UMA GENERALIZAÇÃO DE GRAFOS CAMINHO E LEQUE: O ESTUDO DA SUBCOLORAÇÃO

Lilian Markenzon
Núcleo de Computação Eletrônica
Universidade Federal do Rio de Janeiro
markenzon@nce.ufrj.br

Christina F. E. M. Waga
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
waga@ime.uerj.br

RESUMO

Uma subcoloração é uma partição de vértices na qual cada classe de cor induz em G uma união de cliques disjuntas. Neste trabalho, duas subfamílias de grafos cordais são definidas, os grafos k-serpentina e os grafos k-leque. Prova-se que os grafos k-serpentina são 2-subcoloríveis e os grafos k-leque são 2 ou 3-subcoloríveis, dependendo do caso. A distribuição de graus dos vértices das duas famílias é também exibida.

PALAVRAS CHAVE. subcoloração; grafos *k*-caminho; subfamílias de grafos.

Área Principal: Teoria e Algoritmos em Grafos

ABSTRACT

A subcoloring is a vertex coloring of a graph in which every color class induces a disjoint union of cliques. In this paper two subfamilies of chordal graphs are defined, the k-streamer graphs and the k-fan graphs. It is proved that the subchromatic number of the k-streamer is 2 and the subchromatic number of the k-fan is 2 or 3, depending on the case. The degree distribution of the vertices of these families is also shown.

KEYWORDS. subcoloring; *k*-path graphs; special graph families.

Main Area: Theory and Algorithms in Graphs

1. Introdução

Uma k-coloração de um grafo G é uma partição de seus vértices em k conjuntos disjuntos dois a dois $V_1, \ldots, V_k$ tal que cada classe de cor V_i, $i = 1, \ldots, k$, é constituída por vértices isolados ou é um conjunto independente de vértices. O *número cromático* $\chi(G)$ é o menor inteiro para o qual G possui uma k-coloração. Para grafos conexos não triviais, $2 \leq \chi(G) \leq n$. As igualdades se verificam para os caminhos P_n com $\chi(P_n) = 2$ e para os grafos completos K_n, $\chi(K_n) = n$. O conceito de coloração pode ser generalizado de diversas maneiras: subcoloração, cocoloração e coloração completa, por exemplo.

A subcoloração e número subcromático foram introduzidos por Albertson *et al.* (1989). Uma partição $V_1, \ldots, V_k$ dos vértices de G é denominada uma k-*subcoloração* do grafo quando cada classe de cor induz em G uma união de cliques disjuntas. O *número subcromático* $\chi_s(G)$ é o menor inteiro para o qual G possui uma k-subcoloração. É fácil ver que para qualquer grafo G,

$$\chi_s(G) \leq \chi(G).$$

Esta igualdade se verifica para grafos ℓ-partidos completos $K_{\ell,\ldots,\ell}$. Além disso, tem-se que

$$\chi(G) \leq \chi_s(G)\omega(G)$$

sendo $\omega(G)$ o número de clique de G, isto é, a cardinalidade da maior clique do grafo. O grafo que satisfaz a igualdade pode ser encontrado em Gimbel e Hartman (2003). A subcoloração tem diversas aplicações nas áreas de escalonamento de tarefas, computação distribuída e otimização combinatória, vide Gandhi *et al.* (2010).

Reconhecer se um grafo é k-subcolorível é um problema NP-completo para grafos em geral. Portanto, identificar famílias de grafos em que se consiga resolver este problema em tempo polinomial é um tópico relevante de pesquisa. Stacho (2008a,2008b) apresentou dois resultados para grafos cordais: existe um algoritmo com complexidade de tempo de $O(n^3)$ para 2-subcoloração e, para todo $k \geq 3$, decidir se o grafo é k-subcolorível é NP-completo.

Um resultado imediato é a subcoloração de caminhos e de grafos completos. O primeiro apresenta $\chi_s(P_n) = \chi(P_n) = 2$ e o segundo, $\chi_s(K_n) = 1$, levando a uma questão interessante: como a existência de subgrafos completos maximais facilmente reconhecíveis afeta a subcoloração?

