

## UM MODELO PARA A OTIMIZAÇÃO DO PLANEJAMENTO E CONTROLE DA PRODUÇÃO NA INDÚSTRIA DE EMBALAGENS DE VIDRO

**Ramon Faganello Fachini**

EESC USP

Av. Trabalhador São-carlense, 400, CEP: 13566-590 - São Carlos, SP – Brasil  
[ramonfachini@gmail.com](mailto:ramonfachini@gmail.com)

**Kleber Francisco Esposto**

EESC USP

Av. Trabalhador São-carlense, 400, CEP: 13566-590 - São Carlos, SP – Brasil  
[kleber@sc.usp.br](mailto:kleber@sc.usp.br)

**Victor Claudio Bento Camargo**

UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Av. Randalfo Borges Junior, 1250, CEP: 38025-150 - Uberaba, MG – Brasil  
[victor.camargo@producao.uftm.edu.br](mailto:victor.camargo@producao.uftm.edu.br)

### RESUMO

Este artigo propõe um modelo de programação inteira mista que integra os problemas de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção na indústria de embalagens de vidro, diferenciando-se dos demais modelos propostos na literatura por agregar restrições tecnológicas específicas desse processo produtivo. Para validação do modelo proposto, foram realizados testes computacionais com instâncias de um problema real em uma fábrica especializada na fabricação de garrafas de cerveja pertencente a uma grande multinacional que figura entre as líderes de mercado. Na implementação dos testes, foi utilizado o pacote comercial IBM ILOG CPLEX Optimization Studio Versão 12.5.

**PALAVRAS CHAVE:** programação inteira mista, dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção, indústria de embalagens de vidro.

### ABSTRACT

This paper proposes a mixed integer programming model integrating lot-sizing and scheduling problems in glass containers industry. The main differences between the proposed model and the existing models in the literature are the process specific technological constraints included. In order to validate the proposed model, computational tests were performed with instances of a real beer bottles factory problem from a large company positioned among the market leaders. The commercial package IBM ILOG CPLEX Optimization Studio Version 12.5 was used for tests implementation.

**KEYWORDS:** mixed integer programming, lot sizing and production scheduling, glass containers industry.

## 1. Introdução

Em um mercado global crescentemente competitivo, o Planejamento e Controle da Produção (PCP) passa a ser de suma importância na obtenção de bons resultados pela atividade industrial. Esse processo é uma atividade que visa à otimização do uso dos recursos no atendimento das metas de produção em um determinado período de tempo, denominado horizonte de planejamento. Tipicamente esse processo envolve três etapas de decisão: as definições de longo, médio e curto prazo. A primeira tem seu foco em antecipar necessidades do planejamento agregado, abrangendo definições estratégicas tais como escolha do portfólio de produtos, dos equipamentos, dos processos produtivos e da localização de facilidades. Já o planejamento de médio prazo envolve decisões relacionadas ao Planejamento dos Recursos da Manufatura (MRP – *Manufacturing Resource Planning*) e ao dimensionamento de lotes. Por fim, o curto prazo do PCP está mais intrinsecamente relacionado ao plano e sequenciamento diário das atividades produtivas no chão de fábrica, bem como a seu controle (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

O problema de dimensionamento de lotes (*Lot-Sizing Problem*) consiste na busca da definição de ordens de produção ou lotes que satisfaçam a demanda dos clientes com um custo mínimo. Esse problema consiste na base das decisões da esfera de médio prazo, passando a apresentar interface com o planejamento de curto prazo, mais operacional, quando agrega o sequenciamento da produção. A complexidade desse tipo de problema varia de acordo com os fatores envolvidos em sua modelagem. Karimi, Ghomi e Wilson (2003) listam os principais fatores que afetam a classificação das decisões do problema de dimensionamento de lotes: horizonte de planejamento, número de estágios, demanda, número de produtos, estrutura de preparação (*setup*), balanço entre demanda e inventário e deterioração de produtos. Pochet e Wosley (2006) propõem um esquema geral de classificação para os problemas de dimensionamento de lotes muito abrangente e com bastante interface com os fatores de influência apresentados por Karimi, Ghomi e Wilson (2003). O dimensionamento de lotes vem sendo estudado intensivamente e existem diversos modelos matemáticos para descrevê-lo, envolvendo diferentes abordagens e proposições (ALMADA-LOBO, 2007).

