Uma heurística Lagrangiana para o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas

Desiree Maldonado Carvalho
Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
Rua Talim, 330 – Vila Nair – São José dos Campos – São Paulo – Brasil
dmcarvalho@unifesp.br

Mariá Cristina Vasconcelos Nascimento
Instituto de Ciência e Tecnologia – Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)
Rua Talim, 330 – Vila Nair – São José dos Campos – São Paulo – Brasil
mcv.nascimento@unifesp.br

RESUMO

O objeto de estudo deste artigo é o planejamento da produção de múltiplas plantas, todas com horizonte de planejamento finito dividido em períodos. Todas as plantas produzem os mesmos itens e possuem sua demanda para atender sem atraso. Para a produção dos itens, as plantas possuem uma única máquina com tempo e custo de preparação e capacidade limitada. Há a possibilidade, sujeita a custos, de transferências de lotes de produção entre as plantas, e também de estoque. Esse problema, portanto, visa definir um planejamento de produção de forma a minimizar os custos totais envolvidos, obedecendo as restrições já discutidas. Apesar de ser um problema bastante estudado, para um conjunto de instâncias artificialmente geradas, não existe nenhuma heurística capaz de encontrar soluções factíveis para todas elas. Neste artigo, propomos uma heurística Lagrangiana que além de resolver heuristicamente todas as instâncias do conjunto mencionado, supera em qualidade as heurísticas da literatura.

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de lotes; múltiplas plantas; heurística Lagrangiana.

Área Principal: OC - Otimização Combinatória

ABSTRACT

The target of this paper is the production planning of multiple plants, each of them with a finite planning horizon divided into periods. All plants produce the same itens and have their own demand to be addressed without delay. For producing the itens, all plants possess a single machine characterized by time and cost of setup and limited capacity. Both lot transfers among the plants, subject to transfer costs, and storage are allowed. This problem, therefore, aims at defining a production planning with minimum total costs, since it addresses all already discussed constraints. Even though there exists a number of studies towards this problem, for a certain set of artificially generated instances, to find feasible solutions for the whole set still remains as a challenge. In this paper, we propose a Lagrangian heuristic which, besides heuristically solving all instances from the aforementioned set, outperforms in quality the heuristics from the literature.

KEYWORDS. Lot sizing; multi-plants; Lagrangean heuristic.

Main Area: OC - Combinatorial Optimization

1. Introdução

O planejamento de produção, essencial para um melhor uso de recursos, envolve o estudo de medidas estratégicas que geralmente têm como objetivo principal a minimização de custos totais. Em centros com mais de uma facilidade, cada uma com suas demandas específicas, o planejamento a médio termo visa decidir em um horizonte de planejamento finito, quanto, quando e o que produzir de maneira a atender as demandas dessas plantas. O ideal é o atendimento das demandas dos clientes sem atraso, de forma a garantir sua maior satisfação com relação à empresa.

Nesse sentido, o problema de dimensionamento de lotes alvo de estudo deste artigo consiste em determinar os lotes de produção em um horizonte de planejamento composto por um certo número de plantas, uma única máquina em cada planta capaz de produzir qualquer item demandado, mas com capacidade limitada por período de produção. A possibilidade de transferência de produção entre as plantas cria a possibilidade de melhor uso de recursos, devido ao custo de produção variável nas diferentes plantas e à existência de custo de preparação de máquinas.

Na literatura, podemos encontrar alguns programas inteiro misto que abordam esse problema, conhecido por problema de dimensionamento de lotes em múltiplas plantas (PDLMP) [Sambasivan and Schimidt 2002, Silva 2013]. [Nascimento et al. 2010] apresentam um estudo utilizando instâncias de variados tamanhos para os quais a solução ótima não pôde ser encontrada em tempo viável pelo pacote comercial CPLEX [ILOG 2013]. Por esse motivo, os autores propõem uma meta-heurística híbrida para resolver o problema, porém, não garantem a factibilidade de um número considerável de problemas, também não resolvidos por pacotes de otimização.

Apesar da limitação apontada no pacote CPLEX, nos últimos anos, as funcionalidades e evolução do mesmo têm chamado a atenção de diversos pesquisadores. Tendo em vista esse fato e as limitações do algoritmo de [Nascimento et al. 2010], estado-da-arte para resolver o problema mencionado heuristicamente, neste artigo propomos uma heurística Lagrangiana baseada no modelo de [Silva 2013] que faz uso do CPLEX na solução do problema relaxado. Para atestar a qualidade da heurística proposta, usamos as instâncias de [Nascimento et al. 2010] e, como resultado, a heurística proposta foi capaz de encontrar soluções factíveis para todas as instâncias testadas. Mais do que isso, observamos um desvio bem baixo com relação ao limitante Lagrangiano e à relaxação linear do modelo de [Silva 2013].

