

A complexidade do problema sanduíche para grafos fortemente cordais-(2,1)

Fernanda Couto¹, Luerbio Faria², Sulamita Klein¹

¹ Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro
{nandavdc,sula}@cos.ufrj.br

² Universidade Estadual do Rio de Janeiro
luerbio@cos.ufrj.br

Resumo

Um grafo é *cordal* se cada um de seus ciclos de tamanho pelo menos 4 tem uma *corda*, i.e, uma aresta entre vértices não consecutivos do ciclo. Dizemos que um grafo é *fortemente cordal* se ele é cordal e se cada um de seus ciclos pares de tamanho pelo menos 6 tem uma *corda ímpar*, i.e, uma aresta que une vértices não consecutivos separados por uma distância ímpar no ciclo. Um grafo é (2,1) se pode ter seu conjunto de vértices particionado em dois conjuntos independentes e uma clique. No PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) temos como entrada dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$ tais que $E^1 \subseteq E^2$ e perguntamos se existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ e que seja um grafo fortemente cordal-(2,1). No decorrer deste trabalho, mostraremos que este problema é NP-completo. Como corolário temos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFO CORDAIS-(2,1) é também NP-completo.

PALAVRAS-CHAVE: Problemas Sanduíche, Cordal-(2,1), Fortemente Cordal-(2,1).

ÁREA PRINCIPAL: Teoria dos Grafos.

Abstract

A graph is *chordal* if each of its cycles of length at least 4 has a chord, i.e, an edge between two non-consecutive vertices of the cycle. We say that a graph is *strongly chordal* if it is chordal and each of its even cycles of length at least 6 has an *odd chord*, that means an edge between two non-consecutive vertices that are apart in the cycle by an odd distance. A graph is (2,1) if its vertex set can be partitioned into two independent sets and one clique. In the (2,1)-STRONGLY CHORDAL SANDWICH PROBLEM we have as input two graphs $G^1 = (V, E^1)$ and $G^2 = (V, E^2)$ such that $E^1 \subseteq E^2$ and we ask if there exists a graph $G = (V, E)$ such that $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ and G is (2,1) and strongly chordal. In this paper we will prove that this problem is NP-complete. As a corollary, we have that the (2,1)-CHORDAL SANDWICH PROBLEM is also NP-complete.

KEYWORDS: Sandwich Problems, Chordal-(2,1), Strongly Chordal-(2,1).

MAIN AREA: Graph Theory.

1 Introdução

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE surgiram em 1995 como uma generalização natural dos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO, que, por sua vez, consistem em determinar se um grafo pertence ou não à uma determinada classe de grafos. Introduzidos por Golumbic, Kaplan e Shamir em [11], os PROBLEMAS SANDUÍCHE foram definidos da seguinte maneira:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE Π

Entrada: Dois grafos $G^1 = (V, E)$ e $G^2 = (V, E^2)$ tais que $E^1 \subseteq E^2$.

Pergunta: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ e que satisfaça a propriedade Π ?

Observe que se o grafo G existir, estará “ensanduichado” entre G^1 e G^2 . Sendo assim, G é chamado de GRAFO SANDUÍCHE para o par G^1 e G^2 . A fim de que o problema não seja trivial, é interessante trabalhar com grafos de entrada que não satisfaçam à propriedade Π .

Denotamos por $E^3 = \overline{E(G^2)}$ o conjunto de arestas *proibidas*. Chamamos E^1 de conjunto de arestas *obrigatórias* ou *forçadas* e E^2 de conjunto de arestas *opcionais*. Desta forma, um grafo sanduíche não pode conter arestas proibidas, pode conter algumas arestas opcionais, e deve conter todas as arestas de E^1 .

O PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para uma classe de grafos \mathcal{C} é equivalente ao PROBLEMA SANDUÍCHE particular onde $E^1 = E^2$, ou seja, o conjunto de arestas opcionais é vazio. Observe que caso o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO seja NP-completo, o PROBLEMA SANDUÍCHE também o será.

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE têm atraído muita atenção ultimamente devido à inúmeras aplicações existentes e como uma generalização natural do PROBLEMA DE RECONHECIMENTO [6, 8, 10, 14, 7].

