

Propriedades Espectrais dos Grafos do tipo *Aranha*

Renata R. Del-Vecchio

renata@vm.uff.br

Atila Arueira Jones

atilajones@id.uff.br

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense- UFF
Rua Mário Santos Braga S/N Valonguinho
Niteroi, RJ

Resumo

Os grafos aranha vêm sendo estudados recentemente em problemas de coloração. Como o número cromático de um grafo está relacionado com seu índice (maior autovalor da matriz de adjacência do grafo), investigaremos neste trabalho o espectro dos grafos aranha magra e aranha gorda e dos subgrafos induzidos pela união de C (conjunto dos vértices do corpo da aranha) e K (conjunto dos vértices da cabeça da aranha) com atenção especial para o índice destes grafos. Provamos que nenhum destes grafos é um grafo integral. Estabelecemos ainda condições para que o índice de cada um seja um número inteiro, gerando famílias infinitas de grafos-aranha não-integrais com índice inteiro.

PALAVRAS CHAVE: grafo-aranha, join de grafos, índice de grafo, grafo integral.

Área: TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos

Abstract

The spider graphs have been studied recently in coloring problems. Since the chromatic number of a graph is related to its index (the largest eigenvalue of the adjacency matrix of the graph), the aim of this paper is to investigate the spectrum of the thin spider and the thick spider and the spectrum of the spider subgraph induced by the union of C (vertex set of the spiders body) and K (vertex set of the spiders head), with special emphasis on the index of these graphs.. We prove that all these graphs are non integral graphs. We have also established conditions for the index of each one to be an integer, generating infinite families of non-integral spider graphs with integer index.

KEYWORDS: spider graph, join of graphs, index of a graph, integral graph.

Area: TAG - Theory and Algorithms in Graphs

1 Introdução

Os grafos com poucos P_4 têm sido alvo de interesse em problemas de coloração. Em especial, os grafos aranha vêm sendo estudados neste contexto, [3]. No entanto, não são conhecidos resultados espectrais de tais grafos.

Dentre as investigações em Teoria Espectral de Grafos, a busca por grafos integrais, isto é, aqueles que têm todos os autovalores inteiros, vem despertando grande interesse desde 1974, quando Harary and Schwenk colocaram a questão "Which graphs have integral spectra?", em [7]. A partir daí muitos outros artigos abordaram a questão, tais como, [1], [8] e [2].

Observamos entretanto que, em muitas aplicações, é relevante apenas que o índice (maior autovalor) seja um número inteiro. Como o índice e o número cromático são invariantes relacionados por desigualdades, [9], [4], eles poderão coincidir apenas quando o índice for um número inteiro..

Isto nos motivou a buscar grafos não-integrais com índice inteiro. No presente trabalho obtemos o espectro dos grafos *aranha gorda* e *aranha magra*, no caso especial em que a cabeça é um conjunto independente. Nestes dois casos constatamos que o grafo nunca é integral. Obtemos então condições que garantem que o índice seja um número inteiro e, a partir daí, são geradas famílias infinitas de grafos nestas classes, com índice inteiro.

Seguindo nesta mesma linha de investigação, estudamos grafos formados por *join* de dois grafos regulares, um grafo correspondendo ao corpo e outro à cabeça, de acordo com a definição da aranha, mas considerando o conjunto das pernas vazio. São os grafos aqui denominados de *aranhas sem pernas*. Também nesta classe obtemos famílias infinitas de grafos não integrais com índice inteiro.

2 Noções básicas

Nesta seção estabeleceremos as definições, notações e resultados sobre grafos e matrizes, necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples com n vértices e $D(G) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ a matriz diagonal dos graus dos vértices.

Seja $A(G) = (a_{ij})$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a matriz de *adjacência* de G .

O espectro de G é o espectro de $A(G)$ e o índice de G é o maior autovalor de $A(G)$, denotado por $\text{ind}(G)$.

Indicaremos por \mathbb{J} a matriz com todas as entradas iguais a um e por Θ a matriz nula.

Enunciaremos um lema (ver [6]) sobre matrizes, essencial nas provas das duas primeiras proposições.

LEMA 2.1. *Seja M uma matriz quadrada de ordem n . Suponhamos que M seja da forma*

$$M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,k} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,k} \end{bmatrix},$$

onde $M_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$, é uma matriz de $n_i \times n_j$ tal que suas linhas têm somas constantes iguais a c_{ij} . Seja $\bar{M} = [c_{ij}]_{k \times k}$.