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos a descrição do modelo de programação inteira mista utilizado para resolver o problema de dimensionamento de lotes. Na Seção 3, descrevemos a heurística Lagrangiana proposta para a resolução do PDLMP. A Seção 4 reporta os resultados obtidos pela heurística proposta, comparando-a com resultados presentes na literatura. E por fim, na Seção 5, apresentamos as considerações finais e direcionamento de pesquisas futuras.

2. O PDLMP

Neste artigo, iremos lidar com o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas, em múltiplos períodos e produzindo múltiplos itens, e que, por simplicidade de notação, chamaremos o problema de PDLMP. Nesse estudo, o PDLMP admite que os itens sejam produzidos por qualquer planta em qualquer período e que sejam estocados. Para cada planta a demanda dos itens é previamente determinada e a capacidade de produção das máquinas é limitada de acordo com o período. Além disso, o PDLMP estudado permite a transferência de itens de uma planta para outra, desde que essa transferência seja direta, ou seja, não passe por uma planta que não esteja na origem ou destino do trajeto percorrido.

Esse é um problema de otimização combinatória e pode ser modelado de acordo com a proposta de [Sambasivan and Schimidt 2002]. A seguir, apresentamos a descrição do modelo de programação inteira mista, proposto pelos autores.

$$Minimizar \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}(s_{ij}y_{ijt} + c_{ij}x_{ijt} + h_{ij}I_{ijt} + \sum_{k\neq j} r_{jk}w_{ijkt}) \quad (1)$$

sujeito a:

$$x_{ijt} + I_{ij,t-1} - I_{ijt} - \sum_{k\neq j} w_{ijkt} + \sum_{l\neq j} w_{iljt} = d_{ijt} \qquad \forall i,j,t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}x_{ijt} + f_{ij}y_{ijt}) \leq C_{jt} \qquad \forall j,t \quad (3)$$

$$x_{ijt} \leq My_{ijt} \qquad \forall i,j,t \quad (4)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, x_{ijt} \geq 0, I_{ijt} \geq 0, w_{ijkt} \geq 0 \qquad \forall i,j,t; j \neq k \quad (5)$$

em que

i = índice que representa os itens, $i = 1, ..., n$;
j = índice que representa as plantas, $j = 1, ..., m$;
t = índice que representa os períodos, $t = 1, ..., p$;
s_{ij} = custo de preparação para a produção do item i na planta j;
c_{ij} = custo unitário de produção do item i na planta j;
h_{ij} = custo unitário de estoque do item i na planta j;
r_{jk} = custo unitário de transporte da planta j para a planta k;
d_{ijt} = demanda do item i na planta j no período t;
b_{ij} = tempo de processamento do item i na planta j;
f_{ij} = tempo de preparação para produção do item i na planta j;
C_{jt} = capacidade de produção
x_{ijt} = quantidade produzida do item i na planta j no período t (variável de decisão);
y_{ijt} = variável binária que assume o valor 1 se o item i for produzido na planta j no período t e 0 caso contrário (variável de decisão);
I_{ijt} = estoque do item i na planta j no final do período t (variável de decisão);
w_{ijkt}= quantidade do produto i transferida da planta j para a planta k no período t (variável de decisão);
M = um valor grande, que pode ser a soma de todas as demandas da instância em questão.

Segundo a função objetivo (1), o problema visa encontrar as variáveis de decisão que atendam as restrições do problema e correspondam à menor soma de custos totais: de produção, de preparação, de estoque e de transporte. As restrições (2) garantem um balanceamento de estoque e dos lotes de transferências em cada uma das plantas. As restrições (3) asseguram que a produção em cada período, em cada planta não violem o seu limite de capacidade. As restrições (4) garantem que se houver produção de determinado item, em uma certa planta e em um considerado período, então haja a devida preparação da máquina para tal. O domínio das variáveis I_{ijt} nas restrições (5) garantem o atendimento das demandas das plantas sem atraso. Nesse problema, sem perda de generalidade, vamos considerar os custos de transferência entre plantas Euclidianos, ou seja, $r_{jl} + r_{lk} \geq r_{jk}$, garantindo assim a transferência direta, mencionada anteriormente.

Esse modelo matemático não é o único existente para o PDLMP. No estudo de limitantes inferiores resultantes da relaxação linear do modelo de [Sambasivan and Schimidt 2002] para certas instâncias, algumas remodelagens do PDLMP foram propostas para o PDLMP [Eppen and Martin 1987, Silva 2013] obtendo melhores resultados para certas instâncias. A descrição desse modelo é apresentada a seguir.

