

Emparelhamento de subportadoras de transmissão e alocação de potência em sistemas de dois saltos

Manoel B. Campêlo, Carlos D. Rodrigues

Parallelism, Graphs and Optimization - ParGO
Universidade Federal do Ceará - UFC
Campus do Pici, Bloco 910. 60455-760 - Fortaleza, CE - Brasil
{mcampelo,diego}@lia.ufc.br

**José M. B. da Silva Jr., Yuri C. B. Silva,
Tarcisio F. Maciel, Francisco R. P. Cavalcanti**

Wireless Telecommunications Research Group - GTEL
Universidade Federal do Ceará - UFC
Campus do Pici, Bloco 910. 60455-760 - Fortaleza, CE - Brasil
{mairton,yuri,maciel,rodrigo}@gtel.ufc.br

Resumo

O uso de repetidores pode melhorar a performance de sistemas sem fio em termos de velocidade de transmissão, cobertura e confiabilidade. Neste artigo estudamos o emparelhamento de subportadoras para sistemas com dois saltos visando maximizar a taxa de transferência total. O problema é formulado como um Problema de Programação Não linear Mista (MINLP). Mostramos então que este problema pode ser separado como um problema de emparelhamento e um problema não linear em variáveis contínuas de alocação de potência. Explorando suas características, apresentamos uma solução ótima para o emparelhamento e uma solução ótima baseada nos algoritmo de *waterfilling* e *golden section* para a alocação de potência, ambos com baixo custo computacional.

PALAVRAS-CHAVE: alocação de potência, emparelhamento de subportadoras, mochila não linear

ÁREA: PO em telecomunicações e sistemas de informação.

Abstract

The usage of relays can improve the performance of wireless systems in terms of data rates, coverage and reliability. In this paper we study joint subcarrier matching and power allocation for two-hop relay systems with the purpose of maximizing the total spectral efficiency. The problem is formulated as a mixed integer nonlinear problem (MINLP). We show that the problem can be separated into subcarrier matching and power allocation subproblems. In this paper we demonstrate that the power allocation problem can be reformulated into a more tractable form, allowing us to develop an optimal solution based on waterfilling and golden section algorithms, both with low computational cost.

KEYWORDS: power allocation, subcarrier matching, nonlinear knapsack.

AREA: OR in telecommunications and information systems.

1 Introdução

Um dos pilares para a quarta geração (4G) de sistemas móveis é a capacidade de prover altas taxas de transferência de dados de forma flexível e confiável, o que motiva a promoção de sistemas multiplexados de entrada e saída (MIMO's) e de múltiplo acesso com divisão de frequência ortogonais (OFDMA's) [7]. Um dos desafios para essas tecnologias é a garantia de qualidade do sinal em grandes distâncias. Neste contexto, o uso de repetidores do sinal fonte aparece como uma solução promissora [4, 5].

Neste trabalho consideramos o uso de um único repetidor. A estratégia da estação retransmissora é de decodificar a mensagem da estação base e repassar a mensagem para a estação destino. Por hipótese, cada nó possui uma antena e o destino não recebe sinal da estação base. Por isso, é necessário um protocolo de transmissão em dois tempos. No primeiro tempo a fonte transmite para o repetidor, enquanto que no segundo tempo, o repetidor repassa a mensagem para o destino. Isto caracteriza o sistema de dois saltos.

Cada transmissão exige do transmissor (fonte ou retransmissor) uma alocação de potência entre as subportadoras de transmissão. Essa alocação visa estabelecer uma taxa de transmissão para o canal, limitada a uma potência máxima para todas as subportadoras. Além disso, os dados transmitidos na fonte devem ser realocados em uma das subportadoras do retransmissor, em uma correspondência um-para-um entre as subportadoras da fonte e do retransmissor, caracterizando assim um problema de emparelhamento.

Observa-se então, do ponto de vista teórico, um Problema de Programação Não-linear Mista (MINLP), que é em geral *NP-difícil*. No entanto, mostramos aqui, seguindo a literatura [9, 3], que este problema pode ser desacoplado entre um problema de emparelhamento e um problema não linear de alocação de potência. É sabido ainda que o primeiro admite uma solução polinomial trivial. Este resultado, embora já disponível na literatura [3], é apresentado aqui através de uma prova alternativa e simplificada.

Devido a restrições de tempo computacional, o problema de alocação de potência é atacado comumente através de soluções inexatas: relaxações [9] ou heurísticas [8, 2], embora uma solução ótima para o problema possa ser vista em [3]. Aqui propomos uma solução inovadora de baixo custo computacional, baseada no estudo das propriedades do problema. De fato, mostramos que a solução ótima pode ser obtida, em pior caso, através de duas execuções de um algoritmo do tipo *water filling* (linear no número de subportadoras) [6] e um número linear de buscas locais do tipo *golden section* [1] em um intervalo pré-calculado.