Neste artigo estudamos o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) e mostramos que esse problema é NP-completo. Como corolário temos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS-(2,1) é também NP-completo.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo não direcionado e C um ciclo de G . Uma *corda* em G é uma aresta entre vértices não consecutivos de C . Um grafo é *cordal* se todos os seus ciclos de tamanho pelo menos 4 têm uma corda.

Seja C' um ciclo par de G . Uma *corda ímpar* é uma corda entre dois vértices não consecutivos e separados por uma distância ímpar em C' . Um grafo é *fortemente cordal* se é cordal e todo ciclo par de tamanho no mínimo 6 tem uma corda ímpar. Note que a classe dos grafos fortemente cordais é uma subclasse da classe dos grafos cordais.

Um subconjunto K (resp. S) de vértices de G é uma *clique* (resp. *conjunto independente*) se entre cada par de vértices distintos de K (resp. S) existe (resp. não existe) um aresta em G .

Os PROBLEMAS DE PARTIÇÃO têm considerável importância em Teoria dos Grafos. Eles consistem basicamente em determinar se um grafo pode ou não ter seu conjunto de vértices particionado em subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k que satisfazem propriedades *internas* ou *externas*. Por exemplo, pode-se exigir que cada subconjunto seja uma clique ou um conjunto independente (propriedades internas); ou que estes subconjuntos sejam completamente adjacentes ou não adjacentes (propriedades externas). Um conhecido problema de partição é aquele onde quer-se determinar se um dado grafo pode ter seu conjunto de vértices particionado em um conjunto independente e uma clique, ou equivalentemente, o problema de determinar se um grafo é *split*. Brandstädt [2] generalizou os grafos split ao introduzir a classe dos *grafos-(k, l)*.

Um grafo é (k, ℓ) se pode ter seu conjunto de vértices particionado em no máximo k conjuntos independentes e em no máximo ℓ cliques. Quando $k = \ell = 1$ temos um grafo split. Neste trabalho focaremos em um caso particular deste problema de partição, onde busca-se determinar se o grafo é $(2, 1)$. Brandstädt em [2, 3, 4] mostrou que reconhecer se um grafo é (k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP-completo e polinomial, caso contrário.

Um grafo é *cordal*- $(2, 1)$ se é, ao mesmo tempo, cordal e $(2, 1)$.

Um triângulo é um grafo isomorfo a um grafo completo com 3 vértices. Dois triângulos T_1, T_2 são *isolados* quando são disjuntos em vértices e não existe aresta com uma extremidade em T_1 e a outra em T_2 . Uma *t-clique* em um grafo G é uma clique que intersecta todos os triângulos de G .

Uma caracterização para a classe dos grafos- $(2, 1)$ foi dada por Nogueira em [13].

Teorema 1.1. [13] *Seja G um grafo conexo e cordal. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é $(2, 1)$;
- (ii) G possui uma *t-clique*,
- (iii) Não existem triângulos isolados em G .

Observe que esta mesma caracterização apresentada para grafos cordais- $(2, 1)$ é válida para reconhecer se um grafo fortemente cordal é também $(2, 1)$. Além disso, através dela foi obtido um algoritmo de reconhecimento para grafos cordais- $(2, 1)$ com complexidade $O(mn)$.

Uma caracterização para grafos *cordais*- (k, ℓ) foi apresentada por Hell, Klein, Protti, Nogueira em [12]. Esta caracterização conduz a um algoritmo polinomial para o reconhecimento dos grafos cordais- (k, ℓ) , com complexidade de tempo $O(n(m + n))$.

Da literatura, sabe-se que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS- $(2, 1)$ é NP-completo [5], assim como o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS [11] e o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS [10]. Uma pergunta natural que surge após o estudo destes problemas é: qual a complexidade do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$? A seguir definimos formalmente o problema.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$

Entrada: Dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$ tal que $E^1 \subseteq E^2$.

Pergunta: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ e que seja cordal- $(2, 1)$?