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\sum_{u=1}^{p}(\overline{C}_{ijtku}x_{ijtku}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}(b_{ij}y_{ijt}) \tag{6}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{u} x_{ijtku} = d_{iku} \qquad \forall(i,k,u) \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ij}y_{ijt} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{p} b_{ij}x_{ijtku}\right) \le C_{jt} \qquad \forall(j,t) \tag{8}$$

$$x_{ijtku} \le Min\left\{d_{iku}; \left\lfloor \frac{C_{jt}-f_{ij}}{b_{ij}} \right\rfloor\right\} y_{ijt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \tag{9}$$

$$x_{ijtku} \ge 0 \qquad \forall(i,j,t,k,u) \tag{10}$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall(i,j,t) \tag{11}$$

em que

x_{ijtku} = quantidade produzida do item i na planta j no período t para atender a demanda da planta k no período u (variável de decisão);

$$\overline{C}_{ijtku} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u < t, \\ c_{ij} + r_{jk} + (u-t)Min\{h_{ij}, h_{ik}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nesse modelo, podemos observar que a variável de decisão x_{ijtku} é responsável pelo armazenamento de mais informações que a variável x_{ij} do modelo proposto por [Sambasivan and Schimidt 2002]. Como consequência, essa remodelagem permite que as variáveis de estoque sejam desconsideradas do modelo. Além disso, os custos de produção, de estoque e de transferências podem ser associados à uma única variável, aqui denotada por $\overline{C}_{ijtku}$. Isso é possível, uma vez que a variável x_{ijtku} nos informa implicitamente o intervalo de tempo em que os itens permanecerão estocados $(u-t)$ na planta com menor custo de estocagem (caso haja transferências, ou seja, quando $j \neq k$).

Assim como no modelo de [Sambasivan and Schimidt 2002], a função objetivo (6) dessa remodelagem visa encontrar uma solução com os menores custos de produção, de preparação, de estocagem e de transferência entre plantas em um horizonte de planejamento finito de forma a atender todas as restrições do PDLMP. As restrições (7) garantem que as demandas de todas as plantas sejam atendidas. As restrições (8) têm como função principal garantir que a capacidade de produção de toda planta em qualquer dos períodos não seja excedida. As restrições (9) definem a quantidade máxima de produção em uma planta j no período t para atender a demanda do item i de uma planta k no período u. E, por fim, as restrições (10) e (11) definem, respectivamente, o domínio ao qual as variáveis de decisão x_{ijtku} e y_{ijt} pertencem.

Apesar desse modelo apresentar um aumento significativo do número de variáveis de decisão e no número de restrições, ele garante um melhor limitante inferior em sua modelagem [Silva 2013], quando comparado com o do modelo de [Sambasivan and Schimidt 2002] para as instâncias de [Nascimento et al. 2010]. Isso se deve, principalmente, ao fato das variáveis binárias y_{ijt} receberem um limitante inferior superior às mesmas variáveis no modelo de [Sambasivan and Schimidt 2002]. Note que no modelo de [Silva 2013], tais variáveis são limitadas pelo valor da variável produção dividida pelo mínimo entre a demanda e a quantidade máxima de itens i que uma planta j no período t é capaz de produzir, enquanto no modelo de [Sambasivan and Schimidt 2002], o limitante dessas variáveis é a razão entre o valor da variável de produção pela soma de todas as demandas.

Neste artigo, para encontrar melhores soluções heurísticas, ou seja, melhores limitantes superiores para o PDLMP, focamos no estudo do modelo proposto por [Silva and Toledo 2012, Silva 2013]. Essa modelagem consiste na adaptação do modelo apresentado anteriormente baseando-se em ideias de [Bilde and Krarup 1977], os quais tratam o problema de localização de facilidades. Tendo isso em vista, neste artigo, buscamos analisar as soluções obtidos pela relaxação Lagrangiana do modelo proposto por [Silva 2013] ao resolver o PDLMP por meio de uma heurística Lagrangiana. Uma breve descrição da heurística utilizada para resolver o PDLMP é apresentada na próxima seção.

3. Relaxação Lagrangiana

Nesta seção, apresentamos a heurística proposta para encontrar uma solução para o PDLMP utilizando o modelo proposto em [Silva 2013]. A heurística consiste na relaxação Lagrangiana das restrições de capacidade do PDLPM e na posterior aplicação do método do subgradiente de [Held 1974]. Consequentemente, os limitantes inferiores (Lagrangianos) são obtidos por esse método de solução proposto, assim como limitantes superiores, por meio de uma estratégia baseada na adaptação de duas heurísticas de factibilização propostas por [Toledo 1998] e [Nascimento et al. 2010].

Para isso, inicialmente, considere o seguinte problema Lagrangiano do modelo de [Silva and Toledo 2012, Silva 2013].

