SOBRE O PROBLEMA AUMENTO MÁXIMO DE CONECTIVIDADE ALGÉBRICA

Camila Cristina Gomes Ferreira de Oliveira
Claudia Marcela Justel
Stanley Rodrigues
Instituto Militar de Engenharia - IME
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha - RJ
camilacristinagfo@gmail.com, cjustel@ime.eb.br,
sstanleyy@gmail.com

RESUMO

A conectividade algébrica é um invariante importante na área de Teoria Espectral de Grafos utilizado para mensurar o quão conexo é um grafo. problema de aumento máximo deste invariante pertence a classe dos problemas NP-Completo. O presente trabalho apresenta um estudo sobre as características que possuem arestas que não pertencem ao grafo e ao ser inseridas produzem aumento da conectividade algébrica. A partir desse estudo, uma nova heurística para resolver o problema é proposta.

PALAVRAS CHAVE. Grafos, conectividade algébrica, algoritmos.

Área Principal (Teoria e Algoritmos em Grafos)

ABSTRACT

The algebraic connectivity is an important invariant in the Spectral Theory of Graphs used to measure how a graph is connected. The problem of maximum augmentation of this invariant belongs to the class of NP-complete problems. This paper present a study about the characteristics of the edges not belonging to a graph such that when inserted, the algebraic connectivity increases. Based in this information, we propound a new approximated algorithm to solve the problem.

KEYWORDS. Graphs, algebraic connectivity, algorithms.

Main Area (Theory and Algoritms in Graphs)

1. Introdução

A Teoria Espectral de Grafos é uma área que tem como propósito a análise de grafos através de matrizes e espectros. Dentre os conceitos mais importantes nesta área, destaca-se um invariante, denominado conectividade algébrica que mensura o quão bem conexo é um grafo. Este invariante é um parâmetro global, diferentemente de outras medidas de conectividade existentes na Teoria de Grafos.

O uso da conectividade algébrica permite modelar diversos problemas reais envolvendo redes, como por exemplo, a construção da de infraestrutura para transportar o fluxo de um líquido num sistema de tubulação (MAAS, 1987).

Na literatura existem alguns trabalhos estudam comportamento da conectividade algébrica num grafo, sob diferentes condições. Em (GRONE e MERRIS, 1990), (FALLAT e KIRKLAND, 1998), por exemplo, são apresentados estudos em subclasses de árvores visando identificar os grafos que apresentam valores extremos para a conectividade algébrica, fazendo alterações de arestas no grafo, neste caso o número de arestas permanece constante.

O valor da conectividade algébrica de um grafo, quando inserimos arestas, nunca diminui. Pode acontecer que, após inserir arestas, a conectividade algébrica permaneça igual, ou aumente. O problema de maximizar este invariante quando são inseridas a menor quantidade de arestas possíveis é um problema pertencente a classe NP-Completo (MOSK-AOYAMA, 2008). No artigo (GHOSH e BOYD, 2006) é apresentada uma heurística para resolver o problema de determinar o menor número de arestas que devem ser inseridas num grafo para obter o maior valor da conectividade algébrica.

Neste artigo propomos um estudo sobre as caracteristicas que apresenta uma aresta cuja adição num grafo produz um bom aumento da conectividade algébrica. O motivo deste estudo é propor um novo critério de escolha de aresta para obter uma nova heuristica para resolver o mesmo problema atacado por Ghosh e Boyd. Alguns grafos particulares foram analisados e os resultados obtidos nos experimentos realizados são apresentados.

A organização deste trabalho é a seguinte. A Seção 2 contém conceitos básicos para o entendimento do trabalho. A Seção 3 apresenta o problema de aumento máximo da conectividade algébrica e a heurística proposta por Ghosh e Boyd. A Seção 4 apresenta o estudo realizado. A Seção 5 corresponde as conclusões e, finalmente, a Seção 6 as referências bibliográficas.

