Partição Clique-Floresta dos grafos P_4-laden estendidos

Raquel Bravo
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
raquel@ic.uff.br

Sulamita Klein
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Rio de Janeiro - RJ
sula@cos.ufrj.br

Loana Nogueira
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
loana@ic.uff.br

RESUMO

Um grafo G é P_4-laden estendido se qualquer subgrafo induzido de G com no máximo seis vértices que contém mais que dois P_4's induzidos é livre de $2K_2$ e C_4. Neste trabalho, consideramos o problema de partição-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ de um grafo P_4-laden estendido, isto é, o problema de determinar se o conjunto de vértices de um grafo P_4-laden estendido pode ser particionado em dois subconjuntos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ tais que $\mathcal{C}$ induz um grafo completo e $\mathcal{F}$ uma floresta (grafo acíclico). Apresentamos um algoritmo linear de reconhecimento dos grafos P_4-laden estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

PALAVRAS CHAVE: clique, grafos P_4-laden estendidos, grafos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Área principal: Teoria dos Grafos

ABSTRACT

A graph G is an extended P_4-laden graph if every induced subgraph of G with at most six vertices that contains more than two induced P_4's is $\{2K_2, C_4\}$-free. This work considers the problem of $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$-partitions of extended P_4-laden graphs, that is, the problem of determining if the set of vertices of an extended P_4-laden graph can be partitioned into subsets $\mathcal{C}$ and $\mathcal{F}$ such that $\mathcal{C}$ induces a complete graph and $\mathcal{F}$ induces a forest (acyclic graph). We characterize the extended P_4-laden-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ graphs by forbidden subgraphs and we present a linear-time algorithm to recognize this class.

KEYWORDS: clique, extended P_4-laden graphs, $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$-graphs.

Main area: Graph Theory

1. Introdução

Em geral, os problemas de partição de grafos objetivam dividir o conjunto de vértices em subconjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$, onde $V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq k$, exigindo-se, porém, algumas propriedades sobre estes subconjuntos de vértices. Estas propriedades podem ser *internas*, como por exemplo exigir que os vértices de cada subconjunto V_i sejam completamente adjacentes (isto é, uma clique) ou completamente não-adjacentes (isto é, um conjunto independente), ou *externas*, onde as exigências são feitas sobre os pares (V_i, V_j), como por exemplo exigir que V_i e V_j sejam completamente adjacentes ou não-adjacentes entre si. Um dos problemas mais famosos que se insere neste contexto é o problema da k-coloração, onde procura-se particionar o conjunto de vértices de um grafo em k conjuntos independentes $V_1, \ldots, V_k$ (sem restrições externas). Sabe-se que esse problema é polinomial para $k \leq 2$ e NP-Completo para $k \geq 3$.

Outro problema bastante conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo G é *split*, ou, equivalentemente, verificar se o conjunto de vértices de G pode ser particionado em dois subconjuntos, onde um deles é independente e o outro é uma clique.

Recentemente, foi estudada por Yang e Yuan (2006) uma nova partição em grafos, denominada *quase-bipartição*. Nesse estudo os autores reconhecem grafos que podem ser particionados em um conjunto independente e um grafo acíclico, denominados *grafos quase-bipartidos*, propondo uma caracterização para grafos com grau máximo 3 e diâmetro 2. Além disso, provaram que o reconhecimento dos grafos quase-bipartidos é NP-completo para grafos onde o grau máximo é 4 ou onde o diâmetro é 4.

Baseados nesses estudos, consideramos o problema de particionar um grafo em dois subconjuntos A e B, tais que A induz um grafo acíclico, ou equivalentemente uma floresta, e B é uma clique, que pode ser vista como uma clique-transversal de ciclos, i.e., uma clique que intercepta todos os ciclos do grafo. Denotamos tais grafos por grafos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Neste trabalho, consideramos a classe dos grafos P_4-laden estendidos, classe esta conhecida por conter poucos P_4's. Mais precisamente, um grafo G é P_4-laden estendido se qualquer subgrafo induzido com no máximo seis vértices que contém mais que dois P_4's induzidos é livre de $2K_2$ e C_4. Essa classe contém estritamente a classe dos grafos P_4-esparsos e, consequentemente, a dos cografos. Além disso, essa classe não está contida na classe dos grafos perfeitos, o que a torna uma classe interessante para estudo. Os grafos P_4-laden estendidos que podem ser particionados em uma clique $\mathcal{C}$ e uma floresta $\mathcal{F}$ são denominados grafos P_4-laden-estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