Então, os autovalores de \bar{M} são também autovalores de M .

Lembramos agora a definição de *join* de dois grafos e um resultado sobre o polinômio característico do grafo resultante do *join* de grafos regulares.

DEFINIÇÃO 2.1. [5] O join dos grafos G_1 e G_2 , é o grafo $G_1 \vee G_2$ obtido de $G_1 \cup G_2$ inserindo todas as arestas entre os vértices de G_1 e G_2

PROPOSIÇÃO 2.1. [5] Para $i = 1, 2$, seja G_i um grafo r_i – regular com n_i vértices. Então o polinômio característico do grafo $G_1 \vee G_2$ é:

$$P(x) = \frac{P(G_1, x) \cdot P(G_2, x)}{(x - r_1)(x - r_2)} f(x),$$

onde $f(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 - n_1 n_2$.

Definiremos agora os grafos aranha.

DEFINIÇÃO 2.2. [3] Um grafo $G(V, E)$ é uma aranha se o conjunto V pode ser particionado em conjuntos S, C e K tais que $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ é um conjunto independente, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ uma clique; existem todas as arestas entre os vértices de K e C e não há arestas entre os vértices de K e S . Por último temos que s_i é adjacente a c_j se, e somente se, $i = j$ (denominando aranha magra), ou quando $i \neq j$ (aranha gorda). Os conjuntos S, C e $K = \{r_1, \dots, r_j\}$ são chamados, pernas, corpo e cabeça da aranha, nesta ordem.

Notação: Um grafo do tipo aranha magra será denotada por $G_m[k, j]$, onde suas pernas e seu corpo possuem, cada, k vértices e a cabeça possui j vértices. O grafo do tipo aranha gorda será denotado por $G_g[k, j]$

EXEMPLO 2.1. Exemplo de um grafo do tipo aranha magra cuja cabeça forma um conjunto independente.

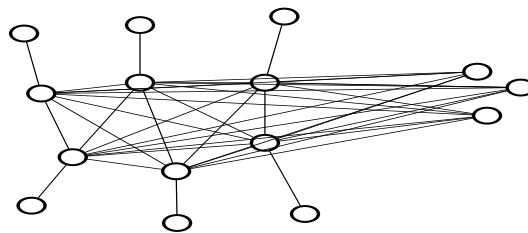


Figura 1: $G_m[6,3]$

EXEMPLO 2.2. Exemplo de um grafo do tipo aranha gorda cuja cabeça forma um conjunto independente.

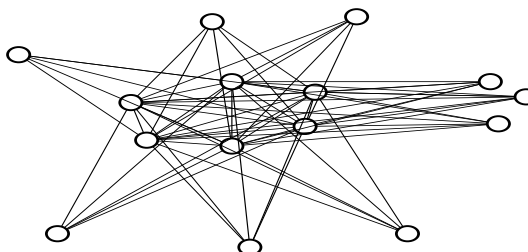


Figura 2: $G_g[6,3]$

3 Propriedades Espectrais das aranhas

3.1 Aranha Magra

PROPOSIÇÃO 3.1. *Seja $G_m[k, j]$ uma aranha magra, cuja cabeça é formada por um conjunto independente, então o seu espectro é:*

$$\text{spect}(G_m[k, j]) = \left(\begin{array}{ccccc} \frac{k-1-\sqrt{(k-1)^2+4kj+4}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2+4kj+4}}{2} \\ 1 & k-1 & j & k-1 & 1 \end{array} \right)$$

Demonstração. Seja $G_m[k, j]$ um grafo do tipo aranha magra, cuja cabeça é um conjunto independente. Afim de não sobrecarregar a notação, vamos escrever somente G_m quando estivermos nos referindo ao grafo $G_m[k, j]$. Podemos escrever a matriz de adjacência de tal grafo:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

Esta matriz pode ser reescrita como uma matriz em blocos:

$$A(G_m) = \begin{bmatrix} (\mathbb{J} - I)_{k \times k} & I_{k \times k} & \mathbb{J}_{k \times j} \\ I_{k \times k} & \Theta_{k \times k} & \Theta_{k \times j} \\ \mathbb{J}_{j \times k} & \Theta_{j \times k} & \Theta_{j \times j} \end{bmatrix}$$

Note que todas as matrizes blocos que compõem a matriz $A(G_m)$ somam, em suas linhas, o mesmo valor para cada matriz. Assim consideremos a matriz $\bar{A}_{3 \times 3}$ cujas entradas são tais somas, ou melhor:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & j \\ 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então pelo Lema 2.1, garantimos que os autovalores de \bar{A} também são autovalores da matriz $A(G_m)$, que podem ser obtidos facilmente:

$$p(x) = \begin{vmatrix} k-1-x & 1 & j \\ 1 & -x & 0 \\ k & 0 & -x \end{vmatrix} = x(-x^2 + x(k-1) + kj + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{k-1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 4kj + 4}}{2} \quad (3.1)$$

que são os autovalores de \tilde{A} .