Conforme apontam Camargo, Toledo e Almada-Lobo (2012), a comunidade científica tem incorporado crescentemente as decisões de sequenciamento das atividades de produção nos modelos de dimensionamento de lotes, para que os modelos reflitam problemas reais de maneira mais verossímil. Esse fato tem tornado o planejamento da produção um trabalho mais sofisticado e mais apto a melhorar a flexibilidade da área produtiva.

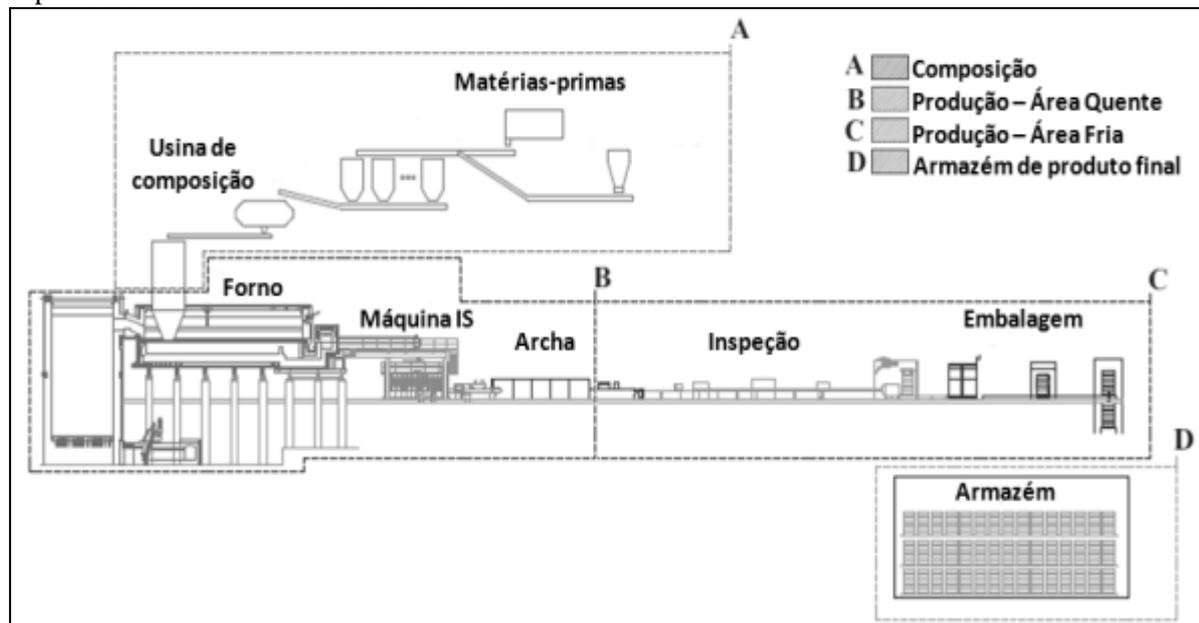
Clark, Almada-Lobo e Almeder (2011) analisam o panorama de pesquisa relativa ao PCP, reforçando a idéia anteriormente apresentada de que há uma tendência no estudo da integração de diferentes problemas e, além disso, afirmam que os pesquisadores e profissionais da área têm, cada vez mais, buscado incorporar aspectos reais dos processos produtivos em seus modelos, tornando-os mais complexos e obtendo soluções aptas a prover mais valor para uma organização que venha a utilizar tais soluções na tomada de decisão. Entretanto, no mesmo editorial, os pesquisadores apontam a carência de estudos que utilizem instâncias reais para testes computacionais, o que, de modo geral, empobrece os trabalhos de Pesquisa Operacional (PO) aplicados ao PCP.

Mesmo nesse contexto de crescente inclusão de aspectos reais dos processos produtivos nos modelos matemáticos, a indústria de embalagens de vidro é um setor em que importantes restrições tecnológicas têm sido negligenciadas. Observando essa lacuna, propõe-se um modelo de programação inteira mista que integra os problemas de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção na indústria de embalagens de vidro e que agrega importantes restrições tecnológicas desse processo produtivo.