Devido ao fato do PROBLEMA DE RECONHECIMENTO PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$ ser solucionável em tempo polinomial, começamos o estudo do PROBLEMA SANDUÍCHE para esta classe de grafos com a esperança de podermos solucioná-lo em tempo polinomial. A ferramenta que gostaríamos de utilizar para a construção do algoritmo era a caracterização por subgrafos proibidos para grafos cordais- $(2, 1)$ [13]. Entretanto, as expectativas iniciais não se confirmaram e, com o intuito de mostrar que este é também um problema NP-completo, vamos provar um resultado ainda mais forte: o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(2, 1)$ é NP-completo.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(2, 1)$

Entrada: Dois grafos $G^1 = (V, E^1)$ e $G^2 = (V, E^2)$ tal que $E^1 \subseteq E^2$.

Pergunta: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ e que seja fortemente cordal- $(2, 1)$?

2 Problema Sanduíche para grafos fortemente cordais-(2,1)

Esta seção dedica-se à prova de que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) é NP-completo. Como consequência deste resultado, temos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS-(2,1) é também NP-completo. Ambos os problemas surgiram através de um questionamento natural após o estudo dos PROBLEMAS SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS, FORTEMENTE CORDAIS e (2,1) que são todos NP-completos [11, 10, 5].

Teorema 2.1. *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) é NP-completo.*

Com a finalidade de provar o Teorema 2.1, vamos apresentar o PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO FORTE DE GRAFOS COLORIDOS (STCG) introduzido por Faria, Figueiredo, Klein e Shritaran em [10] a fim de mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS é NP-completo. A primeira versão, denominada PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS (TCG) do problema STCG foi apresentada e provada ser NP-completa por Bodlaender, Fellows e Warnow em [1]. Com base na instância criada para o problema TCG, Golubic et al. [11] mostraram que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS é NP-completo, deixando em aberto o problema solucionado por Faria et al.

O PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO FORTE DE GRAFOS COLORIDOS (STCG) pode ser formulado da seguinte maneira:

PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO FORTE DE GRAFOS COLORIDOS (STCG)

Entrada: Um grafo $G = (V, E)$ e uma coloração própria de vértices $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$.

Pergunta: Existe um supergrafo $G' = (V, E')$ de G que seja fortemente cordal e também esteja propriamente colorido em vértices por c ?

Teorema 2.2. [10] *O problema STCG é NP-completo mesmo quando cada cor é atribuída a exatamente dois vértices.*

Para mostrar que o STCG é NP-completo, foi feita uma redução polinomial para o STCG da seguinte variação do problema 3SAT:

NEM TODOS IGUAIS (NAE-3SAT)

Entrada: Um conjunto de variáveis U e uma coleção de cláusulas \mathcal{C} de U de modo que cada cláusula tenha exatamente 3 literais.

Pergunta: Existe uma atribuição verdadeira para U de modo que em cada cláusula exista pelo menos um literal verdadeiro e pelo menos um literal falso?

Neste artigo, vamos apresentar a instância construída para provar o Teorema 2.2 objetivando mostrar que o grafo construído, além de ser fortemente cordal, é também um grafo-(2,1). Os detalhes da prova da NP-completude do problema STCG podem ser encontrados em [10].

Considere uma instância $I = (U, \mathcal{C})$ do NAE-3SAT, onde U é um conjunto de variáveis lógicas e \mathcal{C} é uma coleção de cláusulas com $n = |U|$ e $m = |\mathcal{C}|$. Vamos construir o grafo $G_I = (V, E)$, que consiste de n componentes decisão e m componentes cláusula. Vamos assumir que nenhuma cláusula de I contenha um literal e seu complemento.

Cada componente decisão possui os vértices: H (cabeça), $S_X, S_{\bar{X}}$ (ombros), $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$ (jelhos) e F (pé), como na Figura 1. Nossa instância particular $G_I = (V, E)$ para o problema

STCG tem apenas uma cabeça e um pé, um par de ombros para cada variável X e um par de joelhos para cada aparição de X ou \bar{X} em uma cláusula i .