Por outro lado, note que para cada $u \in \mathbb{R}^j$ ortogonal à $\vec{\mathbf{1}}_j$ temos um vetor $v = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}}_k \\ \vec{\mathbf{0}}_k \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k+j}$,

onde $[A(G_m)].v = \vec{\mathbf{0}} = 0.v$, daí temos que 0 é autovalor da matriz $A(G_m)$ correspondente ao autovetor $v \in \mathbb{R}^{2k+j}$. Como existem $j-1$ vetores, linearmente independentes, do \mathbb{R}^j perpendiculares a $\vec{\mathbf{1}}_j$, então 0 é autovalor de G_m com multiplicidade pelo menos $j-1$.

Daí e 3.1 já obtemos que 0 é autovalor de G_m com multiplicade ao menos j .

Provaremos agora que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é autovalor do grafo. Para isso, de forma análoga ao feito acima, para cada vetor $u \in \mathbb{R}^j$ ortogonal à $\vec{\mathbf{1}}_j$ considere o vetor $w = \begin{bmatrix} u \\ -\frac{-1+\sqrt{5}}{2}u \\ \vec{\mathbf{0}}_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k+j}$. As-

$$\text{sim: } [A(G_m)].w = \begin{bmatrix} -u - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}u \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2}u \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} u \\ -\frac{-1+\sqrt{5}}{2}u \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.w. \text{ Con-}$$

cluímos que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é autovalor do grafo com multiplicidade $k-1$.

Por procedimento semelhante podemos concluir que $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é autovalor com multiplicidade $k-1$.

Obtivemos exatamente $j+2k$ autovalores, completando o espectro do grafo aranha conforme desejado. ■

Observação: Decorre do teorema acima que, para $k \geq 2$, a aranha magra com cabeça formada por conjunto independente $G_m[k, j]$ não é um grafo integral.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Seja $G_m[k, j]$ um grafo aranha magra cuja cabeça é um conjunto independente. Se $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $k = j(j-3) + 1$, então $\text{ind}(G_m[k, j]) \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $G_m[k, j]$ um grafo aranha magra cuja cabeça é um conjunto independente. Como $j \geq 3$ e $k = j(j-3) + 1$, pela Proposição 3.1 temos que $\text{ind}[G_m[k, j]] = \frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2+4kj+4}}{2}$. Substituindo k por $j(j-3) + 1$ e simplificando, podemos verificar que $\text{ind}(G_m[k, j]) = \frac{j(j-3)+j(j-3)+(2j-2)}{2} = j^2 - 2j - 1 \in \mathbb{N}$. ■

3.2 Aranha Gorda

PROPOSIÇÃO 3.3. *Seja $G_g[k, j]$ um grafo aranha gorda, cuja cabeça é um conjunto independente. Então o espectro de tal grafo pode ser dado por:*

$$\text{spect}(G_g[k, j]) = \begin{pmatrix} \frac{k-1-\sqrt{5(k-1)^2+4kj}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{k-1+\sqrt{5(k-1)^2+4kj}}{2} \\ 1 & k-1 & j & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstração. Seja $G_g[k, j]$ um grafo do tipo aranha gorda, cuja cabeça é um conjunto independente. Novamente, escreveremos apenas G_g quando estivermos nos referindo ao grafo $G_g[k, j]$. Daí, obtemos a matriz de adjacência do grafo aranha gorda:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

que pode ser reescrita em blocos como:

$$A(G_g) = \begin{bmatrix} (\mathbb{J} - I)_{k \times k} & (\mathbb{J} - I)_{k \times k} & \mathbb{J}_{k \times j} \\ (\mathbb{J} - I)_{k \times k} & \Theta_{k \times k} & \Theta_{k \times j} \\ \mathbb{J}_{j \times k} & \Theta_{j \times k} & \Theta_{j \times j} \end{bmatrix}$$

