding moves. The standard versions of Flood-it and Free-Flood-it are played on $n \times m$ grids. In this paper we analyze the behavior of these games when played on other classes of boards, such as binary trees, d -boards, powers of cycles and circular grids. We describe polynomial time algorithms to play Flood-it on C_n^2 (the second power of a cycle on n vertices), d -boards (grids with a monochromatic column) and paths. We also show that Flood-it is NP-hard on binary trees, and Free-Flood-it is NP-hard on C_n^2 and $2 \times n$ circular grids. In addition, we describe a 2-approximation algorithm to Flood-it on C_n^2 , which improves the running time of the exact polynomial-time algorithm by a factor of $O(kn)$, where k is the number of colors used by the game.

Keywords: Combinatorial Games, Graph Algorithms, Computational Complexity, Flood-it, Flood-Filling games

1 Introdução

INUNDAÇÃO é um jogo combinatório de apenas um jogador, originalmente jogado em tabuleiros coloridos consistindo de grades $n \times m$, onde cada casa (posição) do tabuleiro possui uma cor inicial dentre um conjunto fixo de cores. No jogo clássico, duas casas são consideradas vizinhas se elas pertencem a mesma linha (resp. coluna) e em consecutivas colunas (resp. linhas). Uma sequência C de casas é considerada um *caminho* quando todo par consecutivo de casas em C é formada de casas vizinhas. Um *caminho monocromático* é um caminho onde todas as casas possuem a mesma cor. Duas casas a e b são *conectadas* quando existe um caminho monocromático entre elas. Um movimento do jogador consiste de atribuir uma nova cor c à casa mais à esquerda do topo p (o “pivô”) e também a toda casa conectada a p . O objetivo do jogo é fazer o tabuleiro monocromático (“inundar o tabuleiro”) com o número mínimo de movimentos. A Figura 1 ilustra uma sequência de movimentos para inundar uma grade 3×3 .

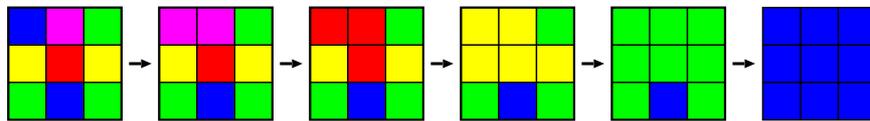


Figura 1. Sequência ótima de movimentos para inundar uma grade 3×3 .

Uma variação do jogo INUNDAÇÃO é a versão INUNDAÇÃO LIVRE, onde o jogador pode escolher livremente qual casa será o pivô em cada movimento. Além disso, estes jogos podem facilmente ser generalizados para ser jogados sobre um grafo qualquer com uma coloração inicial ω .

Jogos de inundação podem ser utilizados como modelo para algumas aplicações reais. Um modelo matemático de como zumbis infectam vizinhos não zumbis é similar as operações de inundação descrita acima [Munz (2009)]. Além disso, alguns modelos de propagação de doenças descrito em [Aschwanden (2004)] operam de forma similar a jogos de inundação. Em [Arthur (2010)], Arthur, Clifford, Jalsenius, Montanaro e Sach mostraram que INUNDAÇÃO e INUNDAÇÃO LIVRE são NP-díficeis em grades $n \times n$ coloridas com mais que três cores. Em [Meeks (2011)a], Meeks e Scott mostraram que INUNDAÇÃO LIVRE é solucionável em tempo polinomial em grades $1 \times n$, tanto INUNDAÇÃO quanto INUNDAÇÃO LIVRE permanecem NP-difícil para grades $3 \times n$ coloridas com pelo menos quatro cores. (A complexidade de INUNDAÇÃO (LIVRE) em grades $3 \times n$ coloridas com três cores permanece como um problema em aberto.) Clifford, Jalsenius, Montanaro e Sach apresentaram em [Clifford (2011)] um algoritmo de tempo polinomial para INUNDAÇÃO em grades $2 \times n$. Em [Meeks (2011)b], Meeks e Scott mostraram que INUNDAÇÃO LIVRE permanece NP-difícil em grades $2 \times n$, eles também mostraram que INUNDAÇÃO LIVRE é solucionável em tempo polinomial em grafos dois coloridos. Em [Lagoutte (2010)], Lagoutte mostrou que INUNDAÇÃO é polinomialmente solucionável em ciclos, e INUNDAÇÃO e INUNDAÇÃO LIVRE são NP-díficeis em árvores.

Neste trabalho, foi estudado a complexidade de INUNDAÇÃO e INUNDAÇÃO LIVRE em outras classes de tabuleiros, tais como árvores binárias, d -tabuleiros, potência de ciclos e grades circulares. Algoritmos de tempo polinomial para INUNDAÇÃO em C_n^2 (a segunda potência de um ciclo com n vértices), d -tabuleiros $2 \times n$ (grades $2 \times n$ onde a d -ésima

coluna é monocromática) e caminhos (onde qualquer vértice do caminho pode ser o pivô fixo) são descritos. Também mostramos que Inundação é NP-difícil em árvores binárias com a raiz sendo o pivô, e INUNDAÇÃO LIVRE é NP-difícil em C_n^2 e grades circulares $2 \times n$ (em uma grade circular, a primeira e a última casa de uma linha são consideradas vizinhas). Por fim, neste trabalho é descrito um algoritmo 2-aproximativo para INUNDAÇÃO em C_n^2 , o qual supera o algoritmo exato por um fator de $O(kn)$, onde k é o número de cores utilizadas no jogo.