2. Conceitos básicos

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, com n vértices, ($|V| = n$), e o conjunto de arestas $E = \{(a, b)| \quad a, b \in V\}$, ($|E| = m$). O **grau** de um vértice $v \in V$ no grafo $G = (V, E)$, denotado por $grau(v)$, é a cardinalidade do conjunto de arestas o qual este vértice pertence. O grau mínimo em G é denotado por $\delta(G)$. Denotaremos por $G^C = (V, E^C)$ o **grafo complementar** grafo G, onde $E^C = \{(a, b) : a,\ b \in V$ e $(a, b) \notin E\}$. Dado um subconjunto $A \subseteq E^C$, $G+A$ é o grafo com conjunto de vértices V, e conjunto de arestas $E \cup A$, e dada $e \in E^C$, $G + e$ é o grafo cujo conjunto de vértices é V e o conjunto de arestas $E \cup \{e\}$.

Um **caminho** de v_1 até v_k no grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita $v_1, v_2, ..., v_k$ de vértices distintos tais que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$. O **comprimento do caminho** é $k - 1$. Um **ciclo** é uma sequência finita $v_1, v_2, ..., v_k$, onde $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ é um caminho, a aresta $(v_{k-1}, v_1) \in E$, $v_k = v_1$ e $k \geq 4$. Um grafo G é **conexo** quando existe um caminho entre qualquer par de vértices pertencentes a ele. Caso contrário, G é considerado **desconexo**. A **distância** entre dois vértices $u, w \in V$, denotada por $d(u, w)$ ou $d_G(u, w)$, é o comprimento do menor caminho em G entre u e w. A **excentricidade** de um vértice v no grafo G, denotada por $e(v)$, é a maior distância entre o vértice v e qualquer outro vértice do grafo. O **diâmetro** do grafo G, denotado por

$diam(G)$, o comprimento do caminho que representa a maior distância entre pares de vértices do grafo.

Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. Usaremos a notação $T(k,l,d)$ dada em (FALLAT e KIRKLAND, 1998) para as árvores com n vértices e diâmetro $d \geq 3$, onde $1 \leq k \leq l$, $n-(d-1) = k+l$ é o número de folhas, existem exatamente k folhas adjacentes a um vértice do grafo, existem exatamente l folhas adjacentes a outro vértice do grafo e ao remover todas as folhas de $T(k,l,d)$ obtemos um caminho de comprimento $d-2$. Observamos que fixado n e considerando todos os valores possíveis de k e l, as árvores $T(k,l,3)$ representam todas as árvores com n vértices e diâmetro 3. Porém, fixando n e $dgeq4$, e considerando todos os valores possíveis de k e l, as árvores $T(k,l,d)$ apenas representam um subconjunto do conjunto de todas as árvores com n vértices e diâmetro d.

Denotamos um grafo $G=(V,E)$ como ***k*-partido** quando existe uma partição do seu conjunto de vértices em k subconjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, $V_1, ..., V_k$, $\sum_{i=1}^{k} \mid V_i \mid = n$, onde as arestas de G são sempre formadas por vértices pertencentes a subconjuntos distintos. Uma ***k*-coloração** aplicada em um grafo $G=(V,E)$ é uma função $f : V \longrightarrow \{1, ..., k\}$ tal que $f(a) \neq f(b)$ se $(a,b) \in E$.

A **matriz Laplaciana** do grafo simples, não direcionado $G=(V,E)$ é a matriz de dimensão $n \times n$ definida por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é matriz diagonal de dimensão $n \times n$ com $d_{i,i} = grau(i)$, e $A(G)$ é a matriz de adjacência de dimensão $n \times n$ com $a_{i,j} = 1$ se $(i,j) \in E$ e $a_{i,j} = 0$, caso contrário.

Utilizamos a notação $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G)$ para representar os autovalores de $L(G)$. O segundo menor autovalor de $L(G)$ é chamado de **conectividade algébrica** do grafo e notado por $\lambda_2(G)$. Um autovetor corresponde a este autovalor, $\lambda_2(G)$, é conhecido na literatura como **vetor de Fiedler**. Existe uma relação entre os autovalores da matriz Laplaciana de um grafo e seu complementar: $\lambda_2(G) = n - \lambda_n(G^C)$. Além disso, o maior autovalor da matriz Laplaciana de um grafo completo com $n > 1$ vértices verifica $\lambda_n(K_n) = n$. Já o maior autovalor da matriz Laplaciana de um grafo desconexo é o máximo dos maiores autovalores das matrizes Laplacianas dos seus componentes conexos. Em (FIEDLER 1973), foi provado que se um grafo não é completo, o valor da conectividade algébrica é limitado por $n-2$. No mesmo artigo, foi mostrado que se $A \subseteq E^C$, então $\lambda_2(G+A) \geq \lambda_2(G)$.