1.1. Preliminares

Os grafos considerados neste trabalho são simples, isto é, sem laços e sem arestas paralelas. A seguir, apresentamos as definições necessárias para o entendimento do nosso trabalho. Denotamos por $\overline{G}$ o complemento de G, isto é, o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em $\overline{G}$ se e somente se não são adjacentes em G. Para $V' \subseteq V$, $G[V']$ denota o subgrafo de G induzido por V'. Uma *clique* (respectivamente, *conjunto independente*) é um subconjunto de vértices induzindo um subgrafo completo (respectivamente, sem arestas), não necessariamente maximal. O grafo completo (respectivamente, sem arestas) com r vértices é denotado por K_r (respectivamente, I_r).

Denotamos por P_k um caminho sem cordas com k vértices e $k-1$ arestas. O comprimento de um caminho P_k é $k-1$. Denotamos por C_k um ciclo sem cordas com k vértices e k arestas. O grafo P_4 com vértices u, v, w, x e arestas uv, vw, wx é denotado por $uvwx$. Os vértices v e w são seus *pontos interiores* e os vértices u e x são seus *pontos extremos*.

Os grafos P_4-laden estendidos foram caracterizados por Giakoumakis (1996) através da técnica de decomposição e por meio de grafos especiais, chamados de *quase-aranhas* e *pseudo-split*. Tais grafos podem ser representados através de uma árvore de decomposição, chamada *árvore primeval*. Antes de apresentarmos tal árvore, introduzimos os grafos p-conexos e p-conexos separáveis.

Dizemos que um grafo G é *p-conexo* se para toda partição de V em dois conjuntos disjuntos não-vazios V_1 e V_2, existe um P_4 induzido *cruzando* os conjuntos V_1 e V_2, isto é, um P_4 induzido contendo vértices tanto de V_1 quanto de V_2. Os *componentes p-conexos* de um grafo são os subgrafos induzidos maximais que são p-conexos. Observe que um componente p-conexo consiste de um único vértice ou de pelo menos quatro vértices.

Um grafo p-conexo é dito *separável* se o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos não-vazios V_1 e V_2 de tal forma que todo P_4 cruzando V_1 e V_2, possui seus pontos interiores em V_1 e seus pontos extremos em V_2. Neste caso, dizemos que (V_1, V_2) é uma *separação* de G.

Teorema 1. [*Jamison e Olariu (1995)*] *Para um grafo arbitrário G, exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *G é desconexo;*
2. *$\overline{G}$ é desconexo;*
3. *Existe um único componente p-conexo separável H de G com uma partição (H_1, H_2) tal que todo vértice não pertencente a H é adjacente a todos os vértices de H_1 e a nenhum vértice de H_2;*
4. *G é p-conexo.*

Como observado por Jamison *et al.* (1995), esse teorema implica, de forma natural, no esquema de decomposição primeval para grafos. Para sermos mais específicos, vamos definir algumas operações.

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos disjuntos. A *união* e o *"join"* de G_1 e G_2 são grafos que resultam, respectivamente, das operações:

- $G_1 \circledcirc G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- $G_1 ① G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1, y \in V_2\})$.

Claramente, as operações ⓪ e ① estão relacionadas aos dois primeiros casos do Teorema 1.

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ um grafo p-conexo separável com separação (V_1^1, V_1^2) e $G_2 = (V_2, E_2)$ um grafo arbitrário disjunto de G_1. O terceiro caso do Teorema 1 é representado pela seguinte operação:

- $G_1 ② G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy | x \in V_1^1, y \in V_2\})$

Como descrito por Jamison *et al.* (1995), todo grafo G ou é um grafo p-conexo ou pode ser obtido unicamente de seus componentes p-conexos (*p-componentes*) e de seus vértices fracos (i.e, aqueles que não estão em nenhuma p-componente de G) através de uma sequência finita de operações ⓪, ① e ②. Além disso, o Teorema 1 nos sugere uma representação de um grafo arbitrário G através da árvore primeval, que é única a menos de isomorfismo e denotada por T_G. Os nós internos de T_G são rotulados por inteiros $i \in \{0, 1, 2\}$, onde um nó i indica que o grafo associado à sub-árvore enraizada neste nó é obtido pelos grafos correspondentes aos seus filhos por uma operação i. As folhas da árvore são componentes p-conexos de G. A Figura 1 ilustra um grafo G e sua árvore primeval T_G.