Ao substituir cada bloco pela soma de suas respectivas linhas, obtemos a matriz $\bar{A} = \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & j \\ k-1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Novamente, pelo Lema 2.1, sabemos que os autovalores de \bar{A} também são valores do grafo aranha gorda G_g e ainda, tais autovalores são

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{k-1 \pm \sqrt{5(k-1)^2 + 4kj}}{2} \tag{3.2}$$

Por outro lado, de forma completamente semelhante ao feito no caso da aranha magra, mostraremos os demais autovalores do grafo. Para isso, considere para cada $u \in \mathbb{R}^j$ tal que $u \perp \vec{\mathbf{1}}_j$, o vetor

$$v = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}}_k \\ \vec{\mathbf{0}}_k \\ u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k+j}.$$

É fácil verificar que $A(G_g).v = \vec{\mathbf{0}} = 0$. $\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{0}}_k \\ \vec{\mathbf{0}}_k \\ u \end{bmatrix}$, donde segue que 0 é autovalor de G_g com multiplicidade ao menos $j - 1$. Daí e 3.2 garantimos que 0 é autovalor da aranha gorda com multiplicidade ao menos j .

Ainda de forma semelhante ao feito com a aranha magra, notemos que para cada $u \in \mathbb{R}^k; u \perp \vec{\mathbf{1}}_k$ o vetor $w = \begin{bmatrix} u \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}.u \\ \vec{\mathbf{0}}_j \end{bmatrix}$ satisfaz a igualdade $A(G_g).w = \begin{bmatrix} -u - \frac{\sqrt{5}-1}{2}.u \\ -u \\ \vec{\mathbf{0}}_j \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.w$, garantindo que $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é autovalor do grafo com multiplicidade ao menos $k - 1$. Pelo mesmo raciocínio,

para cada $u \in \mathbb{R}^k$; $u \perp \vec{1}_k$ temos que $A(G_g) \cdot \begin{bmatrix} u \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot u \\ \mathbf{0}_j \end{bmatrix} = \frac{+\sqrt{5}-1}{2} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \cdot u \\ \mathbf{0}_j \end{bmatrix}$, garantindo que

$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ é autovalor do grafo aranha gorda com multiplicidade $k-1$.

Exibimos assim todo o espectro do grafo G_g . ■

Observação: Decorre do teorema acima que, também neste caso, para $k \geq 2$, a aranha gorda com cabeça formada por conjunto independente $G_g[k, j]$ não é um grafo integral.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Seja $G_g[k, j]$ um grafo aranha gorda com a cabeça formando um conjunto independente. Se j for um quadrado perfeito e $k = j \pm 3\sqrt{j} + 1$ então $ind(G_g)$ é um número inteiro.*

Demonstração. Seja G_g um grafo aranha gorda cuja cabeça é um conjunto independente. Da Proposição 3.3 sabemos que $ind(G_g) = \frac{k-1+\sqrt{5(k-1)^2+4kj}}{2}$. Consideremos que j é um quadrado perfeito.

Suponha o caso em que $k = j - 3\sqrt{j} + 1$, ao substituir no índice do grafo, encontramos $ind(G_g) = \frac{j-3\sqrt{j}+\sqrt{(3\sqrt{j}-7)^2j}}{2} = 2j - 5\sqrt{j}$ que é um número inteiro, uma vez que j é um quadrado perfeito.

Por outro lado, se $k = j + 3\sqrt{j} + 1$, por raciocínio análogo ao caso anterior, obtemos que $ind(G_g) = 2j + 5\sqrt{j}$ que também é um número inteiro, concluindo assim a prova. ■

3.3 Aranha Sem Pernas

Introduziremos agora uma nova definição, que pode ser vista como uma variação dos grafos do tipo aranha.

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja $G[k, j]$ um grafo aranha. O subgrafo induzido por $K \cup C$ é chamado grafo do tipo Aranha Sem Pernas.*

Observação: Note que um grafo do tipo Aranha Sem Pernas é o grafo $K_k \vee G$, onde K_k é o grafo completo de k vértices que representa o corpo e G a cabeça da aranha, com j vértices. Assim, a aranha sem pernas será denotada por $K_k \vee G_j$.

Da Proposição 2.1 segue que, se G_j for um grafo regular não-integral então a aranha sem pernas $K_k \vee G_j$ é não integral. Ainda como decorrência da Proposição 2.1, obtemos o próximo corolário, que estabelece condições para obtenção de grafos deste tipo não-integrais mas com índice inteiro.