1.1 Definições e Notações

Ao longo do texto, é utilizado o termo *vértice* em vez de *casa* quando conveniente. Casas vizinhas naturalmente correspondem a vértices vizinhos de um grafo G representando o tabuleiro. Um subgrafo H de G é *adjacente* a um vértice $v \in V(G)$ se v tem um vizinho em $V(H)$. O *pivô* de um movimento é o vértice escolhido para ter sua cor alterada por m . No jogo INUNDAÇÃO todos os movimentos possuem o mesmo pivô. Uma *ilha* é um vértice v colorido com uma cor c tal que nenhum vizinho de v é colorido com c . Um subgrafo H é dito ser *inundado*, quando H torna-se monocromático. Uma inundação(-livre) é uma sequência de movimentos no jogo INUNDAÇÃO(LIVRE) que inunda G (o tabuleiro de entrada). Um inundação(-livre) ótima é uma inundação com o número mínimo de movimentos. Uma cor c é *jogada em um movimento m* se c é a cor atribuída ao pivô de m . Um vértice v é *inundado por um movimento m* se a cor de v é jogada em m e v torna-se conectado a novos vértices depois da aplicação de m . Um movimento m é *economizado* se m inunda pelo menos dois vértices. Um movimento m é dito ser *jogado em um subconjunto de vértices S* (resp. *um subgrafo H*) se pelo menos um vértice de S (resp. H) é inundado por m . Um subgrafo monocromático H' de um subgrafo H é abreviado como *um mcs de H* . No jogo INUNDAÇÃO denotamos por $P(G)$ o mcs máximo de G contendo o pivô. Finalmente, dizemos que um movimento m *inunda um vértice v através de um vértice w* se v e w são vizinhos e m altera a cor de w para inundar v . Uma *grade circular* é uma grade $n \times m$ com a propriedade adicional de que a primeira e última casa de uma mesma linha são consideradas vizinhas.

2 Inundação em Árvores Binárias e Caminhos

Nesta seção, é mostrado que INUNDAÇÃO permanece NP-difícil em árvores binárias com raiz pivô. Como corolário, INUNDAÇÃO LIVRE é NP-difícil em árvores com grau máximo três. Por fim, é mostrado que INUNDAÇÃO é solucionável em tempo polinomial em caminhos, onde o vértice pivô é um vértice qualquer do caminho.

Teorema 1. INUNDAÇÃO permanece NP-difícil em árvores binárias com raiz pivô.

Prova. A prova utiliza um redução do problema COBERTURA POR VÉRTICES. Nós mostramos que existe um cobertura de tamanho k em um grafo G se e somente se existe uma inundação com no máximo $2m + n + k - 2$ movimentos em uma árvore binária T associada.

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$, constrói-se uma árvore T como segue:

- cria-se um vértice s em T ;
- para cada aresta e_i de G , cria-se um vértice x_i em T ;

- definimos T como uma árvore binária onde s é a raiz, cada vértice x_i é uma folha, e os $m - 2$ vértices internos auxiliares são denotados por a_1, a_2, \dots, a_{m-2} ;
- cada vértice de T é colorido com um cor distinta;
- para cada aresta $e_i = uv$ de G , é adicionado em T nos vértices u'_i, v'_i, u''_i, v''_i tal que u'_i, v'_i são filhos de x_i, v''_i é filho de u'_i , e u''_i é filho de v'_i ;
- todos vértices da forma u'_i, u''_i são coloridos com a cor c_u .

A Figura 2 mostra um grafo G e sua árvore binária T associada.

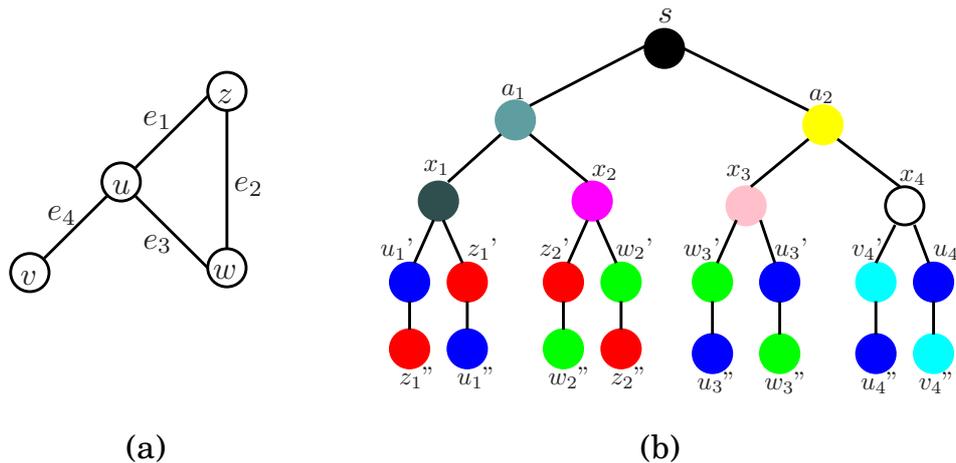


Figura 2. (a) Um grafo G ; (b) árvore binária T obtida a partir de G .