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\sum_{u=1}^{p}(\overline{C}_{ijtku}x_{ijtku}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}(b_{ij}y_{ijt}) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}\lambda_{jt}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ij}y_{ijt} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{p} b_{ij}x_{ijtku}\right) - C_{jt}\right) \tag{12}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{u} x_{ijtku} = d_{iku} \qquad \forall(i,k,u) \tag{13}$$

$$x_{ijtku} \leq Min\left\{d_{iku}; \left\lfloor \frac{C_{jt} - f_{ij}}{b_{ij}} \right\rfloor\right\} y_{ijt} \qquad \forall(i,j,t,k,u) \tag{14}$$

$$x_{ijtku} \geq 0 \qquad \forall(i,j,t,k,u) \tag{15}$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall(i,j,t) \tag{16}$$

Nesse modelo, os valores dos multiplicadores de Lagrange λ_{jt}^{k} serão determinados por meio do método do subgradiente ([Held 1974]). Para facilidade de notação, quando nos referirmos a todos os multiplicadores de Lagrange, os chamaremos pelo conjunto λ.

Devido às características do problema resultante, até o limite de nosso conhecimento, não encontramos um algoritmo polinomial para a sua solução. Por esse motivo, empregamos o CPLEX, que é uma ferramenta de otimização inteira caracterizada por sua rapidez em encontrar soluções exatas para problema de otimização combinatória. Entretanto, devido à dificuldade para se resolver o modelo relaxado completo em um baixo tempo computacional, nós o decompomos por item de forma a obtermos os resultados pelo CPLEX em tempo computacional viável. Portanto, para essa consideração, sem perda de generalidade, subdividimos o PDLMP em questão em n subproblemas independentes. Nesse caso, considerando a função objetivo de cada subproblema relaxado para cada subproblema como $L_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq n$, o definimos da seguinte forma:

$$\min L_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\sum_{u=1}^{p}(\overline{C}_{ijtku}x_{ijtku}) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}(b_{ij}y_{ijt}) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{p}\lambda_{jt}\left(\left(f_{ij}y_{ijt} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{p}b_{ij}x_{ijtku}\right) - C_{jt}\right) \quad (17)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{u}x_{ijtku} = d_{iku} \qquad \forall(k,u) \quad (18)$$

$$x_{ijtku} \leq Min\left\{d_{iku}; \left\lfloor \frac{C_{jt} - f_{ij}}{b_{ij}} \right\rfloor\right\} y_{ijt} \qquad \forall(j,t,k,u) \quad (19)$$

$$x_{ijtku} \geq 0 \qquad \forall(j,t,k,u) \quad (20)$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall(j,t) \quad (21)$$

Dessa forma, para obtermos o melhor limitante inferior pelo problema Lagrangiano, devemos definir o conjunto de valores para λ de forma que satisfaçamos o seguinte problema:

$$\max_{\lambda}\{\min \sum_{i=1}^{n} L_i(\lambda) : s.a.(18) - (21)\}$$

A grosso modo, o método do subgradiente define os valores para os multiplicadores de Lagrange de forma a caminhar em direção à solução ótima de seu problema de maximização, iterativamente, atualizando os limitantes inferiores e superiores encontrados durante a execução do algoritmo Lagrangiano. Se o limitante inferior é igual ao superior interrompemos o método do subgradiente, pois a solução encontrada é ótima. Porém, se a solução não é ótima, realizamos as devidas atualizações dos parâmetros do subgradiente, como discutimos na seção seguinte.

3.1. Método do Subgradiente

Nesse método, em uma iteração $k+1$, os multiplicadores de Lagrange são atualizados conforme a Equação (22).

$$\lambda_{jt}^{k+1} = max\{0, \lambda_{jt}^{k} + \alpha^k g_{j,t}^{k}(x^k, y^k)\} \qquad \forall(j,t) \quad (22)$$

em que α^k é o tamanho do passo que o método assume para caminhar em direção à solução ótima, na iteração k; $g_{j,t}^{k}(x^k, y^k)$ são os subgradientes correspondentes à solução relaxada encontrada na iteração k; e (x^k, y^k) são os valores das variáveis de decisão obtidos pela solução Lagrangiana na iteração k. Vale notar que é necessário fornecer valores de α_0 e λ_{jt}^{0}. As variáveis (x^0, y^0) são determinadas por meio desses valores definidos previamente. Os subgradientes $g_{j,t}^{k}$ correspondem ao excesso ou sobra referente à cada uma das restrições de capacidade da solução Lagrangiana na iteração k, ou seja,

$$g_{j,t}^{k}(x^k, y^k) = \sum_{i=1}^{n}\left(f_{ij}y_{ijt} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=t}^{p}b_{ij}x_{ijtku}\right) - C_{jt} \qquad \forall(j,t) \quad (23)$$

Além disso, para atingir a convergência do método do subgradiente, calculamos o passo da seguinte maneira:

$$\alpha^k = \pi \left[Z^k_{sup} - Z^k_{LD} \right] / \| g^k_{j,t}(x^k) \|^2 \tag{24}$$

em que π é uma variável responsável por regular a velocidade de convergência do método e Z^k_{sup} e Z^k_{LD} são, respectivamente os limitantes superiores e inferiores na iteração k. Essa regulagem é realizada reduzindo π por um fator d após uma determinada quantidade de iterações.