Um **problema de decisão** é aquele cujo objetivo consiste em decidir a resposta SIM ou NÃO a uma determinada pergunta. A **Classe P** é aquela que compreende os problemas de decisão para os quais é conhecida uma solução por algoritmo polinomial no tamanho da entrada. A **Classe NP** é formada pelos problemas de decisão para os quais existe uma justificativa para a resposta SIM, e cujo reconhecimento pode ser feito por um algoritmo polinomial no tamanho da entrada. Já a **classe NP-Completo** corresponde aos problemas de decisão que pertencem a classe NP e todo problema de NP pode ser transformado polinomialmente a ele.

Uma **rede** pode ser entendida como um conjunto de elementos na qual alguns pares destes estão relacionados por conexões (KLEINBERG e EASLEY, 2010). Na literatura são chamadas de **redes complexas** as redes cujos vértices e arestas têm um significado que coincide com nossa realidade, assim como também as redes que possuem número de vértices e arestas grandes, dificultando o tratamento de problemas por algoritmos ainda que sejam polinomiais. Um caso particular de rede complexa são as **redes sociais**. Estas, por sua vez, são redes nas quais os vértices representam pessoas ou grupos de pessoas, e as arestas representam algum tipo de interação social.

Outros conceitos sobre teoria de grafos e algoritmos, teoria espectral de grafos e redes sociais podem ser achados em (SZWARCFITER, 1986), (ABREU et al., 2007) e (KLEINBERG e EASLEY, 2010), respectivamente.

3. Aumento máximo da conectividade algébrica

Nesta seção apresentaremos o problema de aumento máximo da conectividade algébrica, sua complexidade e a heurística proposta por Ghosh e Boyd para resolvê-lo.

3.1. Descrição do Problema

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k, o problema de aumento máximo da conectividade algébrica consiste em determinar, dentre todos os subconjuntos de arestas de tamanho menor ou igual a k no grafo complementar de G, aquele que produz o maior aumento da conectividade algébrica. Ou seja, $\max_{\{A\subseteq E^C, |A|\leq k\}} \lambda_2(G + A)$.

Usando como exemplo o grafo C_5, o ciclo de tamanho 5, cuja conectividade algébrica é $\lambda_2(C_5) \simeq 1,38$, a Figura 1 ilustra o problema de aumento máximo da conectividade algébrica, onde adicionando 3 ou 4 arestas no grafo obtemos o valor máximo da conectividade para um grafo não completo ($n - 2$), neste caso o valor 3.

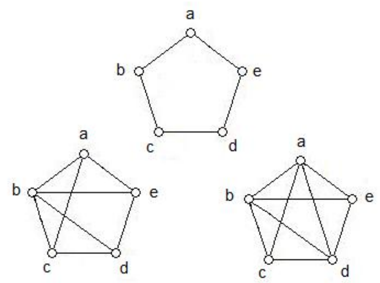

Figura 1: O grafo $G = C_5$ e dois grafos obtidos adicionando 3 e 4 arestas.

Em (MOSK-AOYAMA, 2008), é provado que o problema anterior é NP-Completo. Para tal fim é definido o problema de decisão:

PROBLEMA: AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA
INSTÂNCIA: Um grafo $G = (V, E)$, um número inteiro não negativo k e um número inteiro não negativo t.
PERGUNTA: Existe um subconjunto $A \subseteq E^C$ de tamanho $|A| \leq k$ tal que $\lambda_2(G + A) \geq t$?

Para provar a NP-completude deste problema de decisão, Mosk-Ayoama mostra que o problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA pertence á classe NP e posteriormente prova que existe uma uma transformação polinomial desde o problema 3-COLORAÇÃO (que é NP-Completo) para o problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA.

A idéia da prova consiste em, partindo de um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n > 1$, fazer uma triplicação de G obtendo o novo grafo $G' = (V', E')$ onde $|V'| = 3n$ e $|E'| = 3m$. Considerando que os dados da instância do problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA são G', $k = 3n^2 - 3m$ e $t = 2n$.

Notamos por $K_{n,n,n}$ o grafo 3-partido completo com n vértices em cada partição. A prova da redução desde o problema 3-COLORAÇÃO é baseada nos seguintes lemas.