Supondo que G possui uma cobertura por vértices V' de tamanho k , neste ponto, deve ser mostrado que T possui uma inundação com $2m + n + k - 2$ movimentos. Primeiro, note que jogando $2m - 2$ movimentos, $P(T)$ contém os vértices: $s, a_1, \dots, a_{m-2}, x_1, \dots, x_m$. Por construção, o conjunto de vértices ainda não inundados possuem n cores. Efeituando n movimentos adicionais (utilizando todas as n cores restantes, uma para cada movimento), cada subárvore enraizada por um vértice x_i conterá um vértice não conectado a s . Sendo assim, é possível jogar estes n movimentos na seguinte ordem: inicialmente, são jogados movimentos sobre cores atribuídas aos vértices de V' , e depois os demais movimentos. Dado que toda aresta em G contém pelo menos um de seus extremos em V' , depois destes n movimentos os vértices em T não conectados a s possuem cores associadas aos vértices de V' . Como $|V'| = k$, será necessário no máximo k movimentos adicionais, e portanto a inundação terá no máximo $2m - 2 + n + k$ movimentos, como requerido.

Agora, assumindo que T possui uma inundação com $2m + n + k - 2$ movimentos. Por construção, os $2m - 2$ movimentos iniciais são requeridos para conectar os vértices a 's e x 's a s . Neste ponto, T contém somente a cor de $P(T)$ e n outras cores formando um conjunto C . Como restam $n + k$ movimentos e pelo menos um movimento para cada cor de C é jogado. Nós dividimos as cores de C em dois grupos: o primeiro formado pelas cores jogadas mais de uma vez, e o segundo formado pelas cores jogadas apenas uma vez. Desta forma, para inundar uma subárvore T' enraizada em um vértice x_i , o segundo e o último movimentos jogados em T' são movimentos jogados em cores do primeiro grupo. Sendo assim, sem perda de generalidade, assumimos que os $n + k$ movimentos restantes são jogados na seguinte ordem: (a) o primeiro movimento de todas as cores do primeiro

grupo, (b) os movimentos das cores do segundo grupo, e (c) os movimentos restantes das cores do primeiro grupo. Assim, depois de jogados os movimentos correspondentes a (a) e (b) (note que estes são n movimentos, um para cada cor), um vértice em cada subárvore enraizada por um vértice x_i permanece não inundado. Além disso, o conjunto de vértices não conectados a s possui k cores. Como cada cor em T representa um vértice distinto em G e cada subárvore enraizada por um vértice x_i em T é associado com uma aresta distinta em G , estas k cores correspondem a um subconjunto de vértices em G de tamanho k tal que toda aresta em G contém pelo menos um de seus extremos neste subconjunto. \square

Corolário 2. INUNDAÇÃO LIVRE *permanece NP-difícil em árvores com grau máximo três.* \square

A prova do Corolário 2 é similar a prova do Teorema 1, e é omitido devido à restrições de espaço.

Quando restrito a caminhos, Inundação livre é equivalente a INUNDAÇÃO LIVRE em grades $1 \times n$ (provado ser solucionável em tem $O(n^6)$ [Meeks (2011)a]). Por outro lado, INUNDAÇÃO em caminhos não é equivalente a INUNDAÇÃO em grades $1 \times n$ pois neste o pivô é sempre um vértice de grau um. No Teorema 3 é mostrado que INUNDAÇÃO em caminhos é equivalente a um subcaso do problema SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA.

Teorema 3. INUNDAÇÃO em caminhos com um pivô fixo qualquer é equivalente ao problema SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA, quando restrito às instâncias sem símbolos consecutivos iguais.

Prova. No problema da SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA, temos duas sequências de símbolos $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, e desejamos encontrar uma subsequência de comprimento máximo comum a X e Y . Por outro lado, no problema de INUNDAÇÃO em caminhos, temos um vértice pivô e dois subcaminhos: $A = a_1, \dots, a_m$ formado pelos vértices à esquerda do pivô; e $B = b_1, b_2, \dots, b_n$ formado pelos vértices à direita do pivô. Sem perda de generalidade, podemos observar esse caminho como uma árvore C onde o pivô é a raiz e suas subárvores são caminhos. Para transformar uma instância do problema SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA em uma instância do problema INUNDAÇÃO em caminhos, e vice e versa, basta considerar que: cada símbolo (resp. cor) representa uma cor (resp. símbolo) no problema equivalentene; cores consecutivas iguais no jogo INUNDAÇÃO são representadas por um único símbolo; e a ordem dos símbolos nas sequências são equivalentes as ordens das cores geradas pelos percursos em nível das subárvores. Logo, os subcaminhos A e B podem representar um instância de SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA sem símbolos consecutivos iguais, e X (resp. Y) pode representar o subcaminho esquerdo (resp. direito) de uma instância de INUNDAÇÃO em caminhos.

Quando o jogo INUNDAÇÃO é jogado sobre um caminho C o número máximo de movimentos necessários para inundar o tabuleiro é $m + n$ ($|A| = m$ e $|B| = n$), e supondo que $m \geq n$ temos que pelo menos m movimentos são necessários para inundar C . Se um vértice de B foi inundado juntamente com um vértice de A então esta inundação foi feita por um movimento *economizado*, logo, dado uma inundação M de C se o número de movimentos economizados em M for k então $|M| = m + n - k$.