2 Modelo matemático

Seja N o número de subportadoras fonte, que é igual àquele de subportadoras retransmissoras. A taxa de transmissão da subportadora i é função da potência P_i a ela aplicada, sendo dada pela expressão $\frac{R_i(P_i)}{2N}$, onde

$$R_i(P_i) = \log(1 + P_i \cdot h_i), \quad (1)$$

e h_i é uma constante característica da subportadora, que reflete a sua eficiência em um dado meio, podendo refletir também os efeitos de ruídos no canal. Note que, para obtermos uma dada taxa de transmissão $R/2N$ na subportadora i , devemos aplicar uma potência

$$P_i = \frac{2^R - 1}{h_i}. \quad (2)$$

Na notação acima definida, vamos usar um superíndice s ou r para nos referenciar ao lado fonte ou retransmissor, respectivamente. Por exemplo, P_i^s denotará a potência aplicada

a i -ésima subportadora fonte. Além disso, sem perda de generalidade, vamos admitir que as subportadoras de ambos os lados estão numeradas em ordem não decrescente de eficiência, ou seja,

$$h_1^s \geq h_2^s \geq \dots \geq h_N^s \quad \text{e} \quad h_1^r \geq h_2^r \geq \dots \geq h_N^r.$$

Definindo a variável binária x_{ij} para indicar se a fonte i será emparelhada com o repetidor j , o problema pode então ser descrito através do seguinte modelo:

$$\max \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot \min\{R_i^s(P_i^s), R_j^r(P_j^r)\} \quad (3a)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i=1}^N P_i^s \leq P_T^s, \quad (3b)$$

$$\sum_{j=1}^N P_j^r \leq P_T^r, \quad (3c)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq N, \quad (3d)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad (3e)$$

$$P_i^s \geq 0, P_i^r \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad (3f)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad (3g)$$

onde P_T^s e P_T^r são as potências totais disponíveis em cada lado. A função objetivo procura maximizar a taxa de transmissão total, que é a soma das taxas de transmissão entre os emparelhamentos formados. Por sua vez, a taxa de transmissão de um emparelhamento é o mínimo entre as taxas de transmissão de cada subportadora do par. Observe que retiramos a constante $(2N)^{-1}$, que apareceria em cada parcela de (3a), uma vez que ela não interfere na solução.

O modelo acima pode ser bastante simplificado a partir de dois resultados que apresentamos nessa seção. Primeiro, mostramos que os subproblemas de emparelhamento e alocação de potência podem ser desacoplados. Mais ainda, derivamos uma solução explícita para o emparelhamento, o que leva a eliminação das variáveis binárias do modelo. Segundo, estabelecemos uma relação linear entre os valores de P_i^s e P_i^r , para cada $i = 1, 2, \dots, N$, em uma solução ótima, o que nos permite reescrever tudo apenas em função das variáveis relativas às fontes. Por simplicidade de notação, associado a uma solução viável $(\bar{x}, \bar{P}^s, \bar{P}^r)$ de (3), vamos usar

$$\bar{R}_i^s = R_i^s(\bar{P}_i^s), \quad \bar{R}_j^r = R_j^r(\bar{P}_j^r), \quad \bar{R}_{ij} = \min\{\bar{R}_i^s, \bar{R}_j^r\}$$

para denotar a contribuição à função objetivo quando as subportadoras i e j são emparelhadas, ou seja, $x_{ij} = 1$.

O resultado do Lema 1 pode ser visto em [3]. Com efeito em [9] o autor apresenta o mesmo resultado para um problema similar, quando fonte e repetidor estão sujeitas a uma única restrição de potência máxima. Aqui apresentamos uma versão alternativa e simplificada da prova.

Lema 1. *Existe uma solução ótima (x^*, P^{s*}, P^{r*}) para (3) tal que $x_{ii}^* = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, N$.*

Demonstração. Considere uma solução ótima $(\bar{x}, \bar{P}^s, \bar{P}^r)$ que não satisfaz a propriedade desejada. Seja i o menor índice tal que $x_{ii}^* = 0$. Então existem $k > i$ e $\ell > i$ tais que $\bar{x}_{ik} = \bar{x}_{\ell i} = 1$. Suponha que $\bar{R}_{ik} \geq \bar{R}_{\ell i}$. No outro caso, a análise é similar. Vamos construir uma solução $(\hat{x}, \hat{P}^s, \hat{P}^r)$ que difere de $(\bar{x}, \bar{P}^s, \bar{P}^r)$ apenas nos seguintes itens:

$$(i) \hat{x}_{ii} = 1, \hat{x}_{\ell k} = 1, \hat{x}_{ik} = \hat{x}_{\ell i} = 0.$$

$$(ii) \hat{P}_k^r = \frac{2^{\bar{R}_{\ell i}} - 1}{h_k^r}.$$

$$(iii) \hat{P}_i^r = \bar{P}_i^r + \bar{P}_k^r - \hat{P}_k^r.$$

Observe que $(\hat{x}, \hat{P}^s, \hat{P}^r)$ é uma solução viável para o problema, pois \hat{x} satisfaz (3d)-(3e), devido a (i), e \hat{P}^r satisfaz (3c), uma vez que $\hat{P}_i^r + \hat{P}_k^r = \bar{P}_i^r + \bar{P}_k^r$, devido a (iii).