O método do subgradiente é realizado até que o limitante superior do método, ou seja a melhor solução heurística, aqui chamada de Z_{sup}, seja igual à solução Lagrangiana, Z_{LD}, ou enquanto as condições de parada não são satisfeitas. Na seção seguinte, apresentamos como calculamos esses limitantes superiores, por meio da heurística proposta.

3.2. Heurística Lagrangiana

Na heurística proposta, obtivemos os limitantes superiores por meio da factibilização dos limitantes Lagrangianos encontrados a cada iteração do método. Os seguintes passos sumarizam o processo de definição de tais soluções heurísticas.

- Definição do limitante inferior da iteração
  Seja $\lambda = \{\lambda_{jt} \geq 0\colon j \in M$ e $t \in p\}$, o conjunto dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições de capacidade. Para encontrar o limitante inferior correspondente a iteração k, devemos resolver o problema relaxado correspondente da iteração:

$$\{\min \sum_{i=1}^{n} L_i(\lambda) : s.a.(18) - (21)\} \tag{25}$$

  Para a resolução desse problema (25), resolvemos cada subproblema de minimização de $L_i(\lambda)$ por meio do *software* de otimização CPLEX v. 12.6 [ILOG 2013]. A solução do problema (25), portanto, nada mais é que a soma de cada $L_i(\lambda)$ em questão.

  Uma vez encontrada a solução do problema relaxado, denotada por $Z_{RL}(\lambda)$, verificamos se essa é o maior limitante inferior encontrado até o momento. Ou seja, o método do subgradiente encontra uma solução, $Z_{LD}(\lambda)$, para o problema Lagrangiano dual:

$$Z_{LD}(\lambda) = max\{Z_{RL}(\lambda) | \lambda \geq 0\} \tag{26}$$

  Após isso, aplica-se o passo para a definição da solução heurística partindo da solução relaxada da iteração.

- Solução factível (limitante superior)

  Uma vez encontrada a solução Lagrangiana, caso esta seja factível para o problema inteiro misto original, ou seja, com as restrições de capacidade, então, o limitante superior (Z_{sup}) é atualizado com o valor da solução do problema relaxado, Z_{RL}. Se a solução não for factível para o problema original, então, as variáveis da solução relaxada passam por um processo de factibilização.

  A factibilização proposta neste artigo consiste na composição de duas diferentes estratégias. A primeira heurística, proposta por [Nascimento et al. 2010], utiliza uma busca local, em que a vizinhança é definida por movimentos de transferências de lotes de produção entre períodos. Esses movimentos foram inspirados em ideias de [Gopalakrishnan et al. 2001] e contam com uma adaptação para atender o problema com múltiplas plantas. Basicamente, a heurística possui dois tipos de movimento, que irão depender do período em que as transferências ocorrem e do custo mínimo necessário para efetuá-las. Para lidar com soluções infactíveis, assim como [Gopalakrishnan et al. 2001], os autores propõem uma penalização das restrições de capacidade.

A segunda estratégia de factibilização é baseada na heurística de [Toledo 1998], adaptada aqui para atender o problema de múltiplas plantas. Essa estratégia só será usada no processo se a primeira não conseguir factibilizar a solução da iteração. Nesse caso, essa estratégia é composta por duas fases. A primeira visa transferir todo o excesso de capacidade de um período t, $1 < t \leq p$, para um período u menor que t. A segunda fase, por outro lado, realiza o movimento contrário, caso a primeira fase não factibilize a solução.

A seguir, apresentamos os experimentos computacionais desenvolvidos para este artigo. Nesse experimento, usamos instâncias e heurísticas da literatura a título de comparação e avaliação de resultados.

4. Experimentos Computacionais

Para verificar a qualidade dos resultados obtidos pela heurística Lagrangiana descrita na Seção 3, apresentamos neste artigo dois experimentos. O primeiro tem como objetivo analisar a eficiência da heurística proposta quando comparada com o pacote de otimização CPLEX v. 12.6 [ILOG 2013]. Já no segundo, os resultados da heurística proposta são comparados aos obtidos pela heurística estado-da-arte para o PDLMP. Os testes computacionais foram realizados em um Ubuntu 12.04, Intel Core i5, CPU 750, 2.67GHz e 3.8 de memória. A implementação da heurística Lagrangiana foi em linguagem C.