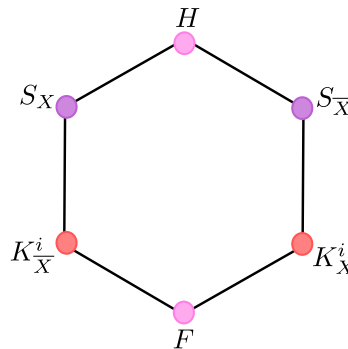


Figura 1: Componente decisão colorida.

A atribuição de cores a cada um desses vértices será feita da seguinte forma: Cabeça e pé recebem a mesma cor; a cada par de ombros $S_X, S_{\bar{X}}$ é atribuída uma mesma cor, e cada par de joelhos $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$ também recebe a mesma cor.

Para criarmos a *componente cláusula* não acrescentamos vértices às componentes já criadas, apenas arestas entre os joelhos do grafo.

Um joelho K_X^i é *verdadeiro* se o literal X associado a ele recebe valor verdadeiro, caso contrário, o joelho é dito *falso*.

Seja L um literal da i -ésima cláusula. Chamamos K_L^i de *joelho ativo* e $K_{\bar{L}}^i$ de *joelho inativo*. Para cada par K_L^i e $K_{\bar{L}}^i$, apenas um joelho é ativo.

Considere a cláusula (X, Y, Z) . A componente cláusula correspondente será como a representada na Figura 2. Isso conclui a construção do grafo G_I .

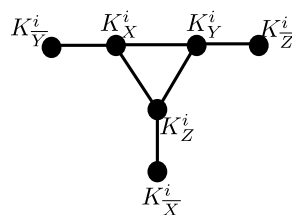


Figura 2: Componente cláusula correspondente a (X, Y, Z) .

Observe que existem apenas duas maneiras de cordalizar a componente relativa à variável X respeitando a coloração dos vértices. Como as arestas $(H, F), (S_X, S_{\bar{X}}), (K_X^i, K_{\bar{X}}^i)$ ficam proibidas de serem acrescentadas devido a coloração, para triangularizarmos a componente decisão, ou adicionamos as arestas $(H, K_X^i), (S_X, K_X^i), (S_X, F)$ ou as arestas $(H, K_{\bar{X}}^i), (S_{\bar{X}}, K_{\bar{X}}^i), (S_{\bar{X}}, F)$. Ambas as orientações formam, o que chamaremos, a *Marca do Zorro*. O primeiro conjunto de arestas que citamos formam a *orientação positiva* da Marca do Zorro, enquanto que o segundo forma a *orientação negativa* da Marca.

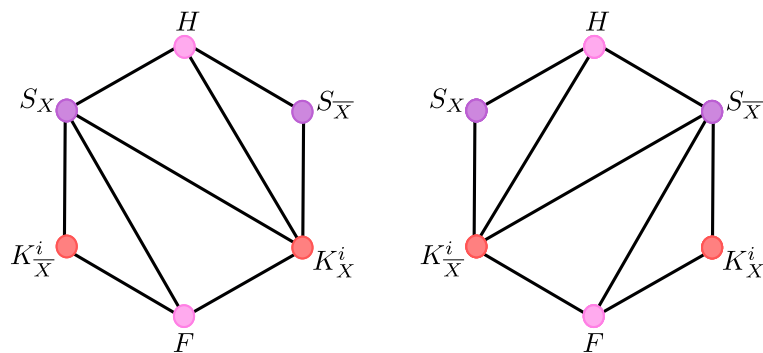


Figura 3: Marcas do Zorro nas orientações positiva e negativa, da esquerda para direita.

Além disso, é importante ressaltar que, ou inserimos todas as arestas (H, K_X^i) ou todas as arestas $(H, K_{\bar{X}}^i)$.

Se as Marcas do Zorro estiverem orientadas positivamente na componente decisão referente a X , então o literal X receberá valor *verdadeiro*. Caso contrário, receberá valor *falso*.

Para a conveniência do leitor oferecemos, na Figura 4, um exemplo de grafo G_I obtido a partir de uma instância particular do NAE-3SAT.