Supondo que C possui uma inundação M de tamanho $m + n - k$, sabemos que

existe uma sequência de cores $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ jogadas por movimentos economizados em M , onde a cor c_i é a cor jogada pelo i -ésimo movimento economizado de M . Logo a sequência $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ corresponde a uma subsequência comum de tamanho k para a instância equivalente do problema SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA.

Seja X e Y uma instância de SUBSEQUÊNCIA COMUM MAIS LONGA onde X representa A e Y representa B em C . Supondo que X e Y possuem uma subsequência comum $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ então existe $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ e $\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \subseteq B$ tal que a_i e b_i possuem a cor c_i e dado $i \leq j$ então a_i (resp. b_i) é ancestral de a_j (resp. b_j) em C . Logo é possível inundar C com no máximo $m + n - k$ movimentos a partir do seguinte algoritmo:

```

i := 1;
enquanto  $a_k$  e  $b_k$  não foram inundados faça
  se  $Pai(a_i) \neq pivô$  e ainda não foi inundado então
    └ inunda todos os ancestrais de  $a_i$  ainda não inundados;
  se  $Pai(b_i) \neq pivô$  e ainda não foi inundado então
    └ inunda todos os ancestrais de  $b_i$  ainda não inundados;
  inunda  $a_i$  e  $b_i$  com um único movimento;
  i := i + 1;

```

Logo, determinar a subsequência comum mais longa de duas sequências sem símbolos consecutivos iguais é equivalente a determinar a inundação de cardinalidade mínima em um caminho.

3 Inundação em d -Tabuleiros

Um d -tabuleiro é uma grade $n \times m$ onde a d -ésima coluna é monocromática. Assim, INUNDAÇÃO em um d -tabuleiro consiste em utilizar a coluna d como pivô. Observe que INUNDAÇÃO em d -tabuleiro $2 \times m$ é uma generalização de INUNDAÇÃO em tabuleiros $2 \times m$, e INUNDAÇÃO em caminhos é equivalente a INUNDAÇÃO em d -tabuleiros $1 \times n$. Denotamos por B_l (resp. B_r) de um d -tabuleiro B , o tabuleiro composto por d e todas as casas à esquerda (resp. direita) de d .

Lema 4. Dado um d -tabuleiro $2 \times n$, B , um vértice $a \in B_l$ e um vértice $b \in B_r$, o menor número de movimentos necessários para conectar a e b pode ser encontrado em tempo $O(n^2)$.

Prova. Seja L e R os mcs's máximos de B_l e B_r contendo d . L e R podem ser interpretados como "subgrafos dinâmicos" pois eles se modificam após cada movimento. Observe que a será inundado por um vértice que ou está na mesma coluna de a ou em uma coluna à direita de a . Portanto, colunas à esquerda de a não precisam ser analisadas. Uma idéia análoga se aplica à b . Assim, para escolher qual cor deve ser jogada em cada movimento, é necessário saber somente qual é os vértices mais à esquerda (resp. mais à direita) de L (resp. R). Estas configurações de L e R , podem ser um par de vértices, no caso do vértice mais à esquerda (resp. mais à direita) de cada linha de L (resp. R) estiverem na mesma coluna, ou apenas um vértice caso contrário. Se um vértice de uma configuração pertence à coluna d então representamos-o por '#'.

Neste ponto, construímos um hipergrafo direcionado acíclico H como segue:

- criamos um vértice para cada possível configuração de L ou R ;
- seja $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ e $(w_1, z_1), (w_2, z_2)$ configurações de L e R , respectivamente, adicionamos uma hiperaresta direcionada $(\{(u_1, v_1), (w_1, z_1)\}, \{(u_2, v_2), (w_2, z_2)\})$ rotulada com a cor c se aplicando a cor c a partir de (u_1, v_1) e (w_1, z_1) , a configuração mais à esquerda (resp. mais à direita) obtida para L (resp. R) for (u_2, v_2) (resp. (w_2, z_2));
- seja (u_1, v_1) e (u_2, v_2) configurações de L (ou R), adicionamos uma hiperaresta $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ rotulada com a cor c se aplicando a cor c a partir de (u_1, v_1) , a configuração mais à esquerda (ou à direita) obtida para L (ou R) for (u_2, v_2) ;
- colapsamos os vértices representando configurações iniciais de L e R em um único vértice s ;

Cada hiperaresta de H representa um possível movimento a partir de um possível estado do jogo. Uma hiperaresta da forma $(\{(u_1, v_1), (w_1, z_1)\}, \{(u_2, v_2), (w_2, z_2)\})$ representa um movimento conectando vértices de L e R . Encontrar o menor número de movimentos para conectar a e b equivale a encontrar o menor número de hiperarestas necessárias para construir caminhos entre s e vértices representando configurações contendo a e b . Como o número de hiperarestas de H é $O(n^2)$, onde $n = V(B)$, é fácil verificar que podemos o número mínimo de hiperarestas necessárias para conectar a e b em tempo $O(n^2)$. □

A Figura 3 mostra um $2 \times n$ d -tabuleiro B e um subgrafo do hipergrafo H obtido a partir de B o qual contém a representação do menor número de movimentos para conectar a e h .