Lema 1 (MOSK-AOYAMA, 2008) : Existe um subconjunto $A' \subseteq (E')^C$ de tamanho $|A'| \leq k$ tal que $H = (V', E' \cup A')$ é isomorfo a $K_{n,n,n}$ se e somente se G admite uma 3-coloração.

Lema 2 (MOSK-AOYAMA, 2008): Um grafo $H = (V(H), E(H))$ com $|V(H)| = 3n$ e $|E(H)| \leq 3n^2$ arestas para $n > 1$ satisfaz $\lambda_2(H) \geq 2n$ se e somente se H é isomorfo a $K_{n,n,n}$.

Da prova de NP-Completude do problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA, pode ser obtida a solução do mesmo para o caso de resposta SIM. Seja G' o grafo formado por 3 cópias de G. A Figura 2 mostra o grafo G' para o grafo $G = C_5$.

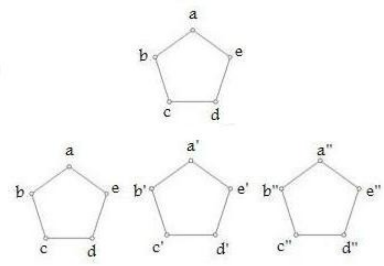

Figura 2: O grafo $G = C_5$ e o grafo G' correspondente.

Supondo que exista uma 3-coloração para o grafo G, determina-se uma 3-partição equilibrada de G' (contendo n vértices em cada conjunto) a partir da 3-coloração de G'. A Figura 3 mostra uma 3-partição do grafo G' da Figura 2, e uma 3-partição equilibrada do mesmo.

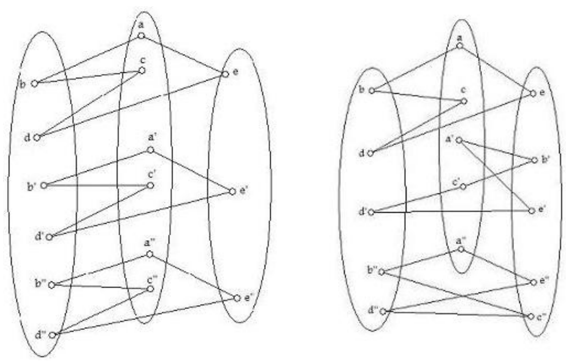

Figura 3: Uma tripartição qualquer e a tripartição equilibrada de G'.

Logo são adicionadas arestas no grafo G' até obter o grafo tripartido completo $K_{n,n,n}$, para o qual $\lambda_2(K_{n,n,n}) = 3n - \lambda_n(K_{n,n,n}) = 3n - n = 2n$. As arestas adicionadas em G' para completar o grafo $K_{n,n,n}$ (no máximo $k = 3n^2 - 3m$) formam o conjunto A', e são as arestas que produzem o maior valor da conectividade algébrica ($\lambda_2(G' + A')$). A Figura 4 mostra as arestas de G' na cor preta, e as arestas que completam o grafo G' para o grafo $K_{5,5,5}$ coloridas em verde e vermelho.

A solução do problema para o grafo $G = (V, E)$ é construída a partir do conjunto de arestas em A' que possuem as duas extremidades no conjunto de vértices V. As arestas na cor vermelha da Figura 4 são as arestas que devem ser adicionadas em G para obter o valor da conectividade algébrica maior ou igual a k.

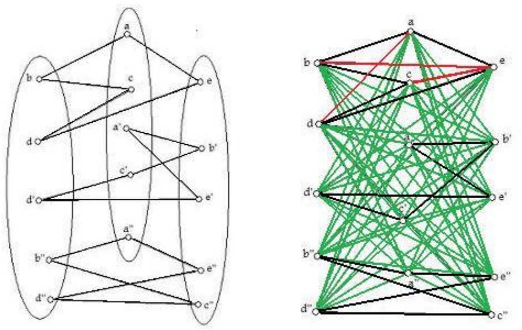

Figura 4: A tripartição equilibrada de G' e o grafo $K_{5,5,5}$.

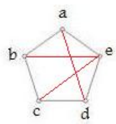

Figura 5: As arestas adicionadas em G para resolver o problema aumento máximo da conectividade algebrica.