Vamos agora mostrar que o valor da função objetivo em $(\hat{x}, \hat{P}^s, \hat{P}^r)$ não é inferior àquele em $(\bar{x}, \bar{P}^s, \bar{P}^r)$, ou seja, que ambas as soluções são ótimas. Basta mostrar que $\hat{R}_{\ell k} = \bar{R}_{\ell i}$ e $\hat{R}_{ii} \geq \bar{R}_{ik}$. Para a igualdade, podemos usar (2) e concluir que a potência \hat{P}_k^r definida em (ii) é tal que $\hat{R}_k^r = \bar{R}_{\ell i}$. Então, $\hat{R}_{\ell k} = \min\{\hat{R}_\ell^s, \hat{R}_k^r\} = \min\{\bar{R}_\ell^s, \bar{R}_{\ell i}\} = \bar{R}_{\ell i}$. Para a desigualdade, partimos de

$$\hat{R}_{ii} = \min\{\hat{R}_i^s, \hat{R}_i^r\} = \min\{\bar{R}_i^s, \hat{R}_i^r\} \geq \min\{\bar{R}_{ik}, \hat{R}_i^r\}.$$

Então devemos mostrar que $\hat{R}_i^r \geq \bar{R}_{ik}$. Por (1) e (iii), temos que

$$\hat{R}_i^r = \log \left(1 + (\bar{P}_i^r + \bar{P}_k^r - \hat{P}_k^r) h_i^r \right).$$

Como $\bar{R}_i^r \geq \bar{R}_{\ell i}$ e $\bar{R}_k^r \geq \bar{R}_{ik}$, obtemos de (2) que

$$\bar{P}_i^r \geq \frac{2^{\bar{R}_{\ell i}} - 1}{h_i^r} \quad \text{e} \quad \bar{P}_k^r \geq \frac{2^{\bar{R}_{ik}} - 1}{h_k^r}.$$

Segue então de (ii) que

$$\begin{aligned} \hat{R}_i^r &\geq \log \left(1 + \left(\frac{2^{\bar{R}_{\ell i}} - 1}{h_i^r} + \frac{2^{\bar{R}_{ik}} - 1}{h_k^r} - \frac{2^{\bar{R}_{\ell i}} - 1}{h_k^r} \right) h_i^r \right) \\ &= \log \left(2^{\bar{R}_{\ell i}} + \frac{h_i^r}{h_k^r} (2^{\bar{R}_{ik}} - 2^{\bar{R}_{\ell i}}) \right) \\ &\geq \log \left(2^{\bar{R}_{ik}} \right) = \bar{R}_{ik}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade deve-se ao fato de que $\frac{h_i^r}{h_k^r} \geq 1$ pois $k > i$.

Em qualquer caso, obtemos uma nova solução ótima $(\hat{x}, \hat{P}^s, \hat{P}^r)$ que satisfaz a propriedade desejada para, pelo menos, uma subportadora a mais. Repetindo-se o processo a partir dessa nova solução, chegamos, em no máximo $N - 1$ passos, a uma solução ótima com a propriedade desejada para todas as subportadoras. \square

Lema 2. *Existe uma solução ótima (x^*, P^{s*}, P^{r*}) para (3) tal que, para todo $i = 1, 2, \dots, N$:*

$$(i) x_{ii}^* = 1;$$

$$(ii) P_i^{r*} = \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^{s*} \quad \text{e, conseqüentemente, } R_{ii}^* = R_i^{s*} = R_i^{r*}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1, existe $(\bar{x}, \bar{P}^s, \bar{P}^r)$ uma solução ótima de (3) satisfazendo (i). Vamos construir uma solução (x^*, P^{s*}, P^{r*}) , onde $x^* = \bar{x}$, $P_i^{s*} = \frac{2^{\bar{R}_{ii}-1}}{h_i^s}$ e $P_i^{r*} = \frac{2^{\bar{R}_{ii}-1}}{h_i^r}$. Claramente, essa solução satisfaz (i) e (ii). Vamos mostrar sua viabilidade e sua otimalidade. Trivialmente, o emparelhamento é viável, dado que $x^* = \bar{x}$. Além disso, a i -ésima subportadora fonte e retransmissora recebem a potência para gerar $R_i^{s*} = R_i^{r*} = \bar{R}_{ii}$ e, portanto, $R_{ii}^* = \bar{R}_{ii}$, o que mantém inalterado o valor da função objetivo. Finalmente, o fato de que $\bar{R}_{ii} = \min\{\bar{R}_i^s, \bar{R}_i^r\}$ e a definição das novas potências levam a $P_i^{s*} \leq \bar{P}_i^s$ e $P_i^{r*} \leq \bar{P}_i^r, \forall 1 \leq j \leq N$. \square

Os lemas 1 e 2 levam ao seguinte modelo simplificado para o problema:

$$(Q) \max \sum_{i=1}^N \ln(1 + P_i^s \cdot h_i^s) \quad (4a)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i=1}^N P_i^s \leq P_T^s, \quad (4b)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^s \leq P_T^r, \quad (4c)$$

$$P_i^s \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq N. \quad (4d)$$

Observe que a troca na base do logaritmo que descreve a função objetivo não altera a solução ótima. Por outro lado, isto simplifica o cálculo de derivadas que usaremos na próxima seção.