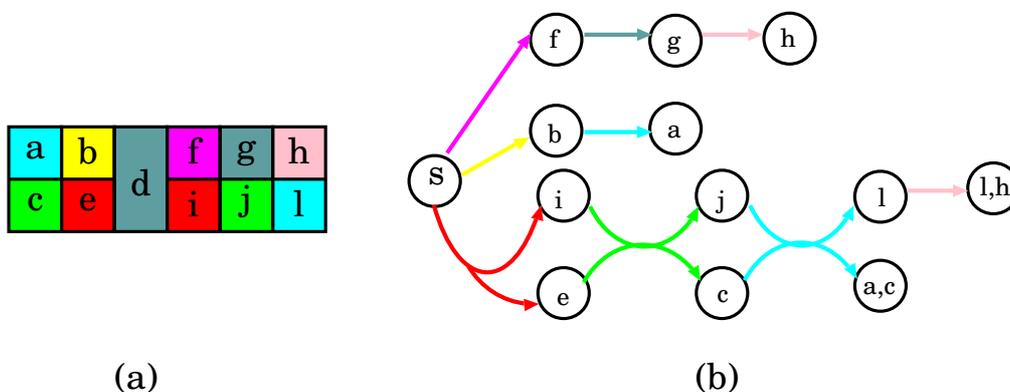


Figura 3. (a) um d -tabuleiro $2 \times n$ B ; (b) um subgrafo do hipergrafo H obtido a partir de B .

Teorema 5. INUNDAÇÃO pode ser solucionado em tempo polinomial em d -tabuleiros $2 \times n$.

Prova. Suponha que B é um d -tabuleiro $2 \times n$ e k é o número de cores. Dizemos que uma casa t de L (resp. R) é *marcada* se possui a cor c_t e nenhuma outra casa em uma coluna estritamente à esquerda (resp. direita) de t possui a cor c_t . Uma coluna é marcada se contém alguma casa marcada. Como em [Clifford (2011)], é importante observar que se todas as casas marcadas são inundadas então todo o tabuleiro será inundado. Para ver isto, note que quando uma casa marcada t de cor c_t em L (resp. R) é inundada, todas as casas de cor c_t em L (resp. R) que ainda não foram inundados estão à direita (resp. esquerda) de

t , e portanto elas serão inundadas quando t for inundado. Assim, iterativamente buscamos pela sequência mais curta de movimentos para conectar a casa marcada ainda não inundada mais à direita de L com a casa marcada ainda não inundada mais à esquerda de R até que todas as casas marcadas de L e R sejam conectadas. Sendo assim, o número mínimo de movimentos necessários para inundar B pode ser obtido em tempo $O(kn^2)$. \square

4 Inundação em Potência de Ciclos

A k -ésima potência de um ciclo com n vértices, C_n^k , é o grafo formado por C_n acrescido de arestas entre todos os vértices que estão a uma distância no máximo k .

Teorema 6. INUNDAÇÃO LIVRE *permanece NP-difícil em C_n^2 .*

Prova. Esta prova utiliza uma redução do problema COBERTURA POR VÉRTICES. Seja Q um grafo formado pelos vértices x_1, x_2, x_3, x_4 e arestas $e_a = (x_1, x_2)$, $e_b = (x_1, x_3)$, $e_c = (x_2, x_4)$. Note que Q contém uma cobertura mínima formada por x_1 e x_2 ; esta cobertura contém os dois extremos de e_a . É claro que COBERTURA POR VÉRTICES permanece NP-difícil para todos os grafos que contém Q como um componente isolado. Assim, seja $G_Q = G \cup Q$ um grafo, onde G é um grafo com n vértices, m arestas e uma cobertura por vértices de tamanho k . Claramente, o grafo G_Q possui uma cobertura por vértice de tamanho $k + 2$.

A partir de G_Q construímos um grafo H isomorfo a um grafo 2-potência de ciclo, como segue:

- para cada aresta $e_i = (u, v)$ em G_Q é criado um subgrafo auxiliar g_i em H da seguinte maneira:
 - cria-se os vértices $u_1^{e_i}, u_2^{e_i}, u_3^{e_i}, v_1^{e_i}, v_2^{e_i}, v_3^{e_i}$ e arestas as $(v_3^{e_i}, u_2^{e_i}), (u_2^{e_i}, u_1^{e_i}), (u_1^{e_i}, v_1^{e_i}), (v_1^{e_i}, v_2^{e_i}), (v_2^{e_i}, u_3^{e_i})$;
 - cria-se os vértices $z_1^{e_i}, z_2^{e_i}, z_3^{e_i}, \dots, z_m^{e_i}$, arestas $(z_j^{e_i}, z_{j+1}^{e_i}), 1 \leq j \leq m - 1$, e aresta $(z_1^{e_i}, w_v^3)$;
 - cria-se vértices $y_1^{e_i}, y_2^{e_i}, y_3^{e_i}, \dots, y_m^{e_i}$, arestas $(y_j^{e_i}, y_{j+1}^{e_i}), 1 \leq j \leq m - 1$, e aresta $(y_1^{e_i}, w_u^3)$;
 - adiciona-se uma aresta entre todos os vértices de g_i a uma distância 2;
 - atribua cor c_u aos vértices $u_1^{e_i}, u_2^{e_i}, u_3^{e_i}$; cor c_v aos vértices $v_1^{e_i}, v_2^{e_i}, v_3^{e_i}$; e para todo $1 \leq j \leq m$, atribua cor $c_j^{e_i}$ aos vértices $z_j^{e_i}$ e $y_j^{e_i}$.
- sendo g_1, g_2, \dots, g_{m+3} os subgrafos auxiliares de H , para todo $1 \leq i \leq m + 2$, adiciona-se a $E(H)$ as arestas $(z_m^{e_i}, y_m^{e_{i+1}})$;
- adiciona-se a aresta $(z_m^{e_{m+3}}, y_m^{e_1})$;
- Finalmente, adicionamos uma aresta entre todo par de vértices com distância 2.