3.2. Heurística de Ghosh e Boyd

Existem na literatura algoritmos para resolver de forma aproximada o problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA. A heurística proposta por Ghosh e Boyd, apresentada em (GHOSH e BOYD, 2006), utiliza um vetor de Fiedler para determinar as arestas que ao ser inseridas num grafo G tentam produzir o maior aumento da conectividade algébrica, como descrito no problema AUMENTO MÁXIMO DA CONECTIVIDADE ALGÉBRICA. Dado um grafo $G_{base} = (V, E_{base})$, onde $|V| = n$, $E_{cand} \subset E^C_{base}$ um conjunto de arestas candidatas de cardinalidade $m_c = |E_{cand}|$, e um número k, $0 \le k \le m_c$, o problema consiste em determinar quais k arestas pertencentes ao conjunto E_{cand} ($E \subseteq E_{cand}$, $|E| = k$) devem ser escolhidas para ser adicionadas no grafo G_{base} de maneira tal que seja obtido o maior aumento possível da conectividade algébrica.

Notando por $L = L(G)$ a matriz Laplaciana de G, $\lambda_2(G)$ a conectividade algébrica do grafo G e $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ o vetor de Fiedler do grafo G, os autores apresentam uma estratégia gulosa que consiste adicionar k arestas, uma por vez, cada uma delas escolhida sendo a aresta cujas extremidades são i e j e que possui o maior valor $(w_i - w_j)^2$, onde $\mathbf{w} = (w_i)$ é um vetor de Fiedler da matriz Laplaciana correspondente. Descreveremos no Algoritmo 3.1 a heurística da perturbação proposta em (GHOSH e BOYD, 2006), denotada por HP.

ALGORITMO 3.1: HP

Entrada:
n, k
$G_{base}(V, E_{base})$
E_{cand}; // arestas candidatas
Saída: $E \subseteq E^C$, $|E| = k$

$m_c = |E_{cand}|$
Se $k > m_c$ **então** PARE;
$E = \emptyset$;
Calcular $L(G) = L(G_{base})$;
Para $i = 1$ até k **faça**
  Determinar vetor de Fiedler $\mathbf{w}$ ($\mathbf{w} \in R^n : L(G)\mathbf{w} = \lambda_2(G)\mathbf{w}$);
  Calcular $(w_p - w_q)^2 = \max_{\{(i,j) \in E_{cand}\}}(w_i - w_j)^2$;
  $L(G) = L(G + (p, q))$;
  $E_{cand} = E_{cand} - \{(p, q)\}$;
  $E = E \cup \{(p, q)\}$;
Retonar E;

Em (GHOSH e BOYD, 2006) foram usados três grafos gerados aleatoriamente para comparar a heurística de perturbação (HP). Os três grafos utilizados possuem 10 vértices e 14 arestas (grafo menor); 28 vértices e 68 arestas (grafo intermediário); e 1000 vértices e 5517 arestas (grafo maior), respectivamente. Em todos os casos o método proposto por Ghosh e Boyd se mostrou eficiente. Para o grafo menor, a solução obtida pela HP foi comparada com solução obtida pelo algoritmo de programação semidefinida (SDP)e pelo algoritmo de força bruta. Para o grafo intermediário, a solução obtida pela HP foi comparada com um limite superior obtido pelos autores. No caso do grafo maior, o resultado da HP foi comparado com a adição aleatória de k arestas.

4. Contribuição

A HP proposta por Ghosh e Boyd motivou a pergunta seguinte: como melhorar a escolha da aresta a ser inserida no grafo? Para tal fim foram analisados alguns tipos de grafos.

Selecionamos inicialmente árvores do tipo $T(k, l, 3)$, caso particular das árvores $T(k, l, d)$ apresentadas na Seção 2. Podemos observar que existem 5 tipos diferentes de arestas que podem ser inseridas numa árvore $T(k, l, 3)$, ilustradas na Figura 6.