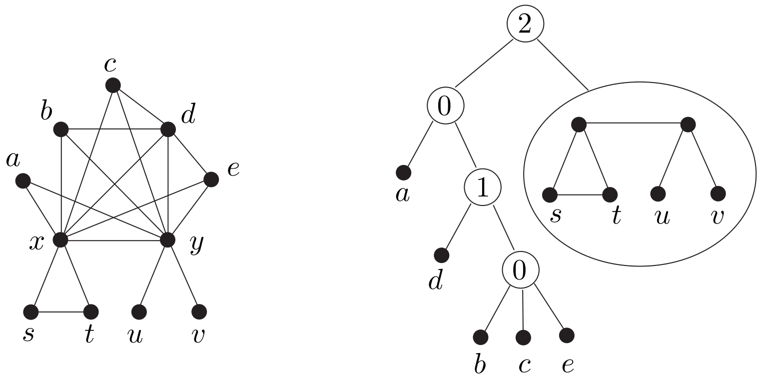


Figura 1: Um grafo G e sua árvore primeval T_G.

Um grafo $G = (V, E)$ é uma *aranha* se V pode ser particionado em três conjuntos $\mathcal{S}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{R}$, onde $\mathcal{S}$ é um conjunto independente, $\mathcal{K}$ é uma clique, $|\mathcal{S}| = |\mathcal{K}| \geq 2$ e existe uma bijeção $f : \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ tal que ou $N_G(v) = \{f(v)\}$, para $v \in \mathcal{S}$ (*aranha magra*) ou $N_G(v) = \mathcal{K}\backslash\{f(v)\}$, para $v \in \mathcal{S}$ (*aranha gorda*). Além disso, todo vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente a todos os vértices de $\mathcal{K}$ e não-adjacente a todos os vértices de $\mathcal{S}$. $\mathcal{R}$ é dito *cabeça* da aranha. A Figura 2 ilustra uma aranha magra e uma aranha gorda.

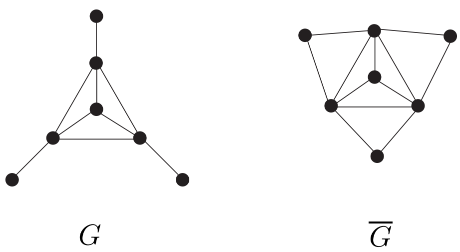
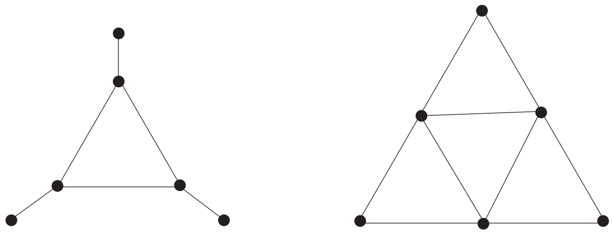


Figura 2: G é uma aranha magra e $\overline{G}$ é uma aranha gorda.

Um grafo G é dito *split* se o seu conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em uma clique $\mathcal{K}$ e um conjunto independente $\mathcal{S}$. Dizemos que $(\mathcal{S}, \mathcal{K})$ é uma partição de $V(G)$; neste caso, escrevemos $G = \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$. Vale observar que tal partição não é necessariamente única. Uma caracterização dos grafos split afirma que um grafo G é split se e somente se G não contém como subgrafo induzido C_5 ou C_4 ou $\overline{C_4}$, denotado também por $2K_2$. Como exemplo, os grafos Z_1 e Z_2 da Figura 3 são grafos split.

Dado um grafo split G com partição $(\mathcal{S}, \mathcal{K})$, dizemos que G é *original* se todo vértice de $\mathcal{S}$ possui um não vizinho em $\mathcal{K}$ e todo vértice de $\mathcal{K}$ possui um vizinho em $\mathcal{S}$. Um grafo G é dito *pseudo-split* se o seu conjunto de vértices possui uma partição $(\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ tal que todo