Cada subgrafo auxiliar g_i de H é dividido em três partes: o núcleo, consistindo dos vértices $u_1^{e_i}, u_2^{e_i}, u_3^{e_i}, v_1^{e_i}, v_2^{e_i}, v_3^{e_i}$; o braço z , consistindo dos vértices $z_1^{e_i}, \dots, z_m^{e_i}$; e o braço y , consistindo de $y_1^{e_i}, \dots, y_m^{e_i}$. Denotamos por g_a, g_b, g_c os subgrafos auxiliares associados às arestas e_a, e_b, e_c , respectivamente.

A Figura 4 mostra um subgrafo auxiliar de acordo com a construção acima. Seu núcleo e seus braços estão destacados.

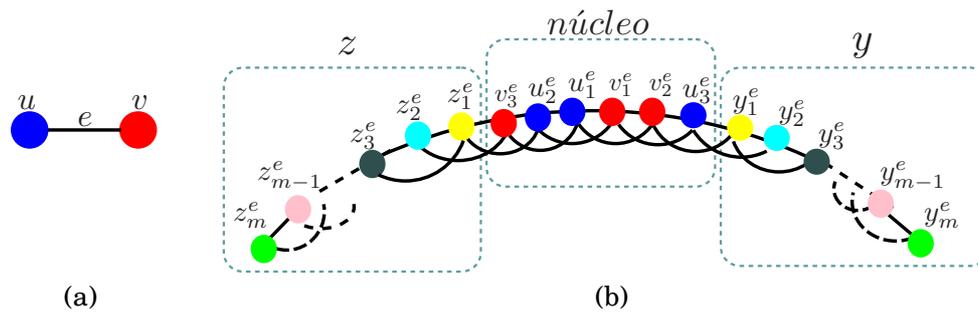


Figura 4. (a) uma aresta e ; (b) subgrafo auxiliar correspondendo a e .

Primeiramente, devemos provar que se G_Q contém uma cobertura por vértices de tamanho $k + 2$ (i.e., G contém uma cobertura por vértices V' de tamanho k) então o grafo construído H tem um inundação livre com $m^2 + 5m + k + 5$ movimentos. Por construção, em todo subgrafo auxiliar g_i de H os vértices z_j^i e y_j^i possuem a mesma cor. Assim, para tornar os braços de cada subgrafo auxiliar $g_i \neq g_a$ monocromático com apenas m movimentos, jogamos um movimento em seu núcleo de tal forma que cinco vértices do núcleo tornam-se coloridos com a mesma cor e o vértice restante (com uma outra cor) é associado com um vértice de V' . Após essa movimentação, jogamos m movimentos, a partir do núcleo, para inundar os braços. Neste ponto, $m^2 + 3m + 2$ movimentos foram jogados e em cada subgrafo auxiliar $g_i \neq g_a$ há apenas duas cores, a cor do mcs (denotamos por h_i este mcs) e a cor de uma ilha representando um vértice da cobertura mínima. Jogando $m + 1$ movimentos adicionais criamos um grande mcs H' contendo todos h_i 's, e efetuando mais m movimentos obtemos um mcs H'' que contém H' e ambos braços de g_a . Neste ponto, os vértices que não pertencem a H'' são vértices do núcleo de g_a ou ilhas dos demais subgrafos auxiliares. Como ambos extremos de e_a pertence a uma cobertura mínima de Q , e assumindo que as ilhas em g_b e g_c representam vértices x_1 e x_2 , mais dois movimentos são suficientes para inundar g_a, g_b e g_c . Finalmente, as ilhas restantes representam vértices de V' , que podem ser inundados com k movimentos finais. Totalizando uma inundação livre de H com $m^2 + 5m + k + 5$ movimentos.

Agora, assumindo que H possui uma inundação livre ótima S com $m^2 + 5m + k + 5$ movimentos. Para dois vértices a, b pertencendo, respectivamente, ao braço z e o braço y de um subgrafo auxiliar g_i , a e b podem ser inundados por um mesmo movimento m se e somente se a e b possuem a mesma cor c , e imediatamente antes do movimento m , existe um mcs H' adjacente a a e b com uma coloração $c' \neq c$. Quando tal mcs H' existe temos dois casos: (i) H' contém vértices do núcleo de g_i (H' é do tipo 1); (ii) H' não é do tipo 1 e contém vértices dos braços de todos os outros subgrafos auxiliares (H' é do tipo 2). É fácil ver que não mais que um subgrafo auxiliar de H , dito g_f , contém vértices a, b tal que: (1) a, b pertencem a braços distintos de g_f ; (2) a, b possuem a mesma cor c ; (3) a, b antes de serem inundados são adjacentes a um mcs do tipo 2 com cor $c' \neq c$. Portanto, pelo menos $m + 2$ subgrafos auxiliares formam uma coleção U contendo nenhum par de vértices a, b como descrito. Para cada subgrafo auxiliar g_j em U , o número mínimo de movimentos necessários para criar um mcs contendo todos os vértices de seus braços é $m + 1$, onde um dos movimentos é exclusivamente jogado no núcleo de g_j . Como S é uma inundação livre ótima, sem perda de generalidade podemos assumir que estas subsequências de $m + 1$ movimentos para cada subgrafo auxiliar em U correspondem aos primeiros $(m + 2)(m + 1)$ movimentos em S . Após jogar estes movimentos, cada subgrafo auxiliar em U contém um