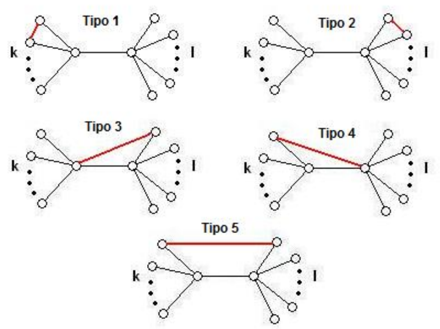

Figura 6: Os 5 tipos diferentes de arestas complementares da classe $T(k, l, 3)$

A partir de experimentos realizados com árvores de até $n = 20$ vértices podemos concluir o seguinte. As arestas de tipo 4 (arestas cujas extremidades são um vértice folha do grupo de menor número de folhas e o vértice não folha não adjacente com ele na árvore) produzem o maior aumento da conectividade algébrica para as árvores $T(k, l, 3)$. A Tabela 1 mostra os valores da conectividade algébrica quando são inseridas arestas dos tipos correspondentes para as árvores $T(k, l, 3)$ quando $n = 20$ e para todos os possíveis valores de k e l. Notamos por G_i, $1 \leq i \leq 5$ os grafos $G + e_i = T(k, l, 3) + e_i$, onde e_i, $1 \leq i \leq 5$ são as arestas mostradas na Figura 6 e por $e^* \in E^C$ a aresta determinada pelo heurística HP.

Tabela 1: Conectividade algébrica para $T(k, l, 3)$, $n = k + l + 2 = 20$ e para $T(k, l, 3) + e$.

G	$\lambda_2(G)$	$\lambda_2(G_1)$	$\lambda_2(G_2)$	$\lambda_2(G_3)$	$\lambda_2(G_4)$	$\lambda_2(G_5)$	$\lambda_2(G + e^*)$
$T(1, 17, 3)$	0.40	-	0.40	0.50	1.00	0.62	0.62
$T(2, 16, 3)$	0.30	0.30	0.30	0.39	0.50	0.43	0.43
$T(3, 15, 3)$	0.24	0.24	0.24	0.33	0.39	0.34	0.34
$T(4, 14, 3)$	0.21	0.21	0.21	0.29	0.33	0.30	0.30
$T(5, 13, 3)$	0.19	0.19	0.19	0.27	0.29	0.27	0.27
$T(6, 12, 3)$	0.18	0.18	0.18	0.25	0.27	0.25	0.25
$T(7, 11, 3)$	0.17	0.17	0.17	0.24	0.25	0.24	0.24
$T(8, 10, 3)$	0.17	0.17	0.17	0.24	0.25	0.24	0.24
$T(9, 9, 3)$	0.16	0.16	0.16	0.24	0.24	0.23	0.23

O tipo de aresta 4, produz valor da conectividade algébrica, quando inserida nas árvores $T(k, l, 3)$, superior ao valor produzido pela aresta determinada pelo algoritmo de Ghosh e Boyd.

Posteriormente analisamos os grafos correspondentes a duas redes sociais. A primeira formada por integrantes de uma academia de karatê de uma Universidade dos Estados Unidos conhecida como Rede de Zachary (KLEINBERG e EASLEY, 2010), cujo grafo contém 34 vértices e 78 arestas . A segunda é uma rede de coautoria criada a partir de dados reais obtidos da plataforma Lattes do CNPQ (BARBOSA et al., 2011), cujo grafo contém 207 vértices e 520 arestas. Também foi analisado um dos grafos gerados randomicamente (10 vértices e 14 arestas) para os testes realizados com a heurística HP (GHOSH e BOYD, 2006). Notaremos os grafos da rede de Zachary e da rede de co-autoria por G_{Zach} e G_{Coaut}, respectivamente, e o grafo utilizado por Ghosh e Boyd por G_{Rand}.

O valor da conectividade algébrica de G_{Zach} é $\lambda_2(G_{Zach}) = 0,46853$. E a aresta determinada pela heurística HP para o caso $k = 1$ foi $e^* = (17, 27)$, para a qual temos $\lambda_2(G_{Zach} + e^*) = 0,62035$. Para o grafo G_{Zach}, o algoritmo de força bruta identificou 4 arestas $e \in E(G^C_{Zach})$ que atingiram valor $\lambda_2(G_{Zach} + e) > 0,62035$ e são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: $\lambda_2(G_{Zach} + e) > 0,6$ obtidos por algoritmo de força bruta.