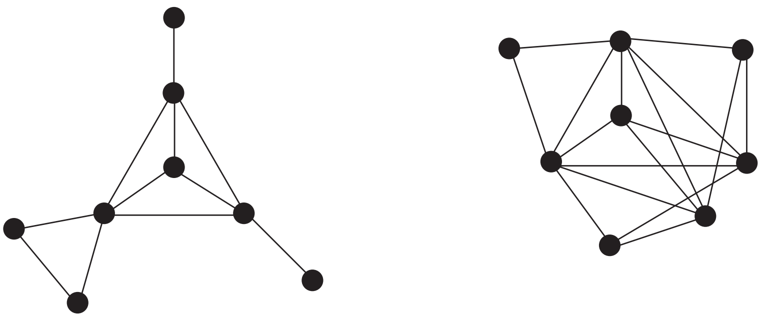


Z_1 $\qquad$ $Z_2 = \overline{Z_1}$

Figura 3: Os grafos Z_1 e Z_2 são grafos split.

vértice de $\mathcal{R}$ é adjacente aos vértices de $\mathcal{K}$ e não-adjacente aos vértices de $\mathcal{S}$, e $\mathcal{S} \cup \mathcal{K}$ induz um grafo split original.

Podemos visualizar $\mathcal{S}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{R}$, respectivamente, como as pernas, o corpo e a cabeça do pseudo-split. Note que $\mathcal{R}$ pode ser vazio e, nesse caso, dizemos que o pseudo-split é sem cabeça. Observe que o complemento de um pseudo-split é também um pseudo-split. Além disso, toda aranha é um pseudo-split. Uma *quase-aranha* é um grafo obtido a partir de uma aranha $\mathscr{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$ com a substituição de no máximo um vértice $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$ por um grafo H isomorfo a K_2 ou $\overline{K_2}$, onde os vértices de H têm a mesma vizinhança de $v \in \mathcal{S} \cup \mathcal{K}$. Uma quase-aranha é dita *magra* se o vértice substituído pertence ao conjunto de vértices de uma aranha magra. Caso contrário, a quase-aranha é dita *gorda*. A Figura 4 nos mostra dois exemplos de quase-aranha: uma quase-aranha magra, com um vértice do conjunto $\mathcal{S}$ substituído por K_2, e uma quase-aranha gorda, com um vértice do conjunto $\mathcal{K}$ substituído por $\overline{K_2}$.



G $\qquad$ $\overline{G}$

Figura 4: G é uma quase-aranha magra e $\overline{G}$ é uma quase-aranha gorda.

O seguinte teorema descreve os componentes p-conexos dos grafos P_4-laden estendidos.

Teorema 2. [*Giakoumakis (1996)*] *Seja C um componente p-conexo de um grafo P_4-laden estendido. Então uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

1. *C é isomorfo a uma quase-aranha sem cabeça;*
2. *C é isomorfo a um pseudo-split sem cabeça;*
3. *C é isomorfo a C_5, P_5 ou $\overline{P_5}$.*

2. Resultado Principal

Nesta seção apresentamos uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento dos grafos P_4-laden-estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

2.1. Caracterização dos grafos P_4-laden-estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$

O teorema seguinte caracteriza, por subgrafos proibidos, os grafos P_4-laden-estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

Teorema 3. *Seja G um grafo P_4-laden estendido. G é um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 5 como subgrafo induzido.*