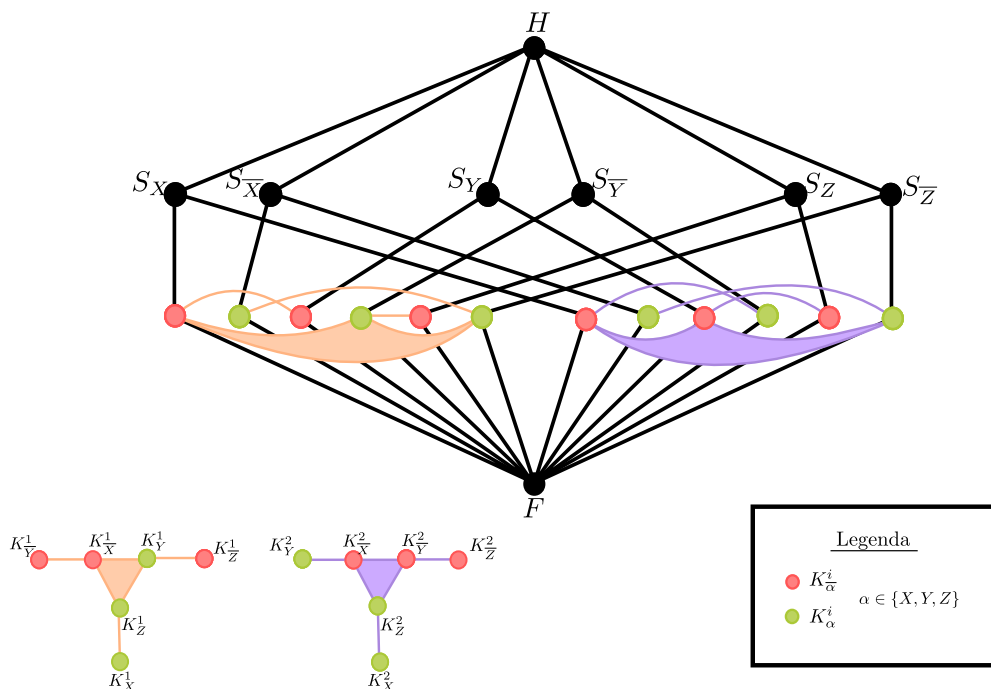


Figura 4: Exemplo de G_I obtido a partir da instância $U = \{X, Y, Z\}, C = \{(\bar{X}, Y, Z), (\bar{X}, \bar{Y}, Z)\}$ do NAE-3SAT.

Observe que, considerando uma atribuição que satisfaça a instância I do problema NAE-

3SAT, temos pelo menos um literal verdadeiro e um falso em cada cláusula. Assim, temos apenas 2 tipos cláusulas: *tipo-1* (cláusula com dois literais falsos) e *tipo-2* (cláusula com apenas um literal falso) como na Figura 5.

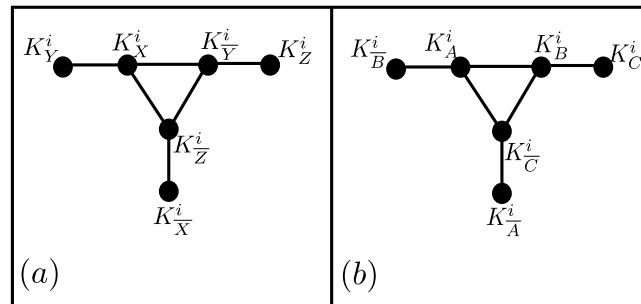


Figura 5: Em (a) uma componente cláusula do *tipo-1* para a cláusula (X, \bar{Y}, \bar{Z}) . Em (b), uma componente do *tipo-2* para a cláusula (A, B, \bar{C}) .

Considerem os seguintes conjuntos:

- O_V e O_F os conjuntos dos ombros verdadeiros e falsos do grafo, respectivamente,
- J_V e J_F os conjuntos dos joelhos verdadeiros e falsos do grafo, respectivamente.

A fim de obter um grafo fortemente cordal-(2,1), vamos adicionar a G_I o seguinte conjunto de arestas:

- A orientação positiva da *Marca do Zorro* em cada componente decisão;
- As arestas entre todos os vértices de $O_V \cup J_V$, formando assim uma clique destes vértices;
- As arestas com uma extremidade em O_V e outra em J_F , e
- As arestas com uma extremidade em J_V e outra em O_F .