Para ambos os experimentos, utilizamos um conjunto de instâncias proposto por [Nascimento et al. 2010]. O conjunto é composto por 480 instâncias que são divididas em 8 tipos de classes. As classes podem ser identificadas da seguinte maneira:

- Capacidade disponível para produção - apertada (A) ou normal (N);
- Custo de preparação - alto (A) ou baixo (B);
- Tempo de preparação - alto (A) ou baixo (B).

Sendo assim, uma classe de instâncias do tipo NAB possui instâncias com capacidade disponível normal, custo de preparação alto e tempo de preparação baixo. Além disso, temos que cada instância corresponde a um problema com 12 períodos, 2, 4 ou 6 plantas e 6, 12, 25 ou 50 itens. Para cada combinação, foram gerados 5 problemas, totalizando 60 instâncias para cada classe. Para definir o quão distante as soluções estão da solução ótima calculamos o *gap* da seguinte maneira.

$$gap = (Z_{sup} - Z_{LI})/Z_{LI}$$

em que Z_{sup} é a solução obtida pelo método de solução e Z_{LI} é o limitante inferior encontrado pela relaxação linear do modelo proposto por [Silva 2013]. Executamos o método do subgradiente com um máximo de 200 iterações, $\lambda_{j,t}$ inicial igual a 0, para todo j, t, $\alpha = 1,5$ e fator $d = 2,5$ para a redução da taxa de convergência. Vale observar que os limitantes inferiores do método Lagrangiano, apesar de competitivos, não superaram os resultados da relaxação linear.

Nas seções seguintes, apresentamos os resultados obtidos pela heurística Lagrangiana proposta, pelo CPLEX e pela heurística GRASP com *path-relinking*, proposta por [Nascimento et al. 2010], para resolver esse conjunto de instâncias.

4.1. Experimento I

Nesta seção, realizamos uma análise dos resultados obtidos pela heurística Lagrangiana proposta em relação aos resultados encontrados pelo CPLEX v. 12.6. Devido ao elevado tempo computacional necessário para obter as soluções pelo CPLEX, optamos por reportar os resultados obtidos pelas classes de instâncias intermediárias em dificuldade de solução: NAA e NAB. Além disso, definimos um tempo máximo de 1800 segundos para a resolução de cada instância pelo CPLEX.

Nas Tabelas 1 e 2, as três primeiras colunas correspondem à combinação de período, planta e item, nessa ordem, das instâncias analisadas. Da quarta à sexta coluna temos, respectivamente, os valores médios das soluções, as porcentagens médias dos *gaps* e os tempos médios obtidos pela heurística Lagrangiana. Nas três últimas colunas, são reportados os valores médios das soluções, as porcentagens médias dos *gaps* e os tempos médios que o CPLEX obteve.

Tabela 1: Resultados obtidos no Experimento I. Para cada método de solução, reportamos o valor médio das soluções (ZM_{sup}) para cada tipo de instância, a porcentagem média do gap (GM) e o tempo médio (TM), em segundos, para solucionar os problemas com as instâncias da classe NAA.

			Heurística Lagrangiana			CPLEX		
Períodos	Plantas	Itens	ZM_{sup}	GM (%)	TM	ZM_{sup}	GM (%)	TM
		6	41159,01	4,63	17,40	40563,12	3,11	419,40
		12	81493,22	3,60	27,20	79498,97	1,07	576,20
12	2	25	170058,08	3,13	66,20	165585,09	0,38	1867,80
		50	337612,13	3,28	168,40	327234,44	0,10	1808,00
		6	73235,48	8,02	55,40	70637,22	4,18	1514,20
		12	137830,39	3,16	102,40	135794,77	1,62	1803,60
12	4	25	277643,65	0,92	181,80	276496,85	0,50	1814,00
		50	547284,22	0,31	354,40	546980,66	0,26	1801,80
		6	104283,88	10,54	141,80	100801,29	6,82	1800,20
		12	189809,47	3,03	233,00	188409,93	2,25	1800,40
12	6	25	386728,84	1,41	420,60	386446,66	1,33	1800,60
		50	759769,61	0,35	757,40	759790,28	0,35	1801,20

Tabela 2: Resultados obtidos no Experimento I. Para cada método de solução, reportamos o valor médio das soluções (ZM_{sup}) para cada tipo de instância, a porcentagem média do gap (GM) e o tempo médio (TM), em segundos, para solucionar os problemas com as instâncias da classe NAB.