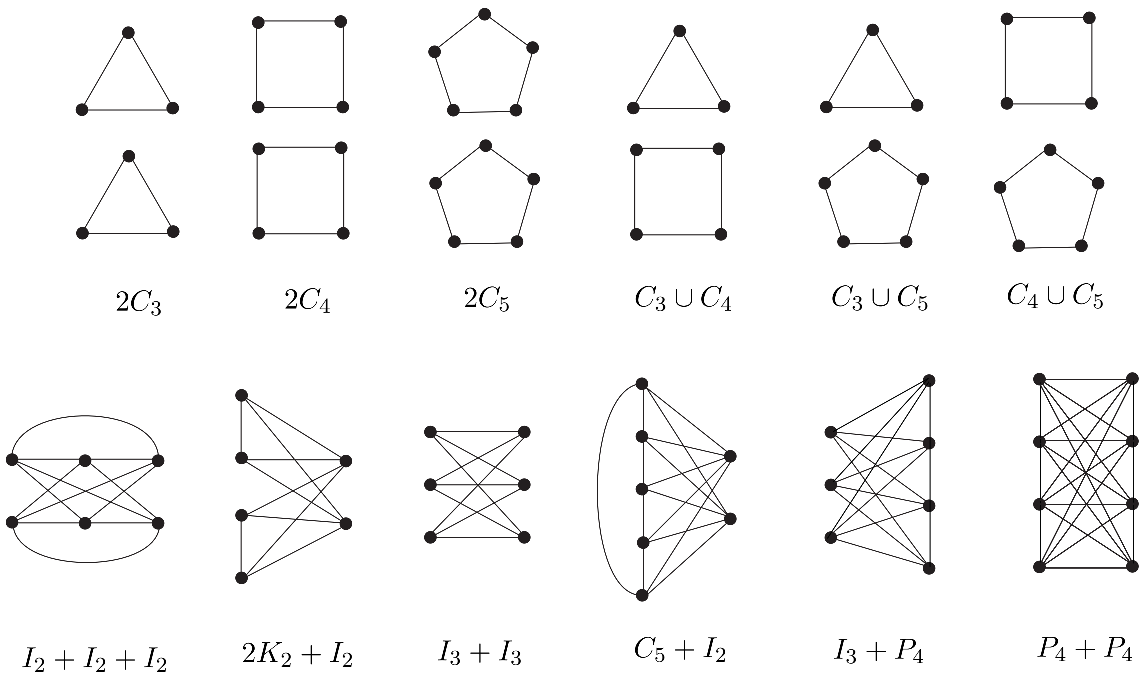


Figura 5: Subgrafos proibidos minimais dos grafos P_4-laden estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

PROVA: $(\Rightarrow)$ É fácil verificar que se G contém qualquer um dos subgrafos da Figura 5 então G não é um grafo P_4-laden estendido-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$.

$(\Leftarrow)$ Seja G um grafo P_4-laden estendido que não é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Neste caso, G contém um subgrafo induzido G' que não é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ e que é minimal por vértices em relação à propriedade de ser

$(\mathcal{C},\mathcal{F})$, ou seja, para todo vértice $v \in V(G')$, $G' - v$ é um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $G' = G$. Devemos mostrar que G é um dos subgrafos da Figura 5. Procedemos considerando três casos:

CASO 1: G é desconexo.

Escreva $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i conexo; Por minimalidade de G, cada G_i é $(\mathcal{C},\mathcal{F})$. Além disso, cada G_i não pode ser uma árvore, caso contrário, $G' = G/G_i$ seria $(\mathcal{C},\mathcal{F})$, e $G = G' \cup G_i$ também seria um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$, uma contradição. Então, cada G_i deve conter um ciclo, isto é, C_3, C_4 ou C_5, pois G é um P_4-laden estendido. Como G não é uma grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ e é minimal então $G = G_1 \cup G_2$. Portanto, G é um dos subgrafos $C_3 \cup C_3$, $C_3 \cup C_4$, $C_3 \cup C_5$, $C_4 \cup C_4$, $C_4 \cup C_5$, ou $C_5 \cup C_5$.

CASO 2: $\overline{G}$ é desconexo.

Pelas propriedades da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou contém um par de vértices não adjacentes. Como G é minimal, podemos concluir que cada G_i contém um par de vértices não adjacentes (pois caso contrário, se algum G_i é trivial, por minimalidade $G' = G - G_i$ é um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ e então G seria um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$. Contradição!). Se $k \geq 3$ então, por minimalidade de G, $G = I_2 + I_2 + I_2$. Agora, vamos analisar o caso onde $k = 2$. Consideramos três subcasos:

- *CASO 2.1:* Ambos G_1 e G_2 contêm I_3. Então, por minimalidade de G, $G = I_3 + I_3$.
- *CASO 2.2:* Algum dos grafos G_1, G_2 não contém I_3.

  Sem perda de generalidade, suponhamos que G_2 não contém I_3.