mcs e uma ilha. Após essa movimentação, pelo menos $m + 1$ movimentos são necessários para conectar cada um desses $m + 2$ mcs's, pois cada um desses mcs's possuem uma cor distinta. Efetuando esses $m + 1$ movimentos, restam $m + k + 2$ movimentos para serem jogados. Observe que o subgrafo auxiliar g_f , contém um par de vértices a, b satisfazendo as condições (1)–(3). Neste caso, m movimentos são suficientes para inundar os braços de g_f . Neste ponto, seja W' um subconjunto de vértices de H ainda não inundados, sabemos que: os vértices de W' ou pertencem ao núcleo de g_f ou são ilhas do núcleo de outros subgrafos auxiliares; os vértices de W' devem ser inundados por $k + 2$ movimentos. E como por construção, cada subgrafo auxiliar em H representa uma aresta de G_Q e os vértices pertencentes ao núcleo de um subgrafo auxiliar estão associados a vértices de G_Q , logo os vértices em W' correspondem a uma cobertura por vértices de G_Q de tamanho $k + 2$. \square

Lema 7. INUNDAÇÃO em C_n^2 é um caso particular do jogo em grades circulares $2 \times n$.

Prova. Seja v_1, v_2, \dots, v_n os vértices do grafo C_n^2 . Então, tomando índices circulares, a vizinhança de v_i é $\{v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}\}$.

Cria-se uma grade circular $2 \times n$ T equivalente a C_n^2 como segue:

- Para n par:
 - definimos $q_{a_1}, q_{b_1}, q_{a_3}, q_{b_3}, \dots, q_{a_{n-1}}, q_{b_{n-1}}$ como a primeira linha;
 - definimos $q_{b_n}, q_{a_2}, q_{b_2}, q_{a_4}, q_{b_4}, \dots, q_{a_{n-2}}, q_{b_{n-2}}, q_{a_n}$ como a segunda linha.
- Para n ímpar:
 - definimos $q_{a_1}, q_{a_3}, q_{b_3}, q_{a_5}, q_{b_5}, \dots, q_{a_{n-2}}, q_{b_{n-2}}, q_{a_n}$ como a primeira linha;
 - definimos $q_{b_1}, q_{a_2}, q_{a_4}, q_{b_4}, \dots, q_{a_{n-1}}, q_{b_{n-1}}$ como a segunda linha.

Para n ímpar, note que as casas q_{b_2} e q_{b_n} não existem. Em ambas construções as casas q_{a_i} e q_{b_i} (se existe) recebe a mesma coloração de v_i . Veja a Figura 5. Assumindo que o “componente” $\{q_{a_i}, q_{b_i}\}$ (ou simplesmente $\{q_{a_i}\}$, para n ímpar e $i = 2$ ou $i = n$) representa o vértice v_i , podemos observar que:

1. para n par, uma casa de cor c é adjacente a $\{q_{a_i}, q_{b_i}\}$ em T se e somente se v_i possui um vizinho de cor c ;
2. para n ímpar, a mesma propriedade acima é válida, exceto para $\{q_{a_2}\}$ e $\{q_{a_n}\}$ que deveriam ser adjacentes; entretanto, como ambos são adjacentes ao componente $\{q_{a_1}, q_{b_1}\}$ que representa o vértice pivô v_1 , esta adjacência torna-se redundante.

Logo, INUNDAÇÃO em C_n^2 pode ser representado como uma grade circular $2 \times n$. \square

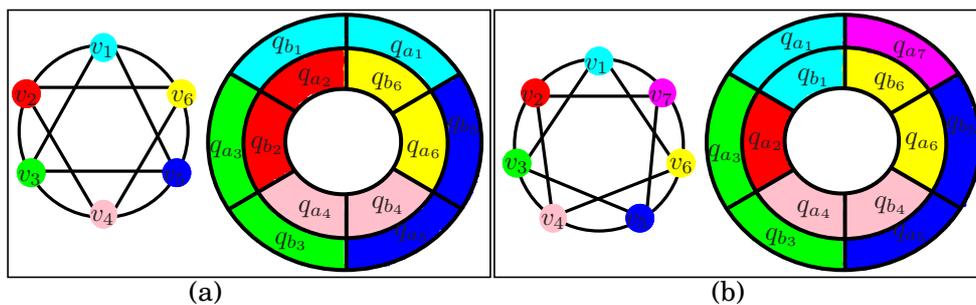


Figura 5. (a) grade circular $2 \times n$ para n par; (b) grade circular $2 \times n$ para n ímpar.

Corolário 8. Para n par, INUNDAÇÃO LIVRE em C_n^2 é um caso particular de INUNDAÇÃO LIVRE em grades circulares $2 \times n$.

Prova. Usa a mesma construção do Lema 7 para n par. \square

Teorema 9. INUNDAÇÃO LIVRE permanece NP-difícil em grades circulares $2 \times n$.

Prova. Segue diretamente do Corolário 8 e do Teorema 6.

Teorema 10. INUNDAÇÃO em C_n^2 pode ser solucionado em tempo polinomial.