Neste trabalho, duas subfamílias de grafos cordais são definidas, os grafos k-serpentina e os grafos k-leque. Prova-se que os grafos k-serpentina são 2-subcoloríveis e os grafos k-leque, 2 ou 3-subcoloríveis, dependendo do caso estudado. A distribuição de graus dos vértices das duas famílias é também exibida.

2. Conceitos Básicos

Assume-se a familiaridade com os conceitos básicos de grafos cordais que podem ser encontrados em Blair e Peyton (1993) e Golumbic (2004).

Nesta seção, serão revistos os conceitos mais importantes. Seja $G = (V, E)$ um grafo com *ordem* $|V| = n > 0$ e *tamanho* $|E| = m$. A *vizinhança* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v) = \{w \in V \mid vw \in E\}$. Para qualquer subconjunto $S \subseteq V$, $G[S]$ é o *subgrafo de* G *induzido por* S. Um conjunto S é uma *clique* quando $G[S]$ é um grafo completo. Um vértice $v \in V$ é *simplicial em* G se $N(v)$ é uma clique e é *universal em* G se $|N(v)| = n - 1$.

Um *grafo cordal* é aquele em que todo ciclo simples de comprimento maior ou igual a quatro possui uma corda, isto é, uma aresta ligando dois vértices não consecutivos do ciclo. O *grafo de interseção de cliques* de um grafo cordal conexo G é o grafo conexo valorado tal que seus vértices são as cliques maximais de G e suas arestas ligam vértices que correspondem a cliques não disjuntas. A cada aresta é atribuído um peso inteiro, dado pela cardinalidade do conjunto interseção das cliques maximais que correspondem às suas extremidades. Uma árvore geradora de peso máximo deste grafo é chamada *árvore de cliques* de G.

Uma k*-árvore*, $k > 0$, pode ser indutivamente definida da seguinte forma:

- Todo grafo completo com k vértices é uma k-árvore.
- Se $G = (V, E)$ é uma k-árvore, $v \notin V$ e $Q \subseteq V$ é uma k-clique de G, então $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{vw \mid w \in Q\})$ é também uma k-árvore.
- Nada além disso é uma k-árvore.

Uma observação interessante é que as k-árvores são unicamente $(k + 1)$-coloríveis.

É possível definir grafos k-caminho de forma semelhante. Um grafo k*-caminho*, $k > 0$, pode ser indutivamente definido por:

- Todo grafo completo com k vértices é um grafo k-caminho.
- Se $G = (V, E)$ é um grafo k-caminho, $v \notin V$ e $Q \subseteq V$ é uma k-clique de G contendo pelo menos um vértice simplicial, então $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{vw \mid w \in Q\})$ é também um grafo k-caminho.
- Nada além disso é um grafo k-caminho.

Reconhecer se uma k-árvore é um grafo k-caminho é fácil devido à caracterização apresentada no próximo teorema de Markenzon *et al.* (2006).

Teorema 1 *Seja $G = (V, E)$ uma k-árvore com $n > k + 1$ vértices. G é um grafo k-caminho se, e somente se, G tem exatamente dois vértices simpliciais.*

Considere $G = (V, E)$ um grafo k-caminho, $\mathbf{Q}$ seu conjunto de cliques maximais. Então,

1. $|Q| = k + 1$, para toda clique $Q \in \mathbf{Q}$,
2. $|\mathbf{Q}| = n - k$ e
3. Se $Q, Q' \in \mathbf{Q}$ são vértices adjacentes em uma árvore de cliques de G então $|Q \cap Q'| = k$.

Um grafo $G = (V, E)$ é um *grafo de intervalo* se a cada vértice $v \in V$ pode ser atribuído um intervalo I_v da reta real e tal que $vw \in E$ quando $I_v \cap I_w \neq \emptyset$. O resultado a seguir estabelece uma importante inclusão e pode ser encontrado em Pereira *et al.* (2008).

Teorema 2 *Todo grafo k-caminho é um grafo de intervalo.*

Os grafos k-caminho têm uma única árvore de cliques. Como as árvores de cliques de um grafo de intervalo são caminhos, a única árvore de cliques de um grafo k-caminho é um caminho.