  - *CASO 2.2.1:* G_2 contém C_5.
    Como G_1 contém um par de vértices não adjacentes, por minimalidade de G temos $G = I_2 + C_5$.
  - *CASO 2.2.2:* G_2 não contém C_5.
    Vamos analisar 4 subcasos:
    * *CASO 2.2.2.a:* G_1 e G_2 contêm P_4.
      Por minimalidade de G, $G = P_4 + P_4$.
    * *CASO 2.2.2.b:* G_1 contém P_4 e G_2 não contém P_4.
      Como $\overline{G_2}$ não contém C_3 e não contém P_4, temos que G_2 é um cografo livre de triângulos e, dessa forma, um grafo bipartido completo. Isto é, $V(G_2)$ é uma união de duas cliques isoladas C e C'. Assuma $|C| \geq |C'|$. Se $|C'| \geq 2$ então $G = G_1 + G_2$ não é minimal, pois contém propriamente $I_2 + 2K_2$. Logo, temos $|C'| = 1$. Analisemos mais dois subcasos:
      - Se G_1 é um grafo split então $V(G_1)$ pode ser particionado em um conjunto independente, S_1, e uma clique, C_1. Portanto, G é um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$, onde $\mathcal{C}$ induz o grafo $G[C] + G[C_1]$ e $\mathcal{F}$ induz o grafo $G[C'] + G[S_1]$. Contradição!
      - Se G_1 não é um grafo split então G_1 contém um subgrafo H isomorfo a $2K_2$, C_4 ou C_5. Como G_2 contém um subgrafo induzido isomorfo a I_2, podemos concluir, pela minimalidade de G, que G é isomorfo a $I_2 + 2K_2$ (se $H = 2K_2$), ou $I_2 + I_2 + I_2$ (se $H = C_4$), ou $I_2 + C_5$ (se $H = C_5$).
    * *CASO 2.2.2.c:* G_1 não contém P_4 e G_2 contém P_4.
      Neste subcaso, G claramente é isomorfo a $I_3 + P_4$, por minimalidade.

* *CASO 2.2.2.d:* G_1 e G_2 não contêm P_4.
  A análise é análoga ao caso 2.2.2.*b*.

CASO 3: G e $\overline{G}$ são conexos. Como G é um grafo P_4-laden estendido, seus componentes podem ser P_5, $\overline{P_5}$, C_5, um pseudo-split ou uma quase-aranha.

Se $G \cong P_5$ ou $G \cong \overline{P_5}$ ou $G \cong C_5$ então G é um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Contradição!

Se G é um pseudo-split então $V(G)$ possui a partição $(\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{R})$. Observe que, por minimalidade, o grafo induzido por $\mathcal{R}$ é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ com partição (C_1, F_1). Logo temos que G é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ com $\mathcal{C} = \mathcal{K} \cup C_1$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup F_1$. Impossível!

Se G é uma quase-aranha, analisaremos quatro casos:

- *CASO 3.1:* G é uma quase-aranha com substituição de $s \in \mathcal{S}$ por um grafo isomorfo a I_2 com vértices u, v. Temos que $\mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{K}$ induz um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\}$. Temos que o grafo formado por $G \backslash (\mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{K}) = G[\mathcal{R}]$ é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ com partição (C_1, F_1), por minimalidade. Logo temos que G é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K} \cup C_1$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{F}_1$. Contradição!

- *CASO 3.2:* G é uma quase-aranha com substituição de $k \in \mathcal{K}$ por um grafo isomorfo a K_2 com vértices u, v. Temos que $\mathcal{S} \cup \mathcal{K} - \{k\} \cup \{u, v\}$ induz um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K} - \{k\} \cup \{u, v\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S}$. Temos que o grafo formado por $G \backslash (\mathcal{S} \cup \mathcal{K} - \{k\} \cup \{u, v\}) = G[\mathcal{R}]$ é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ com partição (C_1, F_1), por minimalidade. Logo temos que G é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K} - \{k\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup \mathcal{F}_1$. Contradição!

- *CASO 3.3:* G é uma quase-aranha com substituição de $s \in \mathcal{S}$ por um grafo isomorfo a K_2 com vértices u, v. Temos que $\mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{K}$ induz um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\}$. Temos que o grafo formado por $G \backslash (\mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{K}) = G[\mathcal{R}]$ é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$com partição (C_1, F_1), por minimalidade. Logo temos que G é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$, com $\mathcal{C} = \mathcal{K} \cup \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} - \{s\} \cup \{u, v\} \cup \mathcal{F}_1$. Contradição!

- *CASO 3.4:* G é uma quase-aranha com substituição de $k \in \mathcal{K}$ por um grafo isomorfo a I_2 com vértices u, v. Vamos analisar dois casos:

  - $G[\mathcal{R}]$ é um grafo split. Então $\mathcal{R}$ pode ser particionado em um conjunto independente I e uma clique C. Logo, G é um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ com $\mathcal{C} = \mathcal{K} - \{u\} \cup C$ e $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup \{v\} \cup I$. Impossível.
  - $G[\mathcal{R}]$ não é um grafo split. Neste caso, $G[\mathcal{R}]$ contém $2K_2$, C_4 ou C_5. Por minimalidade, temos então que $G = I_2 + 2K_2$ ou $G = I_2 + I_2 + I_2$ ou $G = I_2 + C_5$.