			Heurística Lagrangiana			CPLEX		
Períodos	Plantas	Itens	ZM_{sup}	GM (%)	TM	ZM_{sup}	GM (%)	TM
		6	42330,79	6,95	16,20	40920,14	3,46	433,40
12	2	12	82796,77	4,79	26,80	80038,03	1,31	977,60
		25	171712,85	3,35	65,60	167008,12	0,49	2021,80
		50	340068,61	3,47	169,80	329100,54	0,14	1802,00
		6	74027,71	8,85	55,00	71064,00	4,55	1833,40
12	4	12	138132,81	3,05	99,80	136561,63	1,89	1800,40
		25	278657,71	1,06	182,60	277353,04	0,59	1811,20
		50	548951,96	0,43	343,20	548560,38	0,35	1800,60
		6	106393,49	12,31	123,60	101902,14	7,57	1800,20
12	6	12	190889,42	3,45	239,40	189417,10	2,64	1802,80
		25	387706,14	1,48	423,60	388298,38	1,64	1800,40
		50	761618,86	0,47	780,80	762076,83	0,53	1802,40

Podemos observar pelas Tabelas 1 e 2, que o CPLEX fornece uma média de resultados superior em qualidade à da heurística proposta, exceto para as instâncias do tipo 12 x 6 x 50. Porém, esses resultados são obtidos em um tempo computacional elevado, fazendo da heurística proposta uma estratégia válida para encontrar boas soluções em tempo hábil. Note também que o fato de a heurística encontrar as melhores soluções justamente para as instâncias maiores valida a proposta de solução. Geralmente para classes maiores que há a necessidade do uso de heurísticas para a solução de problemas de otimização ou quando necessita-se de um resultado de boa qualidade em tempo viável.

4.2. Experimento II

Para atestar a qualidade da heurística proposta com relação a métodos heurísticos da literatura para o PDLMP, fazemos uma comparação da heurística Lagrangiana proposta com a heurística GRASP com *path-relinking* (GRASP_PR), proposta em [Nascimento et al. 2010], estado-da-arte. Nesse experimento, um dos objetivos é avaliar a eficiência da heurística proposta no processo de factibilização da solução Lagrangiana. Portanto, na Tabela 3, apresentamos a porcentagem referente à quantidade de problemas resolvidos, denotada por Fac. Além disso, da terceira à quinta coluna, são reportados, respectivamente, os valores médios das soluções encontradas para cada classe, as porcentagens médias dos *gaps* e os tempos médios em segundos da heurística Lagrangiana. Da sétima à nona coluna dessa mesma tabela, são apresentadas as mesmas informações anteriormente mencionadas referentes à heurística GRASP_PR.

Como a heurística GRASP_PR não encontra uma solução factível para todas as instâncias geradas, para comparação retiramos tais instâncias do calculo das médias de ZM_{sup}, GM e TM.

Tabela 3: Resultados obtidos pelo experimento II. Para cada método de resolução, reportamos a porcentagem de instâncias factibilizadas (Fac), o valor médio das soluções (ZM_{sup}), o gap médio (GM) e o tempo médio (TM), em segundos, para solucionar os problemas de cada classe do conjunto de instâncias gerado.

	Heurística Lagrangiana				Heurística GRASP_PR			
Classe	Fac (%)	ZM_{sup}	GM (%)	TM	Fac (%)	ZM_{sup}	GM (%)	TM
AAA	100	284381,39	5,02	241,58	76,67	289873,54	6,89	216,64
AAB	100	282960,26	5,72	251,41	68,33	290132,59	7,62	209,71
ABA	100	214018,60	0,94	243,68	88,33	215815,14	1,98	575,26
ABB	100	223324,35	1,10	223,56	80,00	225721,87	2,13	674,17
NAA	100	259829,75	3,56	224,79	86,67	263099,78	4,78	221,48
NAB	100	261150,57	4,28	229,10	83,33	264577,39	5,37	228,02
NBA	100	205614,57	0,52	179,37	100,00	206452,75	0,93	429,90
NBB	100	205902,03	0,55	193,47	100,00	207000,43	1,14	473,62

De acordo com a Tabela 3, podemos verificar que a heurística proposta supera, na média, as soluções encontradas pela heurística GRASP_PR. Além disso, podemos observar que a heurística Lagrangiana encontra uma solução factível para todo o conjunto de instâncias gerado, o que não acontece para a heurística GRASP_PR. Vale observar que o tempo médio da heurística proposta é bem inferior ao da literatura heurística da literatura, o que consolida, para essas instâncias, o melhor desempenho da nossa heurística em relação à da literatura.