3. Resultados sobre a subcoloração de grafos k-caminho

Como os grafos k-caminho são grafos de intervalo, os resultados conhecidos para os grafos de intervalo são também aplicáveis. Broersma *et al.* (2002) apresentam o seguinte limite para o número subcromático, sendo G um grafo de intervalo,

$$\chi_s(G) \leq \lfloor log_2(n+1) \rfloor.$$

Para um grafo k-caminho G tem-se $\omega(G) = k+1$ e este limite pode ser reescrito:

$$\chi_s(G) \leq \min\{k+1, \lfloor log_2(n+1) \rfloor\}.$$

Duas novas subfamílias de grafos k-caminho apresentam resultados interessantes em relação ao problema da subcoloração de vértices, melhorando sensivelmente este limite. A primeira família a ser definida são os grafos k-*caminho serpentina* ou simplesmente k-*serpentina*, uma extensão dos grafos serpentina apresentados em Rodrigues *et al.* (1999).

Considere uma família de grafos definida pela propriedade P e G um grafo de ordem n pertence à família. O grafo G é (n,r)-*maxregular* quando G tem o maior número possível de vértices de grau r dentre todos os grafos de ordem n da família.

Naturalmente, todo grafo regular é (n,r)-maxregular pois todos os n vértices têm grau r. Dentre os k-caminhos, os grafos k-serpentina atendem à condição de maxregularidade.

Definição 3 *Um grafo k-caminho G é uma k-serpentina, $k \geq 1$, quando é $(n,2k)$-maxregular.*

Observe que o grafo 1-serpentina é o grafo caminho usual e, para n e k dados, o grafo k-serpentina de ordem n é único. Além disso, qualquer grafo k-serpentina pode ser construído através da substituição do segundo item da definição indutiva de grafo k-caminho apresentada anteriormente:

- Se $G = (V,E)$ é um grafo k-serpentina, $v \notin V$ e $Q \subseteq V$ é uma k-clique de G contendo os vértices mais recentemente incluídos, então $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{vw \mid w \in Q\})$ é também um grafo k-serpentina.

Por exemplo, o grafo da Figura 1(a) é uma 3-serpentina com 10 vértices, cuja cadeia de escolhas de 3-cliques é:

$$\langle \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{c,d,e\}, \{d,e,f\}, \{e,f,g\}, \{f,g,h\}, \{g,h,i\} \rangle.$$

E que,

$$\mathbf{Q} = \{\{a,b,c,d\}, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e,f\}, \{d,e,f,g\}, \{e,f,g,h\}, \{f,g,h,i\}, \{g,h,i,j\}\}.$$

Baseado na Definição 3, os graus dos vértices de um grafo k-serpentina, $k \geq 1$, de ordem n ficam determinados. Se $n = k+2$, dois vértices têm grau k e k vértices têm grau $k+1$. Se o grafo tem ordem $n = k+2+i$, com $1 \leq i \leq k-2$, existem $k-i$ vértices de grau $k+i+1$ e dois vértices cada para os graus $k+j$ com $0 \leq j \leq k + \lfloor \frac{n-(i+1)}{2} \rfloor$. Se $n > 2k$, os graus e o número de vértices estão indicados abaixo:

Graus	k	$k+1$	$k+2$	$\ldots$	$2k-1$	$2k$
Num. vértices	2	2	2	$\ldots$	2	$n-2k$

A 3-serpentina da Figura $1(a)$ tem a seguinte distribuição de graus.

Graus	3	4	5	6
Num. vértices	2	2	2	4

Os grafos completos de ordem k e $k+1$ são k-serpentinas e têm número subcromático igual a um. O número subcromático dos grafos k-serpentina com $n > k+1$ é apresentado no próximo teorema, bem como uma subcoloração possível.

Teorema 4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo k-serpentina com $k \geq 2$ e $n > k+1$. Então, $\chi_s(G) = 2$.*

Prova: Vamos considerar, sem perda de generalidade, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o conjunto de vértices sendo v_1 e v_n os vértices simpliciais. Sabe-se que, pelas propriedades de grafos k-caminho e pela definição de k–serpentina, as cliques maximais têm cardinalidade $k+1$ e podem ser denotadas por $Q_i = \{v_i, \ldots, v_{i+k}\}$, $i = 1, \ldots, n-k$.