Para definirmos as arestas que serão adicionadas entre J_V e J_F , precisamos ainda definir os seguintes conjuntos:

- $J_1 = \{\text{joelhos falsos inativos adjacentes a um joelho falso ativo}\};$
- $J_2 = \{\text{joelhos falsos inativos de cláusulas do tipo-2 adjacentes a um joelho verdadeiro ativo}\};$
- $J_3 = \{\text{joelhos falsos ativos de cláusulas do tipo-1 adjacentes a um joelho falso inativo}\};$
- $J_4 = \{\text{joelhos falsos ativos de cláusulas do tipo-1 adjacentes a um joelho verdadeiro inativo}\};$
- $J_5 = \{\text{joelhos falsos ativos de cláusulas do tipo-2}\}.$

São inseridas ao grafo as arestas descritas a seguir para finalizar o processo de transformação de G_I em um grafo fortemente cordal-(2,1) e propriamente colorido.

- Cada joelho verdadeiro ativo adjacente a um joelho falso inativo (em uma cláusula do tipo-2) será adjacente a todo joelho em $J \setminus J_1$.
- Cada joelho verdadeiro ativo de cláusulas do tipo-1 será adjacente a todo joelho em $J \setminus (J_1 \cup J_2)$;
- Cada joelho verdadeiro inativo de cláusulas do tipo-1 será adjacente a todo joelho em $J \setminus (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$,
- Cada joelho verdadeiro ativo de cláusulas do tipo-2 adjacentes a um joelho verdadeiro inativo será adjacente a todo joelho em $J \setminus (J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4)$.

Na Figura 6 adicionamos as arestas que conectam alguns joelhos verdadeiros a joelhos falsos.