Na Tabela 4, apresentamos os resultados obtidos pela heurística Lagrangiana considerando as 480 instâncias geradas. Na primeira coluna, são indicadas as classes de instâncias analisadas. Na segunda coluna, temos as soluções heurísticas médias (ZM_{sup}). Na terceira e na quarta colunas, reportamos a média dos *gaps* Lagrangiano e linear, respectivamente. E, por fim, na última coluna, são apresentados os tempos médios para resolver as 60 instâncias de cada classe.

Tabela 4: Resultados obtidos pela heurística Lagrangiana considerando todas as instâncias já discutidas. Para cada classe de instâncias, reportamos o valor médio das soluções (ZM_{sup}), o gap médio obtido com o limitante inferior Lagrangiano (GM_Lagrangiano), o gap médio obtido com o limitante inferior linear (GM_Linear) e o tempo médio (TM), em segundos, para a resolução dos problemas.

		Heurística Lagrangiana		
Classe	ZM_{sup}	GM_Lagrangiano (%)	GM_Linear (%)	TM
AAA	263735,77	7,82	5,01	203,87
AAB	265951,70	9,70	5,81	206,82
ABA	206981,70	1,32	0,91	225,77
ABB	207303,06	1,72	1,07	196,95
NAA	258908,99	4,78	3,53	210,50
NAB	260273,92	5,71	4,14	210,53
NBA	205614,56	0,76	0,52	179,37
NBB	205902,02	0,69	0,55	193,47

Pela Tabela 4, podemos observar que os limitantes inferiores lineares do modelo proposto em [Silva and Toledo 2012] são, em média, melhores que os limitantes Lagrangianos encontrados pelo mesmo modelo. E com a inclusão dos resultados daquelas instâncias que precisamos remover para comparar com a heurística GRASP_PR na Tabela 3, os *gaps* não se diferiram tanto daqueles apresentados na Tabela 3.

5. Conclusão

Neste artigo, nosso objetivo foi apresentar uma heurística capaz de resolver, eficientemente, o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas, múltiplos itens, múltiplos períodos, transferências e com restrições de capacidade. Para isso, utilizamos o modelo de dimensionamento de lotes, baseado na ideia de localização de facilidades, proposto por [Silva 2013]. A heurística proposta consiste no método do subgradiente, que encontra os limitantes inferiores por meio das soluções obtidas pela relaxação Lagrangiana do problema, e na composição de duas heurísticas de factibilização [Toledo 1998, Nascimento et al. 2010] para determinar os limitantes superiores do método.

Para verificar a qualidade da heurística proposta, realizamos duas comparações. A primeira, com o objetivo de verificar a eficiência do método em relação ao CPLEX v. 12.6, nos mostrou que apesar da heurística não superar os resultados do CPLEX, ainda é uma boa alternativa para encontrar soluções de qualidade em tempo hábil, principalmente para instâncias grandes. Já no segundo experimento, além de mostrar que a heurística supera, em média, os resultados obtidos pela heurística estado-da-arte [Nascimento et al. 2010] para o PDLMP, também podemos verificar a eficiência da estratégia de factibilização, capaz de encontrar soluções factíveis para todas as instâncias testadas.

Em trabalhos futuros, pretendemos encontrar uma maneira eficiente para resolver a relaxação Lagrangiana do modelo proposto por [Silva 2013] para que não seja necessária a utilização de um pacote comercial no método de resolução.

6. Agradecimentos

Agradecemos o financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

Bilde, O. e Krarup, J. (1977). Sharp lower bounds and efficient algorithms for the simple plant location problem. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:79–97.

Eppen, G. D. e Martin, R. K. (1987). Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, 35(6):832–848.

Gopalakrishnan, M., Ding, K., Bourjolly, J. M., e Mohan, S. (2001). A tabu-search heuristic for the capacitated lot-sizing problem with set-up carryover. *Management Science*, 47:851–863.

Held, M. ; Wolfe, P. e. C. P. (1974). Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, 6:62–88.

ILOG (2013). *CPLEX 12.6 Reference Manual*. ILOG: France. v. 12.6.

Nascimento, M. C. V., Resende, M. C. G., e Toledo, F. M. B. (2010). GRASP with path-relinking for the multi-plant capacitated lot sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 200:747–754.

Sambasivan, M. e Schimidt, C. P. (2002). A heuristic procedure for solving multi-plant, multi-item, multi-period capacited lot-sizing problems. *Asia Pacific Journal of Operational Research*, 19:87–105.

Silva, D. H. (2013). Métodos híbridos para o problema de dimensionamento de lotes com múltiplas plantas. Master's thesis, Universidade de São Paulo - São Carlos.

Silva, D. H. e Toledo, F. M. B. (2012). Dimensionamento de lotes com múltiplas plantas: comparação entre dois modelo. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pages 1638–1646.

Toledo, F. M. B. (1998). *Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas*. PhD thesis, DENSIS-UNICAMP.