Sejam q and r inteiros positivos tais que $n = q(k+1) + r$ com $0 \leq r < k+1$ e as q cliques maximais

$$\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}, \{v_{k+2}, \ldots, v_{2(k+1)}\}, \ldots, \{v_{(q-1)k+q}, \ldots, v_{q(k+1)}\}.$$

Novamente, pela definição de k-serpentina, estas cliques são disjuntas e podem ser incluídas alternadamente em duas classes de cores C_1 e C_2.

Agora, considere a clique Q formada pelos r vértices restantes. Dois casos devem ser analisados. Se q é par então Q é incluída na classe C_1 pois dentre os r vértices restantes, alguns são adjacentes a certos vértices da clique $\{v_{(q-1)k+q}, \ldots, v_{q(k+1)}\} \in C_2$. Caso contrário, Q é incluída na classe C_2. Assim, $\chi_s(G) = 2$. ■

Voltando à 3-serpentina da Figura $1(a)$, as classes de cores, com as cliques indicadas, são

$$C_1 = \{\{a, b, c, d\}, \{i, j\}\} \text{ e } C_2 = \{\{e, f, g, h\}\}.$$

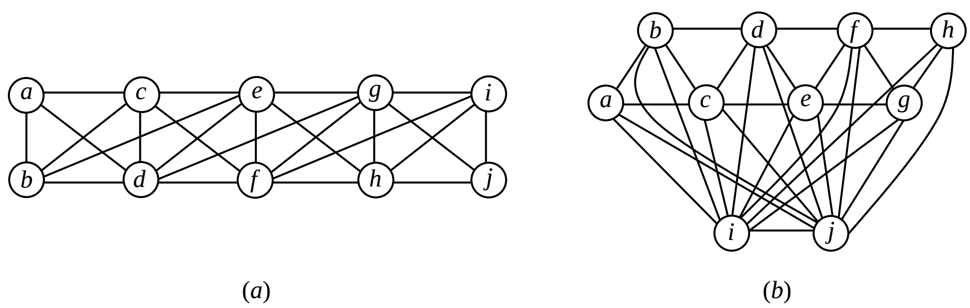

Figura 1: Grafos k-caminho

A segunda subfamília é composta pelos grafos *k-caminho leque* ou simplesmente *k-leque*. Sua definição será feita utilizando-se a operação de junção de grafos que pode ser encontrada em Gross e Yellen (2003).

A *junção* dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ é o grafo

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1 \text{ e } v \in V_2\}).$$

Definição 5 *Um grafo k-caminho G é um k-leque, $k \geq 2$, quando é a junção do grafo completo K_ℓ com $1 \leq \ell \leq k-1$ e de uma $(k-\ell)$-serpentina.*

Os grafos 2-leque são os grafos leque usuais da literatura.

Considere o par $(\ell, k-\ell)$ que especifica o tipo da junção do k-leque. Para um dado $n > 2k+1$, existem $(k-1)$ k-leques não isomorfos especificados pelos pares

$$(1, k-1), (2, k-2), \ldots, (k-1, 1).$$

Para $n > 13$ fixo, os possíveis tipos de 6-leques não isomorfos são $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$ e $(5,1)$.

A partir dos grafos utilizados na junção, é possível determinar os graus dos vértices de um grafo k-leque, $k \geq 2$, de ordem n. Os ℓ vértices do grafo completo K_ℓ têm grau $n-1$ e os graus dos vértices da $(k-\ell)$-serpentina estão determinados e devem ser acrescidos de ℓ.

Considere, por exemplo, o 4-leque de ordem 10 da Figura $1(b)$ obtido pela junção de um grafo K_2 com uma 2-serpentina com 8 vértices, é o único 4-leque com 10 vértices do tipo $(2,2)$. Os graus da 2-serpentina são:

Graus	2	3	4
Num. vértices	2	2	4

Assim, os graus do 4-leque são:

Graus	4	5	6	9
Num. vértices	2	2	4	2

Em relação à subcoloração, os k-leques que são grafos completos de ordem k e $k+1$ têm número subcromático igual a um. O número subcromático dos grafos k-leque com $n \geq k+2$ e uma subcoloração são apresentados no teorema abaixo.