Quando desconsideramos a restrição (4b) ou a restrição (4c), obtemos, respectivamente, as relaxações (Q^r) e (Q^s) dadas abaixo.

$$(Q^s) \max \sum_{i=1}^N \ln(1 + P_i^s \cdot h_i^s) \quad (Q^r) \max \sum_{i=1}^N \ln(1 + P_i^r \cdot h_i^r)$$

$$\text{sujeito a : } \sum_{i=1}^N P_i^s \leq P_T^s, \quad \text{sujeito a : } \sum_{i=1}^N P_i^r \leq P_T^r,$$

$$P_i^s \geq 0, \forall 1 \leq i \leq N, \quad P_i^r \geq 0, \forall 1 \leq i \leq N.$$

Qualquer dos subproblemas (Q^r) ou (Q^s) pode ser resolvido em tempo linear, pelo método *water filling*[6]. A solução de um desses subproblemas pode ser ótima para (Q) se gera solução viável para o outro subproblema pela transformação expressa no Lema 2(ii).

Lema 3. *Seja P^{s*} uma solução ótima para (Q^s) . Se P^{r*} dado por $P_i^{r*} = \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^{s*}$ é viável para (Q^r) , então P^{s*} é solução ótima para (Q) .*

Lema 4. *Seja P^{r*} uma solução ótima para (Q^r) . Se P^{s*} dado por $P_i^{s*} = \frac{h_i^r}{h_i^s} P_i^{r*}$ é viável para (Q^s) , então P^{s*} é solução ótima para (Q) .*

Para finalizarmos a seção, mostramos que o problema (Q) preserva um propriedade satisfeita por ambos (Q^s) e (Q^r) : a potência total é distribuída entre as sub-portadoras mais eficientes.

Lema 5. *Existe solução ótima P^{s*} de (Q) onde, para todo $i = 1, 2, \dots, N - 1$, $P_i^{s*} = 0$ implica $P_{i+1}^{s*} = 0$.*

Demonstração. Seja P uma solução viável para (Q) , onde $P_i = 0$ e $P_{i+1} > 0$ para algum i . Defina $\theta = \min \left\{ \frac{h_i^r}{h_{i+1}^r}, \frac{h_{i+1}^s}{h_i^s} \right\}$. Note que $0 < \theta \leq 1$. Defina um novo ponto \bar{P} , mudando apenas as coordenadas i e $i + 1$, redefinidas por:

$$\bar{P}_i = \theta P_{i+1} > 0 \quad \text{e} \quad \bar{P}_{i+1} = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \bar{P}_i + \bar{P}_{i+1} &= \theta P_{i+1} \leq P_i + P_{i+1}, \\ \frac{h_i^s}{h_i^r} \bar{P}_i + \frac{h_{i+1}^s}{h_{i+1}^r} \bar{P}_{i+1} &= \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i + \frac{h_i^s}{h_i^r} \theta P_{i+1} \leq \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i + \frac{h_{i+1}^s}{h_{i+1}^r} P_{i+1}. \end{aligned}$$

A partir dessas expressões, podemos deduzir que \bar{P} é viável para (Q) . Mais ainda, note que $\theta \geq \frac{h_{i+1}^s}{h_i^s}$, uma vez que $h_{i+1}^r \geq h_i^r$ e $h_{i+1}^s \geq h_i^s$. Logo,

$$h_i^s \bar{P}_i + h_{i+1}^s \bar{P}_{i+1} = h_i^s P_i + \theta h_i^s P_{i+1} \geq h_i^s P_i + h_{i+1}^s P_{i+1}$$

A desigualdade acima implica que o valor da função objetivo em \bar{P} é melhor ou igual àquele em P . Repetindo-se o mesmo raciocínio, a partir de \bar{P} , um número finito de vezes, obtemos um solução viável melhor ou igual a P que satisfaz a propriedade desejada. Como P é uma solução viável arbitrária, o resultado segue. \square

3 Condições de otimalidade

As condições de Karush-Kuhn-Tucker para o problema (Q) são dadas por (4b)-(4c) junto com:

$$\frac{h_i^s}{1 + h_i^s P_i^s} - \lambda^s - \frac{h_i^s}{h_i^r} \lambda^r + \mu_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad (5a)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N P_i^s - P_T^s \right) \lambda^s = 0, \quad (5b)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^s - P_T^r \right) \lambda^r = 0, \quad (5c)$$

$$\mu_i P_i^s = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq N, \quad (5d)$$

$$\lambda^s \geq 0, \lambda^r \geq 0, \quad (5e)$$

$$\mu_i \geq 0, P_i^s \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq N. \quad (5f)$$

Como a função objetivo (4a) (a ser maximizada) é côncava e as restrições (4b)-(4d) são lineares, temos que as condições de KKT são necessárias e suficientes para a otimalidade. Este fato nos leva à seguinte caracterização:

Teorema 1. P^{s*} é uma solução ótima para (Q) se, e somente se,

$$P_i^{s*} = \left(\frac{h_i^r}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s} \right)^+, \quad \text{para alguma } (\lambda^s, \lambda^r) \geq 0, \quad (6)$$

e P^{s*} satisfaz as desigualdades (4b) e (4c), sendo pelo menos uma delas verificada na igualdade.