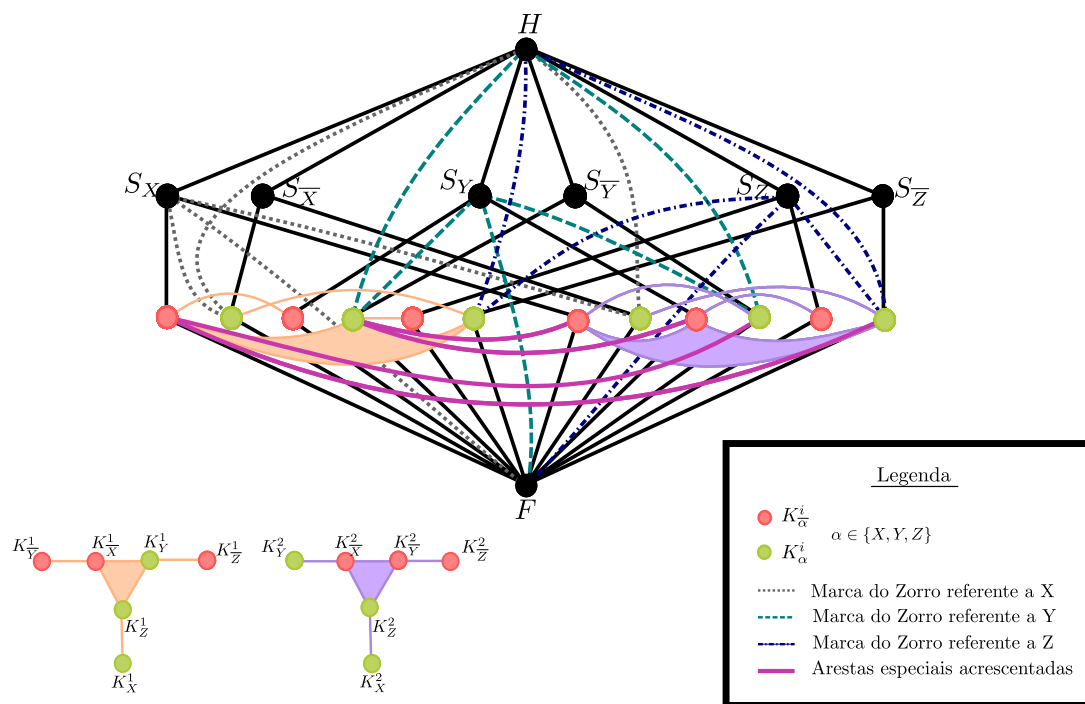


Figura 6: Supergrafo G fortemente cordal de G_I obtido da instância $(U = \{X, Y, Z\}, C = \{(\bar{X}, Y, Z), (\bar{X}, \bar{Y}, Z)\})$ do NAE-3SAT e a atribuição verdade $X = Y = Z =$ verdadeiro. Algumas arestas foram omitidas para maior clareza do desenho.

Lema 2.3. *O supergrafo G construído a partir de G_I , quando I é uma instância satisfável, é um grafo fortemente cordal-(2, 1).*

Demonstração. Em [10] foi mostrado que o grafo G é fortemente cordal. Vamos utilizar agora o Teorema 1.1 para mostrar que G é um grafo-(2, 1). Note que, se G é um grafo fortemente cordal, então G é cordal. Logo, pelo Teorema 1.1 é suficiente provar que o grafo G não possui triângulos isolados.

Podemos observar que toda aresta que foi adicionada a G_I a fim de transformá-lo no grafo G tem como um de seus extremos um joelho verdadeiro ou um ombro verdadeiro. Portanto, se estas arestas adicionarem novos triângulos ao grafo, então, certamente, esses triângulos são compostos por pelo menos um joelho verdadeiro ou um ombro verdadeiro.

Note que, devido a componente cláusula (Figura 2), são formados três tipos de triângulos no grafo, a saber: os que são compostos unicamente por joelhos ativos de uma mesma cláusula; os que são compostos por pelo menos um joelho verdadeiro e o pé F , e os que são compostos por 2 joelhos falsos relativos a uma mesma cláusula e o pé F . Os triângulos do primeiro tipo têm pelo menos um joelho verdadeiro, já que a instância do problema NAE-3SAT deve ser satisfeita. Os triângulos do segundo tipo têm claramente um joelho verdadeiro, entretanto, os triângulos do terceiro tipo não possuem nem joelhos verdadeiros nem ombros verdadeiros. Denotaremos por T^* o conjunto dos triângulos que são formados por 2 joelhos falsos e pelo pé F .

Observe ainda que não são formados triângulos compostos pela cabeça H e joelhos falsos, já que H não é adjacente a tais vértices. Além disso, joelhos falsos de cláusulas distintas não são adjacentes.

Assim, podemos afirmar:

Afirmção 2.4. *Excluindo-se as arestas da componente cláusula, todos os triângulos de G têm pelo menos um ombro verdadeiro ou um joelho verdadeiro.*

Esta Afirmção é relevante já que joelhos verdadeiros e ombros verdadeiros formam uma clique e, portanto, temos pelo menos uma aresta entre cada par de triângulos.

Afirmção 2.5. *Os triângulos de T^* não são isolados dois a dois.*

Esta Afirmção é imediata já que todos os triângulos de T^* têm um vértice comum: o pé F .

Afirmção 2.6. *Os triângulos de T^* são ligados aos demais triângulos do grafo.*

De fato, basta observarmos que o vértice F é adjacente a todo joelho e a todo ombro verdadeiro, devido às Marcas do Zorro.

Portanto, a adição do conjunto de arestas que descrevemos gera um grafo fortemente cordal- $(2, 1)$.

A partir desta argumentação, é possível perceber que o pé F deve pertencer a t -clique, assim como os ombros e joelhos verdadeiros. Dessa forma, fica fácil obter a $(2, 1)$ -partição do grafo fortemente cordal G .

Clique: ombros verdadeiros, joelhos verdadeiros e o pé.

Conjuntos independentes:

S_1 : cabeça, joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos verdadeiros inativos, joelhos falsos inativos.

S_2 : ombros falsos, joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos falsos inativos.