Teorema 6 *Seja $G = (V,E)$ um grafo k-leque com $k \geq 2$, $n \geq k+2$ e $n - \ell = q(k-\ell+1) + r$ com $0 \leq r < k-\ell+1$. Então,*

$$\chi_s(G) = \begin{cases} 2, & q < 3 \text{ ou } q = 3 \text{ e } r = 0 \\ 3, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Prova: Considere as classes de cores C_1, C_2 e C_3, e os seguintes casos.

Se $q = 1$, a clique maximal pertence à C_1 e os r vértices restantes e o grafo completo K_ℓ à C_2.

Se $q \neq 1$, pelo Teorema 4, duas classes C_1 e C_2 são utilizadas para subcolorir as q cliques maximais da $(k-\ell)$-serpentina.

Se $q = 2$, os r vértices restantes pertencem à classe C_1 e os vértices do grafo K_ℓ são incluídos na classe C_2.

Se $q = 3$ e $r = 0$, os vértices do grafo K_ℓ são incluídos também na classe C_2.

Então, para todos estes, tem-se $\chi_s(G) = 2$.

Em qualquer outra situação, os r vértices restantes e os vértices do grafo completo K_ℓ formam uma clique e devem pertencer necessariamente à classe C_3. Logo, $\chi_s(G) = 3$. ■

Uma 2-subcoloração do 4-leque da Figura 1(b) com as cliques indicadas é

$$C_1 = \{\{a, b, c\}, \{g, h\}\} \text{ e } C_2 = \{\{d, e, f, i, j\}\}.$$

4. Considerações finais

O estudo apresentado neste trabalho evidenciou que as propriedades estruturais dos grafos k-caminho podem resultar em limites bem mais precisos do que os fornecidos na literatura para grafos de intervalo. Como as demonstrações dos Teoremas 4 e 6 são construtivas, os algoritmos para a subcoloração do grafo dado decorrem de imediato.

As subcolorações propostas para as k-serpentinas e para os k-leques determinam classes de cores com cliques maximais, isto é, as maiores possíveis. É possível analisar, por exemplo, a subcoloração em que as cliques não sejam maximais no grafo.

Uma proposta de estudo complementar é a obtenção de algoritmos para subcoloração de subfamílias mais abrangentes.

Agradecimentos: O primeiro autor agradece ao CNPq (Processo 305372/2009-2) pelo financiamento parcial desta pesquisa.

Referências

Albertson, M.O., Jamison, R.E., Hedetniemi, S.T., Locke, S.C. (1989), The subchromatic number of a graph, *Discrete Mathematics* 74 (1-2), 33-49.

Blair, J.R.S., Peyton, B. (1993), An introduction to chordal graphs and clique trees. In: George, J.A., Gilbert, J. R., Liu, J. W. H. (Eds.), *Graph theory and sparse matrix computation*. Springer Verlag, IMA 56, 1-30.

Broersma, H.J., Fomin, F. V., Nesetril, J., Woeginger, G. J. (2002), More about subcoloring, *Computing* 69, 187-203.

Gandhi, R., Greening Jr., B., Pemmaraju, S., Raman, R. (2010), Sub-coloring and hypo-coloring interval graphs, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 2(3), 331-345.

Gimbel, J., Hartman, C. (2003), Subcolorings and the subchromatic number of a graph, *Discrete Mathematics* 272 (2-3), 139-154.

Golumbic, M.C. (2004), *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, 2^{nd} edition, Academic Press, New York.

Gross, J.L., Yellen, J. (eds) (2003), *Handbook of graph theory*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

Markenzon, L., Justel, C., Paciornik, N. (2006), Subclasses of k-trees: characterization and cecognition, *Discrete Applied Mathematics* 154, 818-825.

Pereira, P.R.C., Markenzon, L., Vernet, O. (2008), A clique-difference encoding scheme for labelled k-path graphs, *Discrete Applied Mathematics* 156, 3216-3222.

Rodrigues, R.M.N.D., Abreu, N.M.M., Markenzon, L. (1999), Maxregularity and maximal outerplanar graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 3, 171-175.

Stacho, J. (2008a), On 2-subcoloring of chordal graphs. In: LATIN 2008: Latin American Conference on Theoretical Informatics, *Lecture Notes in Computer Science* 4957, 544-554.

Stacho, J. (2008b), Complexity of Generalized Colorings of Chordal Graphs, PhD Thesis, Simon Frasier University.