Prova. Seja $s, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ os vértices do grafo C_n^2 , onde s é o pivô do jogo. Seja S uma sequência ótima de movimentos para inundar C_n^2 . Dizemos que v_i é inundado pela direita por S se $i \leq 2$, ou $i \leq n - 3$ e antes de jogar o movimento $m \in S$ que inunda v_i , existe um caminho de s até v_i tal que todo vértice interno desse caminho é inundado pela direita e pertence ao $P(C_n^2)$. Por outro lado, um vértice v_i é inundado pela esquerda por S se não é inundado pela direita.

Note que mesmo removendo todas as arestas que conectam vértices inundados pela direita a vértices inundados pela esquerda, é possível aplicar S e inundar C_n^2 .

Seja v_i, v_{i+1} o par consecutivo de vértices inundados de pela direita com maior índice i , e v_j o vértice inundado pela direita com maior índice j ($j \geq i + 1$). Observe que os demais vértices inundados pela direita pertencem a $\{v_k \mid k < i\}$ ou $\{v_{i+k} \mid (i + 1) < (i + k) < j \text{ e } k \bmod 2 \neq 0\}$.

Seja H_r o subgrafo induzido por s e os vértices inundados pela direita, e H_l o subgrafo induzido por s e os vértices inundados pela esquerda. Podemos remover todas as arestas que conectam vértices inundados pela direita a vértices inundados pela esquerda e construir um d -tabuleiro $2 \times n$ B utilizando uma construção similar a apresentada no Lema 7. Uma inundação ótima de B corresponde a uma inundação ótima de C_n^2 .

Como os vértices v_i, v_{i+1}, v_j não são previamente conhecidos, devemos executar este processo para cada possibilidade. Portanto, podemos solucionar INUNDAÇÃO em C_n^2 em tempo $O(kn^4)$. \square

Teorema 11. Uma solução 2-aproximativa para INUNDAÇÃO em C_n^2 pode ser encontrada em tempo $O(n^3)$.

Prova. Repetindo o mesmo processo descrito no Teorema 10, construímos um d -tabuleiro $2 \times n$, B_i , para cada possibilidade. Dado um d -tabuleiro $2 \times n$ B_i , aplicamos o algoritmo de tempo de execução $O(n)$ para tabuleiros $2 \times n$ descrito em [Clifford (2011)] para $(B_i)_l$ e $(B_i)_r$, obtendo uma inundação para B_i .

Sendo $M(G)$ o número mínimo de movimentos para inundar um grafo G , e $B_j = B$ o tabuleiro que minimiza o número de movimentos obtidos pela inundação descrita acima. Então $M(B_r) \leq M(C_n^2)$ e $M(B_l) \leq M(C_n^2)$, caso contrário $M(H_r)$ e $M(H_l)$ não seriam mínimos. Logo concluímos que:

$$M(B) \leq M(B_r) + M(B_l) \leq M(C_n^2) + M(C_n^2) = 2M(C_n^2).$$

Portanto, podemos obter uma solução 2-aproximativa para INUNDAÇÃO em C_n^2 em tempo $O(n^3)$. \square

5 Conclusão

Recentemente, a complexidade de jogos de inundação vêm sendo amplamente estudados, no entanto, a maioria dos trabalhos existentes se restringem ao estudo desses jogos em tabuleiros do tipo grade.

Neste trabalho, extendemos o estudo dos jogos de inundação a outros tipos de tabuleiros, tais como árvores, d -tabuleiros, potência de ciclos e grades circulares.

Dentre os resultados obtidos, descrevemos algoritmos de tempo polinomial para INUNDAÇÃO em C_n^2 , d -tabuleiros e caminhos. Também mostramos que INUNDAÇÃO é NP-difícil para árvores binárias, e INUNDAÇÃO LIVRE é NP-difícil para C_n^2 e grades circulares $2 \times n$. Além disso, descrevemos um algoritmo 2-aproximativo para INUNDAÇÃO em C_n^2 , o qual supera o tempo de execução do algoritmo exato por um fator de $O(kn)$, onde k é o número de cores usado pelo jogo.

Referências

- Arthur, D., Clifford, R., Jalsenius, M., Montanaro, A., and Sach, B.** (2010). The complexity of flood filling games. *FUN, volume 6099 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, ISBN 978-3-642-13121-9*, pages 307–318.
- Aschwanden, C.** (2004). Spatial simulation model for infectious viral disease with focus on sars and the common flu. *37th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, IEEE Computer Society*.
- Clifford, R., Jalsenius, M., Montanaro, A., and Sach, B.** (2011). The complexity of flood filling games. *arXiv.1001.4420v3 [cs.DS]*.
- Lagoutte, A.** (2010). Jeux d'inondation dans les graphes. *Technical report, ENS Lyon, HAL: hal-00509488*.
- Meeks, K. and Scott, A.** (2011a). The complexity of flood-filling games on graphs. *arXiv.1101.5876v3 [cs.DS]*.
- Meeks, K. and Scott, A.** (2011b). The complexity of free-flood-it on $2 \times n$ boards. *arXiv:1101.5518v1 [cs.DS]*.
- Munz, P., Hudea, I., Imad, J., and Smith, R. J.** (2009). When zombies attack!: Mathematical modellings of an outbreak of zombie infection. *Infectious Disease Modelling Research Progress*, pages 133–150.