$e \in E(G_{Zach})^C$	$\lambda_2(G_{Zach} + e)$
(17, 30)	0.63757
(17, 24)	0.63571
(17, 33)	0.62942
(17, 34)	0.62398
(17, 27)	0.62035

O valor da conectividade algébrica de G_{Rand} é dado por $\lambda_2(G_{Rand}) = 0,26044$. A aresta indicada pelo método de Ghosh em (GHOSH e BOYD, 2006) foi $e^* = (4, 9)$ e aumentou o valor da conectividade algébrica para $\lambda_2(G_{Rand} + e^*) = 0,50509$. O algoritmo de força bruta determinou 7 arestas $e \in E(G^C_{Rand})$ para as quais o valor da conectividade algébrica $\lambda_2(G_{Rand} + e) > 0,50509$. A Tabela 3 mostra as arestas obtidas pelo algoritmo de força bruta e os correspondentes valores da conectividade algébrica.

Tabela 3: Melhores resultados para $\lambda_2(G_{Rand} + e)$ obtidos através do algoritmo de força bruta.

$e \in E(G_{Rand})^C$	$\lambda_2(G_{Rand} + e)$
(2, 9)	0.70030
(2, 10)	0.70030
(3, 9)	0.70030
(3, 10)	0.70030
(1, 9)	0.65474
(1, 10)	0.65474
(1, 8)	0.52787

O valor da conectividade algébrica de G_{Coaut} é dado por $\lambda_2(G_{Coaut}) = 0,02728$. A heurística HP, considerando $k = 1$ como dado de entrada, determinou aresta $e^* \in E_{cand} = E^C$ cuja conectividade algébrica pertence ao intervalo $[0,03475; 0,03656]$. Devido ao tamanho do grafo G_{Coaut}, não foi usado o algoritmo de força bruta para determinar a aresta que produz o maior aumento da conectividade algébrica, mas foi possível identificar várias arestas $e \in E^C$ para as quais $\lambda_2(G_{Coaut} + e) > 0,03656$. A Tabela 4 mostra algumas dessas arestas.

Tabela 4: Melhores resultados obtidos no experimento para G_{coaut}.

$e \in E^C$	$\lambda_2(G + e)$
(57, 73)	0.04199
(57, 195)	0.04190
(57, 58)	0.04188
(17, 57)	0.04086
(9, 57)	0.04183
(57, 101)	0.04164
(37, 57)	0.04160
(57, 158)	0.04158
(57, 83)	0.04155
(57, 134)	0.04151
(57, 87)	0.04129
(57, 159)	0.04111
(10, 57)	0.04110
(57, 187)	0.04107
(57, 76)	0.04104
(57, 105)	0.04104

Em todos os casos analisados, a excentricidade dos vértices que compõem as arestas que produzem maior aumento da conectividade algébrica, coincidem uma com o valor do diâmetro do grafo de entrada, d, e outra com $d-1$. Além disso, notamos que dentre os vértices de excentricidade d e $d-1$, os que se encontram a esta distância de um maior número de vértices do grafo, e tem grau elevado, contribuem mais favoravelmente para o aumento da conectividade algébrica. A partir dessas observações, propomos a heurística HE para resolver o problema de aumento máximo da conectividade algébrica. A mesma consiste em determinar, uma por vez, k arestas no grafo dado como entrada. Baseado nos experimentos anteriores, a aresta escolhida a cada iteração deve pertencer ao grafo complementar do grafo na iteração atual; as extremidades dessa aresta devem estar a distância $d - 1$ no grafo, possuir extremidades cuja excentricidade de uma seja igual ao diâmetro do grafo, e da outra, seja uma unidade a menos desse valor; o grau de cada um desses vértices seja um valor alto e o número de vértices que se encontram a distância da extremidade de maior excentricidade deve ser alto. Logo, o grafo é atualizado pela adição da aresta determinada pelos critérios anteriores, e o processo continúa até o número de iterações ser igual ao valor k dado como entrada. Uma descrição em pseudolinguagem da heurística proposta, baseada na excentricidade dos vértices (denominada HE), é apresentada no Algoritmo 5.1.