COROLÁRIO 3.1. *Seja $K_k \vee G_j$ um grafo aranha sem pernas com $k, j \geq 3$. Se G_j é 2-regular tal que $(k-3)^2 + 4kj$ é um quadrado perfeito então $ind(K_k \vee G_j) \in \mathbb{N}$*

Demonstração. Seja $H = K_k \vee G_j$ com $k, j \geq 3$ onde G_j é 2-regular. Considere ainda que $\exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $(k-3)^2 + 4kj = m^2$. Pela Proposição 2.1, como o grau de G_j é 2 e de K_k é $k-1$, segue que o polinômio característico de H é:

$$p_s(x) = \frac{P(K_k, x) \cdot P(G_j, x)}{(x - (k-1))(x-2)} f(x),$$

com $f(x) = x^2 - (k+1)x + 2(k-1) - kj$.

Sabemos que a maior raiz de $f(x)$ é $p = \frac{k+1+\sqrt{(k-3)^2+4kj}}{2}$

Vamos mostrar que p é o índice de H . Sabemos que o $ind(K_k) = k-1$ e $ind(G_j) = 2$ já que são grafos $(k-1)$ -regular e 2-regular nesta ordem. Por outro lado, sabemos que os autovalores de

$H = K_k \vee G_j$ são os autovalores do grafo K_k , do grafo G e as raízes de $f(x)$, exceto os autovalores $(k - 1)$ e 2 (por simplificação da fração). Então p é índice de H se $p > k - 1$ e $p > 2$. De fato, como $k, j \geq 3$ temos que $p > \frac{k+1+\sqrt{(k-3)^2}}{2} = k - 1$ e como $k - 1 \geq 2$, também segue que $p > 2$, garantindo que p é o índice do grafo H . Observando que k e m têm a mesma paridade, temos que $p = \frac{k+1+m}{2}$ é um inteiro.



O próximo corolário, consequência imediata do anterior, nos permite gerar infinitos grafos com índice inteiro.

COROLÁRIO 3.2. *Seja $K_k \vee G_j$ um grafo aranha sem pernas onde G_j é um grafo 2-regular. Para $t, k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 3$, seja $j = (t^2 - t)k + 3t$. Então $ind(K_k \vee G_j)$ é inteiro.*

Observação: Para $t, k \in \mathbb{N}$ com $t \geq 1$ e $k \geq 3$, com $j = (t^2 - t)k + 3t$, temos que $K_k \vee C_j$ é não-integral e tem índice inteiro. O espectro do ciclo é conhecido e sabemos que C_j é integral se, e somente se, $j = 3, 4$ ou 6 . A condição $t \geq 1$ implica que $C_j \neq C_3$ e os casos $j = 4$ e $j = 6$ não satisfazem as condições para nenhum t e k .

EXEMPLO 3.1. *Considere o grafo aranha $K_4 \vee C_5$. Neste caso como a cabeça é um subgrafo ciclo C_5 , pelo Corolário 3.1 temos $ind(K_4 \vee C_5) = \frac{5+\sqrt{81}}{2} = 7$.*

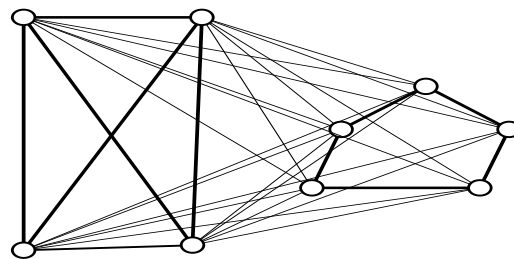


Figura 3: $K_4 \vee C_5$

COROLÁRIO 3.3. *Seja $K_k \vee G_j, j \geq k$ um grafo aranha sem pernas onde G_j é um grafo $(k - 1)$ -regular. Se kj é um quadrado perfeito, então $ind(K_k \vee G_j)$ é inteiro.*

Demonstração. Seja $H = K_k \vee G_j$ tal que G é um grafo $(k - 1)$ -regular com j vértices. Considere ainda kj quadrado perfeito. De forma semelhante à demonstração do Corolário 3.1 temos pela Proposição 2.1 que o polinômio característico de H é

$$p_H(x) = \frac{P(K_k, x) \cdot P(G_j, x)}{(x - (k - 1))(x - (k - 1))} g(x),$$

com $g(x) = x^2 - 2(k - 1)x + (k - 1)^2 - kj$. Temos que a maior raiz de $g(x)$, $q = \frac{2k-2+\sqrt{4kj}}{2} = k - 1 + \sqrt{kj}$, é o índice do grafo aranha sem pernas. Pois de fato, $k - 1$ é o maior dos autovalores de K_k e G , e temos $q > k - 1$.