2.2. Reconhecimento dos grafos P_4-laden estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ em tempo linear

Em consequência do Teorema 5, podemos desenvolver um algoritmo para reconhecer se um grafo G P_4-laden estendido, com sua árvore primeval T_G, é $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. A complexidade do algoritmo é linear devido a três fatos: (i) a árvore primeval pode ser computada em tempo linear; (ii) todos os testes lógicos do algoritmo podem ser executados em tempo linear; (iii) cada chamada recursiva para verificar se um subgrafo-filho de um nó é um grafo-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ pode ser feita em tempo linear, pois, para todo nó H na árvore primeval, os subgrafos-filhos de H determinam uma partição de $V(H)$.

1 **Algoritmo de reconhecimento de grafos P_4-laden estendidos-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$**
2 Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ os filhos de G na árvore de decomposição primeval T_G
3 **se** *G é desconexo* **então**
4 **se** *G_i é acíclico, para todo $i = 1, \ldots, k$* **então**
5 retorne SIM e a partição clique-floresta $(\emptyset, V(G))$
6 **se** *existem G_i, G_j não acíclicos $(i \neq j)$* **então**
7 retorne NÃO e o subgrafo proibido $B_i \cup B_j$, onde B_h é um ciclo de G_h, $h = i, j$
8 **se** *existe exatamente um G_i não acíclico* **então**
9 **se** *G_i é, recursivamente, um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ com partição (C_i, F_i)* **então**
10 retorne SIM, e a partição clique-floresta $(C_i, V(G_i) \backslash C_i)$
11 **senão**
12 retorne NÃO e um subgrafo proibido H_i de G_i
13 **se** *$\overline{G}$ é desconexo* **então**
14 **se** *G_i é trivial, para todo $i = 1, \ldots, k$,* **então**
15 retorne SIM e a partição clique-floresta $(V(G), \emptyset)$
16 **se** *existe exatamente um G_i não trivial* **então**
17 **se** *G_i é, recursivamente, um grafo-$(\mathcal{C},\mathcal{F})$ com partição (C_i, F_i)* **então**
18 retorne SIM, e a partição clique-floresta $(V(G_i) \backslash F_i, F_i)$
19 **senão**
20 retorne NÃO e um subgrafo proibido H_i de G_i
21 **se** *existem G_i, G_j, G_k não triviais $(i \neq j \neq k)$* **então**
22 retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_2 + I_2 + I_2$
23 **se** *existem exatamente dois subgrafos G_i, G_j, não triviais $(i \neq j)$* **então**
24 **se** *ambos G_i e G_j contêm I_3* **então**
25 retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_3 + I_3$
26 **se** *algum dos subgrafos G_i, G_j não contêm I_3, digamos G_j* **então**
27 **se** *G_j contém C_5* **então**
28 retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_2 + C_5$
29 **senão**
30 **se** *G_i e G_j contêm P_4* **então**
31 retorne NÃO e o subgrafo proibido $P_4 + P_4$
32 **se** *G_i contém P_4 e G_j não contém P_4* **então**
33 sejam C_j, C_j' as cliques tais que $V(G_j) = C_j \cup C_j'$ e $|C_j| \geq |C_j'|$
34 **se** $|C_j'| \geq 2$ **então**
35 retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_2 + 2K_2$
36 **senão**
37 **se** *G_i é um grafo split* **então**
38 retorne SIM e a partição clique-floresta $(C_i \cup C_j \cup D, I_i \cup C_j')$, onde $V(G_i)$ é particionado em um conjunto independente I_i e uma clique C_i e $D = \bigcup_{t \neq i,j} V(G_t)$
39 **senão**
40 tome um subgrafo proibido H de G_i isomorfo a $2K_2$ ou C_4 ou C_5, e retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_2 + 2K_2$ (se $H = 2K_2$) ou $I_2 + I_2 + I_2$ (se $H = C_4$) ou $I_2 + C_5$ (se $H = C_5$)
41 **se** *G_i não contém P_4 e G_j contêm P_4* **então**
42 retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_3 + P_4$
43 **se** *G_i e G_j não contêm P_4* **então**
44 execute o mesmo procedimento das linhas 34 a 41
45 **se** *G e $\overline{G}$ são conexos* **então**
46 **se** *$G = P_5$ ou $G = \overline{P_5}$ ou $G = C_5$ ou G é um pseudo-split ou G é uma quase-aranha com substituição de: $s \in S$ por K_2, $s \in S$ por $\overline{K_2}$ ou $k \in K$ por K_2* **então**
47 retorne SIM
48 **senão**
49 **se** *R induz um grafo split* **então**
50 retorne SIM
51 **senão**
52 tome um subgrafo proibido H de G_i isomorfo a $2K_2$ ou a C_4 ou a C_5, e retorne NÃO e o subgrafo proibido $I_2 + 2K_2$ (se $H = 2K_2$) ou $I_2 + I_2 + I_2$ (se $H = C_4$) ou $I_2 + C_5$ (se $H = C_5$)
53 Fim do algoritmo.