Note que a cabeça H não é adjacente a joelhos falsos e joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos verdadeiros inativos não são adjacentes a joelhos falsos inativos, mesmo quando são de cláusulas distintas, pois as arestas específicas que inserimos são sempre entre joelhos verdadeiros e joelhos falsos. Além disso, ombros falsos não são adjacentes a joelhos falsos. Logo esta $(2, 1)$ -partição está bem definida. □

Agora temos as ferramentas necessárias para provar o Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) é NP-completo.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) pertence à classe NP.

Um certificado para este problema é o próprio grafo $G = (V, E)$. Inicialmente, devemos verificar se G é supergrafo de $G^1 = (V, E^1)$ e subgrafo de $G^2 = (V, E^2)$. Podemos verificar se G é um grafo fortemente cordal em tempo polinomial [9]. Em seguida, basta verificarmos se este grafo não possui triângulos isolados, já que, sendo fortemente cordal, ele é obviamente cordal e, portanto, podemos utilizar a caracterização de grafos cordais-(2,1) [13] reproduzida no Teorema 1.1. Esta verificação é feita em tempo $O(nm)$ [13]. Logo, conseguimos certificar que G é um grafo fortemente cordal-(2,1) em tempo polinomial e, conseqüentemente, este problema pertence à classe NP.

Para provar que este problema é NP-completo, basta utilizar a mesma redução polinomial feita em [10] do problema STCG para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(2,1) adicionada ao Lema 2.3.

□

Corolário 2.7. *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS-(2,1) é NP-completo.*

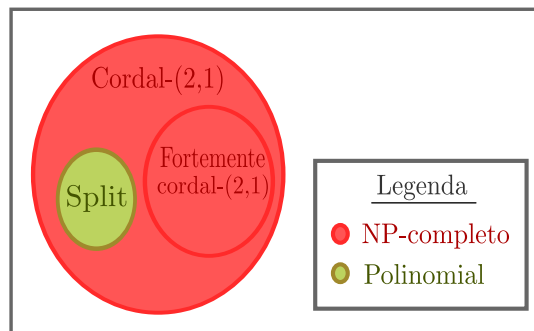


Figura 7: Complexidade dos problemas sanduíche para as classes de grafos split, fortemente cordais-(2,1) e cordais-(2,1).

Referências

- [1] H.L. Bodlaender, M.R. Fellows, and T.J. Warnow. Two strikes against perfect phylogeny. *Computer Science*, 623:273–283, 1992.
- [2] A. Brandstadt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1-3):47–54, 1996.
- [3] A. Brandstadt. Corrigendum. *Discrete Mathematics*, 186:295, 2005.

- [4] A. Brandstadt and T. Szymczak V. B. Le. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1-3):59–73, 1998.
- [5] S. Dantas, C.M. de Figueiredo, and L. Faria. On decision and optimization (k,l) -graph sandwich problems. *Discrete Applied Mathematics*, 143:155–165, 2004.
- [6] S. Dantas, S. Klein, C. P. de Mello, and A. Morgana. The graph sandwich problem for p_4 -sparse graphs. *Discrete Mathematics*, 309(11):3664 – 3673, 2009.
- [7] S. Dantas, R.B. Teixeira, and C.M.H. Figueiredo. The polynomial dichotomy for three nonempty part sandwich problems. *Discrete Applied Mathematics*, 2010.
- [8] M. Dourado, P. Petitto, R.B. Teixeira, and C.M.H. Figueiredo. Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems. *Journal Brazilian Computer Society*, 14:45–52, 2008.
- [9] M. Farber. *Applications of Linear Programming Duality to Problems Involving Independence and Domination*. Ph.d. thesis, Simon Fraser University, Canada, 1981.
- [10] C.M.F. Figueiredo, L. Faria, S. Klein, and R. Sritharan. On the complexity of the sandwich problems for strongly chordal graphs and chordal bipartite graphs. *Theoretical Computer Science*, 381:57–67, 2007.
- [11] M.C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir. Graph sandwich problems. *Journal of Algorithms*, 19(3):449–473, 1995.
- [12] P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141:185–194, 2004.
- [13] L.T. Nogueira. Grafos split e grafos split generalizados. M.sc. thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [14] R. Sritharan. Chordal bipartite completion of colored graphs. *Discrete Mathematics*, 308:2581–2588, 2008.