E como kj é quadrado perfeito, temos que $ind(H) = k - 1 + \sqrt{kj} \in \mathbb{Z}$



EXEMPLO 3.2. *Da mesma forma que o último exemplo, considere o grafo aranha $K_5 \vee 4K_5$. Então como K_5 e $4K_5$ possuem grau $4 = k - 1$ e este último tem $20 = j$ vértices segue pelo Corolário 3.3 que $ind(K_5 \vee 4K_5) = 4 + \sqrt{5 \cdot 20} = 14$.*

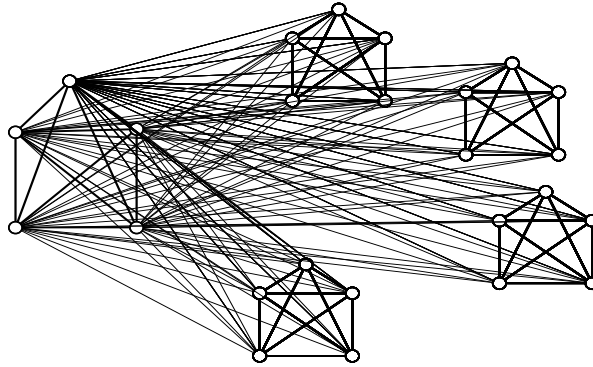


Figura 4: $K_5 \vee 4K_5$

Observação: Em geral, os corolários acima, não valem mais quando acrescentamos as pernas nos grafos $K_k \vee G_j$, transformando-os num grafo do tipo aranha magra ($S_m[k, j]$) ou gorda ($S_g[k, j]$), cuja cabeça é o grafo G , isto é, quando S (pernas) deixa de ser um conjunto vazio, conforme nos casos abaixo:

Consideremos os grafos $G_m[4, 5]$ e $G_g[4, 5]$ cuja cabeça é o ciclo C_5 . Constatamos com auxílio do software *newGraph* que

$$\text{ind}(G_m[4, 5]) \cong 7,07903 \text{ e } \text{ind}(G_g[4, 5]) \cong 7,70258$$

Ainda, considerando o grafo aranha magra ou gorda, cuja cabeça é $4K_5$, constatamos com auxílio do software *newGraph* que:

$$\text{ind}(G_m[5, 20]) \cong 14,03569 \text{ e } \text{ind}(G_g[5, 50]) \cong 14,56436$$

Observação: Pesquisa realizada com apoio do CNPq e FAPERJ.

Referências

- [1] Balinńska, K., Cvetkovic, D., Radosavljevic, Z., et al., *A survey on integral graphs*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., v. 13, 42-65, 2002.
- [2] Brouwer, A.E., Del-Vecchio, R. R., Jacobs, D.P., Trevisan, V., Vinagre, C. T. M. *Integral trees homeomorphic to a double star*. Bulletin of the ICA, v. 61, 77-80, 2011.
- [3] Campos, V., Sales, C. L., Maia, A. e Sampaio, R. *b-coloração de grafos com poucos P_4 s*. In Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, XLII., 2010. Bento Gonçalves.
- [4] Cao, D.S. *Bounds on eigenvalues and chromatic number*, Linear Algebra Appl. 270 1-13, 1998.
- [5] Cvetkovic, D. Doob, M., Sachs, H. *Spectra of graphs-Theory and application*. Deutscher Verlag der Wissenschaften-Academic Press, Berlin - New York, 1980; second edition 1982. third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, 1995.
- [6] Cvetković, D., Rowlinson, P., Simić, S. *Signless Laplacian of finite graphs*, Linear Algebra and its Applications **423**, 155-171, 2007.
- [7] Harary, F., Schwenk, A.J., *Which graphs have integral spectra?*, in Bari, R., Harary, F.(Eds), Graphs and Combinatorics, Springer, Berlin, 45-51, 1974.

- [8] Stevanovic, D., Abreu, N., Freitas, M., Del-Vecchio, R., *Walks and regular integral graphs*. Linear Algebra and its Applications, v. 423, 119-135, 2007.
- [9] Wilf, H.S., *The eigenvalues of a graph and its chromatic number*, J. London Math. Soc. 42, 330-332, 1967.