3. Conclusão

Neste trabalho, usamos fortemente a estrutura dos grafos P_4-laden estendidos e a árvore de decomposição primeval para caracterizarmos, por subgrafos proibidos, os grafos P_4-laden-estendidos-$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Como consequência, desenvolvemos um algoritmo de reconhecimento em tempo linear para a classe supramencionada.

Referências

[1] **Bransdstädt, A.** Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152 (1996) 47–54.

[2] **Bransdstädt, A.** The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998) 59–73.

[3] **Bravo, R. S. F., Klein, S., and Nogueira, L. T.** Characterizing (k, l)-partitionable cographs. In: *7th International Colloquium on Graph Theory*, 2005, Hyeres, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 22 (2005) 277–280.

[4] **R.S.F. Bravo, S. Klein, L.T. Nogueira e F. Protti**, Characterization and recognition of P_4-sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011) 165–173.

[5] **S. P. de Brito, S. Klein, L. T. Nogueira e F. Protti**. Partição Floresta-clique de Cografos. *XL SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, João Pessoa, PB, september 2008.

[6] **Corneil, D. G., Lerchs, H., and Burlingham, L. S.** Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981) 163–174.

[7] **Damaschke, P.** Induced subgraphs and well-quasi-ordering. *Journal of Graph Theory* 14 (1990) 427–435.

[8] **Demange, M., Ekim, T., and de Werra, D.** Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization* 2 (2005) 145–153.

[9] **Ekim, T.** *Generalized Vertex Coloring Problems Using Split Graphs*. PhD Thesis, EPFL, number 3629 (2006).

[10] **Feder, T., and Hell, P.** Matrix partitions of perfect graphs. Special Issue of *Discete Mathematics*, in Memory of Claude Berge (2005).

[11] **Feder, T., Hell, P., and Hochstättler, W.** Generalized colourings (matrix partitions) of cographs. Manuscript, 2005.

[12] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** Complexity of graph partition problems. *31st Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 464–472. Plenum Press, New York, 1999.

[13] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., and Motwani, R.** List partitions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 16 (2003) 449-478.

[14] **Feder, T., Hell, P., Klein, S., Hochstättler W.** Generalized Colouring (Matrix Partitions) of Cographs. *Trends in Mathematics* 2006 149–167

[15] **Garey, M. R., Johnson, D. S., and Stockmeyer, L.** Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science* 1 (1976) 237–267.

[16] **V. Giakoumakis** P_4-laden graphs: a new class of brittle graphs. *Information Processing Letters* 60 (1996) 29–36.

[17] **Giakoumakis, V, Roussel, H, Thuillier, H.** On P_4-tidy graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 1 (1997) 17–41.

[18] **Gimbel, J.** *The Chromatic and Cochromatic Number of a Graph.* PhD thesis, Estern Michigan University, 1984.

[19] **Golumbic, M. C.** *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press, New York, 1980.

[20] **Hell P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** On generalized split graphs. *GRACO 2001 – Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms, and Optimization. Eletronic Notes in Discrete Mathematics* 7 (2001), Elsevier.

[21] **Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., and Protti, F.** Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004) 185–194.

[22] **Jamison, B., Olariu, S.** p-components and the homogeneous decomposition of graphs *SIAM Journal Discrete Mathematics* 8 (1995) 448–463.

[23] **Lerchs, H.** On cliques and kernels. Technical Report, Department of Computer Science, University of Toronto, March 1971.

[24] **McConnell, R. M., and Spinrad, J. P.** Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics* 201 (1999) 189–241.

[25] **Yang, A., and Yuan, J.** Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set. *Discrete Mathematics* 306 (2006) 1207–1216.