Demonstração. Devemos mostrar que as condições estabelecidas no teorema são equivalentes a (4b)-(4c) junto com (5). Note que (5a) pode ser reescrito como:

$$\mu_i = -\frac{1}{(h_i^s)^{-1} + P_i^s} + \frac{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r}{h_i^r}.$$

E a não-negatividade das variáveis implica em $\lambda^s > 0$ ou $\lambda^r > 0$. Caso contrário, chegaríamos a contradição $0 \leq \mu_i = -\frac{1}{(h_i^s)^{-1} + P_i^s} < 0$. Sendo assim, (5a), (5e), (5f) e (5d) equivalem a:

$$\lambda^s \geq 0, \lambda^r \geq 0, \lambda^s > 0 \text{ ou } \lambda^r > 0, \quad (7)$$

$$P_i^s \geq 0, \quad P_i^s \geq \frac{h_i^r}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s}, \quad (8)$$

$$P_i^s = 0 \text{ ou } P_i^s = \frac{h_i^r}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s}, \quad (9)$$

que, por sua vez, equivalem a (6) com $\lambda^s > 0$ ou $\lambda^r > 0$. O resultado então segue facilmente usando (4b)-(4c) e (5b)-(5c). \square

Corolário 1. P^{s*} é uma solução ótima para (Q^s) se, e somente se, $P_i^{s*} = \left(\frac{1}{\lambda^s} - \frac{1}{h_i^s}\right)^+$, para algum $\lambda^s > 0$, e $\sum_{i=1}^N P_i^{s*} = P_T^s$. Similarmente, P^{r*} é uma solução ótima para (Q^r) se, e somente se, $P_i^{r*} = \left(\frac{1}{\lambda^r} - \frac{1}{h_i^r}\right)^+$, para algum $\lambda^r > 0$, e $\sum_{i=1}^N P_i^{r*} = P_T^r$.

Demonstração. Para (Q^s) , aplicamos o Teorema 1 com $\lambda^r = 0$. Para (Q^r) , aplicamos o Teorema 1 com $\lambda^s = 0$ e $P_i^{r*} = \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^{s*}$. \square

4 Método de solução

Pelo Teorema 1, a solução ótima do problema (Q) pode satisfazer na igualdade ambas ou apenas uma das restrições (4b) e (4c). Sendo assim, ela poderá ser dada pela:

1. solução de (Q^s) , caso ela seja viável para (Q) ;
2. solução de (Q^r) , caso ela seja viável para (Q) ;
3. solução de $(Q^=)$, caso contrário, onde $(Q^=)$ é o problema obtido de (Q) transformando (4b) e (4c) em igualdades.

As soluções P^{s*} ou P^{r*} dadas pelo Corolário 1 podem ser determinadas pelo algoritmo *water filling* [6]. Tomemos, sem perda de generalidade, o modelo (Q^s) . Pelo Lema 5 e Corolário 1, a solução de (Q^s) é obtida usando-se as primeiras K subportadoras e aplicando-se potências $P_i^s = \left(\mu - \frac{1}{h_i^s}\right)^+$, onde $\mu = \frac{\sum_{i=1}^K h_i^{s-1}}{K}$ é o nível da água. O valor de K e das potências podem ser determinados pelo algoritmo *water filling* mostrado no Algoritmo 1.

Resta-nos então analisar este último caso. Pelo Lema 5 e Teorema 1, uma solução P^{s*} para esse caso deve satisfazer, para algum $K \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $(\lambda^s, \lambda^r) \geq 0$, as seguintes condições:

$$\sum_{i=1}^K \left(\frac{h_i^r}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s} \right) = P_T^s, \quad (10a)$$

$$\sum_{i=1}^K \left(\frac{h_i^s}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^r} \right) = P_T^r, \quad (10b)$$

$$h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r \leq h_i^s h_i^r, \quad \forall 1 \leq i \leq K, \quad (10c)$$

$$h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r \geq h_i^s h_i^r, \quad \forall K+1 \leq i \leq N, \quad (10d)$$

```

1: Início
2:  $k \leftarrow N$ 
3:  $T \leftarrow \sum_{i=1}^k (h_i^s)^{-1}$ 
4:  $parar \leftarrow 0$ 
5: repita
6:    $\mu \leftarrow T/k$ 
7:   se  $h_k^{s-1} > \mu$  então
8:      $P_k^s \leftarrow 0$ 
9:      $T \leftarrow T - (h_k^s)^{-1}$ 
10:     $k \leftarrow k - 1$ 
11:  senão
12:    para  $i = 0 \rightarrow k$  faça
13:       $P_i^s \leftarrow \mu - (h_i^s)^{-1}$ 
14:    fim para
15:     $parar \leftarrow 1$ 
16:  fim se
17: até que  $parar = 1$ 
18: Fim

```

Algoritmo 1: Algoritmo *water filling* para o problema (Q^s) .

Resolver $(Q^=)$ corresponde a encontrar K e λ satisfazendo (10).

4.1 Determinação de K

O número K de subportadoras a serem usadas deve ser tal que (10) tem solução $\lambda \geq 0$. Os resultados a seguir procuram caracterizar tal valor.