ALGORITMO 5.1: HE

Entrada:
n, k
$G_{base}(V, E_{base})$
$E_{cand} \subset E^C$; // arestas candidatas
Saída: $E \subseteq E^C$, $|E| = k$

$G = G_{base}$
$m_c = |E_{cand}|$
Se $k > m_c$ **então** PARE;
$E = \emptyset$;
Para $i = 1$ até k **faça**
  Para $v \in V$ **faça** calcular $e_G(v)$;
  $diam(G) = \max_{v \in V} e_G(v)$;
  Para $v \in V$ **faça** calcular $grau_G(v)$;
  Identificar $(a, b) \in E_{cand}$ tal que
    $d_G(a, b) = diam(G) - 1$
    $e_G(a) = d$ e $e_G(b) = d - 1$
    $|\{x : d_G(a, x) = d\}|$ o máximo possível
    $grau_G(a)$ e $grau_G(b)$ alto;
  $E = E \cup \{(a, b)\}$;
  $G = G \cup \{(a, b)\}$;
  $E_{cand} = E_{cand} - \{(a, b)\}$;
Retonar E;

5. Conclusão e Trabalhos futuros

Neste trabalho apresentamos um estudo analisando características que possuem as arestas do grafo complementar, que ao ser inseridas no grafo produzem aumento da conectividade algébrica. A partir desse estudo, propomos um procedimento que permite identificar arestas de um grafo com o objetivo de resolver, de maneira aproximada, o problema de aumento máximo da conectividade algébrica. A heurística proposta na Seção 4, HE, é baseada nos resultados experimentais realizados com alguns grafos. A mesma difere da heurística de perturbação, HP, proposta por Ghosh e Boyd no critério da escolha da aresta a ser inserida a cada iteração. A heurística HE é mais simples de ser implementada que a heurística HP, devido ao cálculo de um autovetor a cada iteração.
No caso de grafos de grande porte, como é o caso das redes complexas, a heurística HE seria mais viável de ser utilizada que a heurística de perturbação HP, pelo tempo de execução desse algoritmo ser menor que o do último.
Como trabalhos futuros destacamos a implementação da heurística HE e a realização de testes para verificar a qualidade da solução obtida pela mesma. Foi iniciada a implementação dos algoritmos na linguagem de programação C, utilizando MATLAB para o cálculo de autovalores e autovetores. Para tratar grafos como no caso das redes complexas, propomos fazer novos experimentos para determinar outras escolhas de arestas. Inicialmente as medidas de centralidade utilizadas no contexto de redes sociais podem dar informação importante para identificar arestas a ser inseridas no grafo que produzam aumento da conectividade algébrica. Nos testes realizados até o momento, os resultados obtidos com a medida de centralidade de autovetor não foram satisfatórios. Porém, a medida de centralidade de proximidade (closeness) pode ser uma alternativa válida.

Agradecimentos: O primeiro e terceiro autor agradecem ao programa CAPES-DS. O segundo autor foi parcialmente financiado pelo CNPq, projeto 305516/2010-8.

Referências Bibliográficas

ABREU, N. M. M.; DEL-VECCHIO, R. R.; VINAGRE, C. T. M.; STEVANOVIC,D. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. Sao Carlos, SP : *SBMAC*. 2007.

BARBOSA, D.A.B.L., AVELINO,L. B., SOUZA,R. F., OLIVEIRA, C.C.G.F., JUSTEL, C. M. Medidas de centralidade e detecção de comunidades em redes de co-autoria. *Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.* pp. 2574 - 2583. 2011.

GHOSH, A., BOYD, S. Growing well-connected graphs. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control.* pp. 6605-6611. 2006.

FALLAT, S., KIRKLAND, S. Extremizing algebraic connectivity subject to graph theoretic constraints. *The Electronic Journal of Linear Algebra* v. 3, p. 48-74. 1998.

FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal* v. 23 (98), p. 298 - 305. 1973.

GRONE, R., MERRIS, R. Ordering trees by algebraic connectivity. *Graphs Combin*. v. 6. p. 229-237. 1990.

KLEINBERG, J., EASLEY, D. Networks, Crowds and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. *Cambridge University Press*. 2010.

MAAS, C. Transportation in graphs and the admittance spectrum. *Discrete Applied Mathematics.* v.16 (1) p. 31-49. 1987.

MOSK-AOYAMA, D. Maximum algebraic connectivity augmentation is NP-hard. *Journal Elsevier, Operations Research Letters.* v. 36, p. 677-679. 2008.

SZWARCFITER, J.L. Grafos e algoritmos computacionais. Rio de Janeiro: Campus, 2ed. 1986.