Multiplicando (10a) por λ^s e (10b) por λ^r e somando as expressões obtidas, chegamos a:

$$P^s(K)\lambda^s + P^r(K)\lambda^r = K, \quad (11)$$

onde

$$P^s(K) = P_T^s + \sum_{i=1}^K \frac{1}{h_i^s} \quad \text{e} \quad P^r(K) = P_T^r + \sum_{i=1}^K \frac{1}{h_i^r} \quad (12)$$

Lema 6. Dado $K \in \{1, 2, \dots, N\}$, o sistema (10c),(10d),(11) tem solução não-negativa se, e somente se, a reta (11) intercepta o poliedro

$$S_K = \begin{cases} \{(\lambda^s, \lambda^r) \geq 0 \mid h_K^r \lambda^s + h_K^s \lambda^r \leq h_K^s h_K^r, h_{K+1}^r \lambda^s + h_{K+1}^s \lambda^r \geq h_{K+1}^s h_{K+1}^r\}, & \text{se } K < N, \\ \{(\lambda^s, \lambda^r) \geq 0 \mid h_K^r \lambda^s + h_K^s \lambda^r \leq h_K^s h_K^r\}, & \text{se } K = N. \end{cases}$$

Demonstração. A implicação direta é trivial. Para a inversa, considere primeiro $i \in \{1, 2, \dots, K\}$. Como $h_i^s \geq h_K^s$ e $h_i^r \geq h_K^r$, temos que

$$\frac{\lambda^s}{h_i^s} + \frac{\lambda^r}{h_i^r} \leq \frac{\lambda^s}{h_K^s} + \frac{\lambda^r}{h_K^r} \leq 1$$

provando (10c). Similarmente, para $i \in \{K+1, \dots, N\}$, obtemos (10d), dado que as desigualdades opostas ocorrem na expressão acima quando usamos $K+1$ em lugar de K . A implicação inversa então segue. \square

Lema 7. Para $K = N$, a reta (11) intercepta S_K se, e somente se, $\frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s$ ou $\frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r$. Para $K < N$, a reta (11) intercepta S_K se, e somente se, uma das seguintes situações ocorre:

1. $h_{K+1}^s \leq \frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s$ ou $h_{K+1}^r \leq \frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r$ (ver Figura 1(a)-1(b));
2. $\frac{K}{P^s(K)} \leq h_{K+1}^s$ e $h_K^r \leq \frac{K}{P^r(K)}$ (ver Figura 1(c));
3. $h_K^s \leq \frac{K}{P^s(K)}$ e $\frac{K}{P^r(K)} \leq h_{K+1}^r$ (ver Figura 1(d));

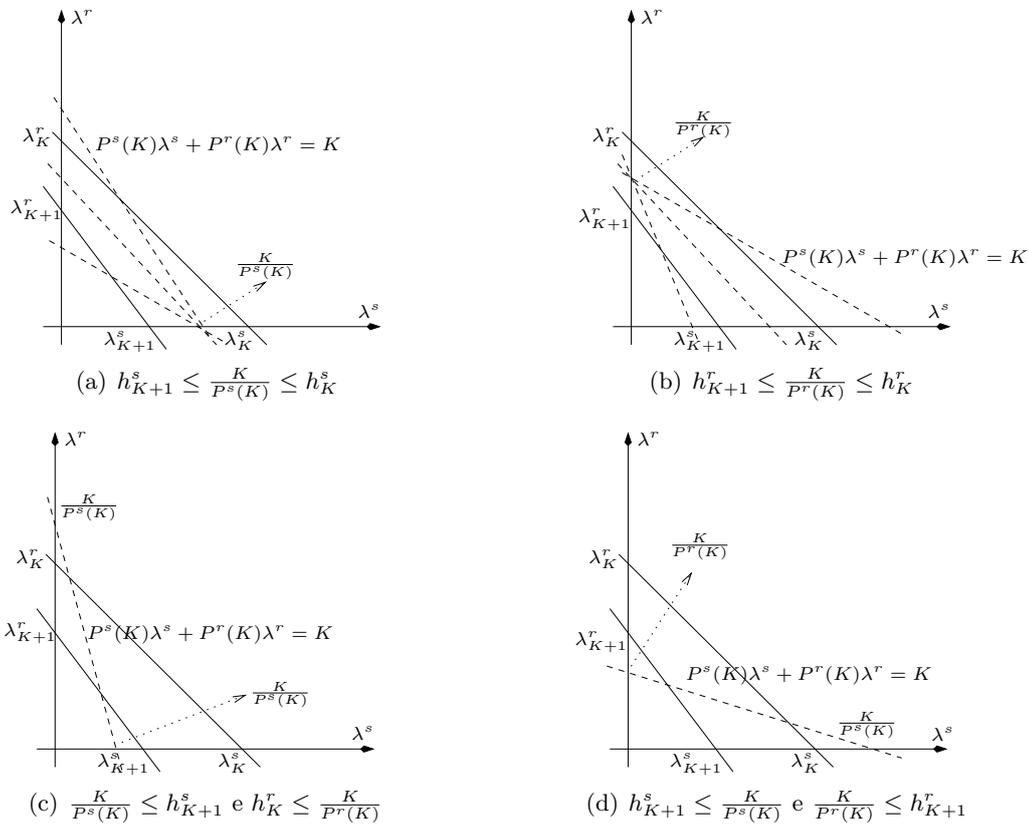


Figura 1: Casos de interseção da reta (11)

Para caracterizar o intervalo definido pela interseção da reta (11) com S_K , vamos considerar a interseção de (11) com:

- $\lambda^r = 0$: $\hat{\lambda}_{s0} = \left(\frac{K}{P^s(K)}, 0\right)$;
- $\lambda^s = 0$: $\hat{\lambda}_{0r} = \left(0, \frac{K}{P^r(K)}\right)$;
- $h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r = h_i^s h_i^r$: $\hat{\lambda}_i = \left(\frac{K - h_i^r P^r(K)}{\frac{h_i^r}{h_i^s} \delta_i}, \frac{h_i^s P^s(K) - K}{\delta_i}\right)$,

onde

$$\delta_i = \frac{h_i^s}{h_i^r} P^s(K) - P^r(K). \quad (13)$$

Lema 8. *Suponha que a reta (11) intercepta S_K no intervalo $[\lambda_0, \lambda_1] \subset \mathbb{R}^2$. Para $K = N$, temos:*

1. $\frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s$ e $\frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r$: $\lambda_0 = \hat{\lambda}_{s0}$ e $\lambda_1 = \hat{\lambda}_{0r}$;
2. $\frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s$ e $\frac{K}{P^r(K)} > h_K^r$: $\lambda_0 = \hat{\lambda}_{s0}$ e $\lambda_1 = \hat{\lambda}_K$;

$$3. \frac{K}{P^s(K)} > h_K^s \text{ e } \frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{0r} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_K;$$

Para $K < N$, temos:

$$1. h_{K+1}^s \leq \frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s \text{ e } h_{K+1}^r \leq \frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{s0} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_{0r};$$

$$2. h_{K+1}^s \leq \frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s \text{ e } h_{K+1}^r > \frac{K}{P^r(K)}: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{s0} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_{K+1};$$

$$3. h_{K+1}^s \leq \frac{K}{P^s(K)} \leq h_K^s \text{ e } \frac{K}{P^r(K)} > h_K^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{s0} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_K;$$

$$4. h_{K+1}^s > \frac{K}{P^s(K)} \text{ e } h_{K+1}^r \leq \frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{0r} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_{K+1};$$

$$5. \frac{K}{P^s(K)} > h_K^s \text{ e } h_{K+1}^r \leq \frac{K}{P^r(K)} \leq h_K^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_{0r} \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_K;$$

$$6. \frac{K}{P^s(K)} \leq h_{K+1}^s \text{ e } h_K^r \leq \frac{K}{P^r(K)}: \lambda_0 = \hat{\lambda}_K \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_{K+1};$$

$$7. h_K^s \leq \frac{K}{P^s(K)} \text{ e } \frac{K}{P^r(K)} \leq h_{K+1}^r: \lambda_0 = \hat{\lambda}_K \text{ e } \lambda_1 = \hat{\lambda}_{K+1};$$

4.2 Determinação de λ

Vamos admitir que o valor ótimo de K é conhecido e que $\lambda_0 = (\lambda_0^s, \lambda_0^r)$ e $\lambda_1 = (\lambda_1^s, \lambda_1^r)$ sejam os pontos da interseção de (11) com a fronteira de S_K .

Dado $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, considere a relaxação Lagrangeana

$$\mathcal{L}(\lambda) = \max_{P^s \geq 0} \sum_{i=1}^K \ln(1 + P_i^s h_i^s) - \lambda^s \left(\sum_{i=1}^K P_i^s - P_T^s \right) - \lambda^r \left(\sum_{i=1}^K \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^s - P_T^r \right).$$

Pelo desenvolvimento feito na Seção 3, concluímos que

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{i=1}^K \ln(1 + P_i^s(\lambda) h_i^s) - \lambda^s \left(\sum_{i=1}^K P_i^s(\lambda) - P_T^s \right) - \lambda^r \left(\sum_{i=1}^K \frac{h_i^s}{h_i^r} P_i^s(\lambda) - P_T^r \right), \quad (14)$$

onde

$$P_i^s(\lambda) = \frac{h_i^r}{h_i^r \lambda^s + h_i^s \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s}.$$

Como estamos interessados em $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, o problema ($Q^=$) é então equivalente a

$$\min \{ \mathcal{L}(\lambda) \mid \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \}.$$

A função $\mathcal{L}(\lambda)$ é convexa [1]. Mais ainda, substituindo o valor de λ^s dado por (11) e usando (13), obtemos a seguinte expressão simplificada para $\mathcal{L}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}(\lambda^r) &= \sum_{i=1}^K \ln(1 + P_i^s(\lambda^r) h_i^s) - \frac{K}{P^s(K)} \left(\sum_{i=1}^K P_i^s(\lambda^r) - P_T^s \right) \\ &\quad - \frac{\lambda^r}{P^s(K)} \left(\sum_{i=1}^K \delta_i P_i^s(\lambda^r) - P_T^r P^s(K) + P_T^s P^r(K) \right), \end{aligned}$$

onde

$$P_i^s(\lambda^r) = \frac{P^s(K)}{K + \delta_i \lambda^r} - \frac{1}{h_i^s}.$$

E ($Q^=$) torna-se o problema unidimensional

$$\min \{ \dot{\mathcal{L}}(\lambda^r) \mid \lambda^r \in [\lambda_0^r, \lambda_1^r] \}. \quad (15)$$

Podemos resolver o problema acima com um método de busca linear, como por exemplo o *Golden Section* [1], apresentado no Algoritmo 2.

```

1: Início
2:  $a \leftarrow \lambda_0^r, b \leftarrow \lambda_1^r, \alpha \leftarrow 0.618$ 
3:  $x \leftarrow a + (1 - \alpha)(b - a), y \leftarrow a + \alpha(b - a)$ 
4:  $\ell x \leftarrow \dot{L}(x), \ell y \leftarrow \dot{L}(y)$ 
5: enquanto  $b - a > \epsilon$  faça
6:   se  $\ell x > \ell y$  então
7:      $a \leftarrow x, x \leftarrow y, y \leftarrow a + \alpha(b - a)$ 
8:      $\ell y \leftarrow \dot{L}(y)$ 
9:   senão
10:     $b \leftarrow y, y \leftarrow x, x \leftarrow a + (1 - \alpha)(b - a)$ 
11:     $\ell x \leftarrow \dot{L}(x)$ 
12:   fim se
13: fim enquanto
14: Retornar  $a$ 

```

Algoritmo 2: *Golden section*

4.3 Resolução de $(Q^=)$

Considerando os resultados das duas subseções anteriores, propomos o Algoritmo 3 *Golden Search* para resolver $(Q^=)$. Ele pode ser entendido como uma generalização do *water-filling*.

```

1: Início
2:  $K \leftarrow N$ 
3: repita
4:   se  $K$  satisfaz Lema 7 então
5:     Calcule  $[\lambda_0^r, \lambda_1^r]$  pelo Lema 8
6:      $\lambda^r \leftarrow \text{GoldenSection}(\lambda_0^r, \lambda_1^r)$ 
7:     se  $P^s(\lambda^r)$  é viável então
8:       PARE!
9:     fim se
10:   fim se
11:    $K \leftarrow K - 1$ 
12: até que  $K = 0$ 
13: Fim

```

Algoritmo 3: *Golden search*

Podemos verificar a execução de no máximo N passos no laço principal (linhas 3 - 12) do Algoritmo 3 e em cada um deles é efetuada uma chamada ao Algoritmo 2, cuja complexidade é polinomial [1]. Dessa forma, podemos concluir que o Algoritmo 3 tem complexidade polinomial.

Uma outra forma de solucionar (15), e conseqüentemente $(Q^=)$, é derivar a expressão (14) e igualar a zero. Nesse caso obteríamos o polinômio:

$$\sum_{i=1}^K \frac{\delta_i}{K + \delta_i \lambda^r} = 0.$$

para o qual queremos encontrar uma raiz λ^r no intervalo $[\lambda_0^r, \lambda_1^r]$.

5 Conclusão

Neste trabalho tratamos um dos problemas-chave na concepção de sistemas móveis de quarta geração (4G): o problema de emparelhamento de subportadoras e alocação de potências de sistemas multi-saltos. Em especial, mostramos que para um sistema com dois saltos, conseguimos obter uma solução ótima em tempo polinomial. Este resultado ganha dimensão quando consideramos que as antenas retransmissoras atuais possuem até 256 subportadoras e o tempo de cálculo é extremamente limitado, da ordem de 1 ms.

Partindo de um Problema de Programação Não-linear Mista, seguindo os resultados de [9, 3] desacoplamos o problema de emparelhamento do problema de alocação de potência e mostramos, de maneira alternativa, que os canais podem ser emparelhados em ordem, de acordo com sua taxa de eficiência. Para o problema de alocação de potência, mostramos que a solução pode ser obtida, em pior caso, através da execução de dois algoritmos *water filling* de complexidade linear e n algoritmos busca local do tipo *golden section*, de complexidade polinomial para um intervalo pré-calculado, onde n é o número de subportadoras na instância considerada.

Em perspectiva temos uma extensiva bateria de testes computacionais baseados em parâmetros e cenários práticos alinhados com as normas dos sistemas 4G, bem como a extrapolação das ideias aqui anunciadas para sistemas com um maior número de saltos.

Referências

- [1] M. Bazaraa, H. Sherali, and C. Shetty. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York, 1993.
- [2] Y. Guan-Ding, Z. Zhao-Yang, C. Yan, C. Shi, and Q. Pei-liang. Power allocation for non-regenerative OFDM relaying channels. In *Proc. International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*, volume 1, pages 185–188, Sep. 2005.
- [3] M. Hajiaghayi, M. Dong, and B. Liang. Jointly optimal channel pairing and power allocation for multichannel multihop relaying. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(10):4998–5012, Oct. 2011.
- [4] G. Li and H. Liu. On the capacity of broadband relay networks. In *Proc. Annual Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, volume 2, pages 1318–1322, Nov. 2004.
- [5] A. Nosratinia, T. Hunter, and A. Hedayat. Cooperative communication in wireless networks. *IEEE Communications Magazine*, 42(10):74–80, Oct. 2004.
- [6] D. Palomar and J. Fonollosa. Practical algorithms for a family of waterfilling solutions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(2):686–695, Feb. 2005.
- [7] M. Rumney. IMT-Advanced: 4G Wireless Takes Shape in an Olympic Year. Sep. 2008.
- [8] W. Wang and R. Wu. Capacity maximization for OFDM two-hop relay system with separate power constraints. In *Proc. International Conference on Communications and Networking in China*, pages 1–5, Aug. 2009.
- [9] W. Wang, S. Yan, and S. Yang. Optimally joint subcarrier matching and power allocation in OFDM multihop system. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008:1–8, Jan. 2008.