## 2. A indústria de embalagens de vidro

O processo de produção de embalagens de vidro é bastante particular, apresentando desde processos comuns à fabricação de outros produtos de vidro, como composição e fusão, a processos específicos como a conformação e a aplicação de tratamentos superficiais. Trata-se de um processo de produção contínua com a fábrica e todas suas linhas operando em tempo integral durante os sete

dias da semana. A Figura 1 ilustra uma visão geral desse processo e a seguir suas etapas são explicadas com um maior nível de detalhe.



**Figura 1 – Visão geral do processo de fabricação de embalagens de vidro**  
**Fonte: Adaptado de Kovacec, Pilipovic e Stefanic (2010)**

As matérias-primas utilizadas na produção são basicamente sílica, carbonatos de sódio, calcita, dolomita, feldspatos e caco de vidro de fornecedores externos ou reaproveitado do próprio processo. Todas essas matérias-primas são colocadas em misturadores, formando a composição do vidro que é transportada ao forno por meio de correias transportadoras, sendo a enforna realizada de modo controlado. O forno de fusão trabalha em torno de 1650°C fundindo a composição e a transformando na massa de vidro que alimenta as diversas linhas de produção de embalagem (KOVACEC, PILIPOVIC E STEFANIC, 2010).

A massa de vidro fundida escorre, por gravidade, do forno até as máquinas responsáveis por sua conformação, denominadas Máquinas IS (do inglês, *Individual Section*), em canais de tijolos refratários denominados fornecedoras. Tais canais são bastante importantes para a determinação da qualidade das embalagens produzidas, pois realizam trocas térmicas com o vidro, sendo responsáveis pela sua homogeneidade térmica. Cada linha de produção é alimentada por uma fornecedora e possui uma máquina de conformação. Ao término do canal de refratários, há um conjunto denominado *feeder*, que é responsável por transformar a massa de vidro em gotas que alimentam a máquina IS. Basicamente, esse conjunto é composto por: tubo cerâmico, pino refratário, arruela refratária e aparelho de tesoura. O fluxo de vidro que chega ao *feeder* mantém sua homogeneidade térmica pelo movimento de rotação do tubo cerâmico e é empurrada pelo movimento vertical do pino refratário contra a arruela que fica posicionada abaixo do tubo. Essa arruela refratária apresenta um ou mais orifícios pelos quais o vidro escorre até o aparelho de tesoura, que pode ser mecânico ou servo-operado, e que transforma o fio de vidro que sai da arruela em gotas que abastecem o processo produtivo por meio do seu corte por lâminas metálicas providas de refrigeração. Abaixo do *feeder*, existe uma plataforma com um aparelho denominado distribuidor, que em conjunto com canais defletores, entrega as gotas de vidro às diversas seções que compõem a máquina de conformação de vidro (KOVACEC, PILIPOVIC E STEFANIC, 2010).

É importante observar que, na máquina IS, cada gota se transforma em uma garrafa ou em um pote, nota-se ainda que o número de orifícios da arruela refratária determina quantas gotas alimentam cada seção da máquina, sendo possível fabricar de um a quatro artigos por seção de acordo com a configuração escolhida.

Após a conformação, as embalagens ainda passam por outras etapas dentro do processo produtivo. Kovacec, Pilipovic e Stefanic (2010) descrevem tais etapas: a primeira seria o tratamento a quente, que consiste na aplicação de uma camada em torno de 10 nanômetros de material cerâmico sobre a garrafa ou pote logo na saída da máquina IS; na sequência, ocorre o recozimento, no qual os produtos passam por um processo de resfriamento controlado em um equipamento denominado archa, a fim de que se aliviem as tensões superficiais existentes no vidro conformado (usualmente, na saída da archa as garrafas passam por um segundo tratamento superficial denominado tratamento a frio); e, por fim, ocorrem as inspeções e testes ópticos, mecânicos e eletrônicos necessários para a eliminação de artigos que contenham trincas, deformações ou outros tipos de defeito.

Os processos acima descritos ocorrem paralelamente nas diferentes linhas de produção existentes na fábrica, cada uma com seu túnel de tratamento a quente, com sua archa ou forno de recozimento e a respectiva rampa de tratamento a frio localizado na saída desse forno, além de toda a estrutura composta por transportadores, mesas de acúmulo e máquinas de inspeção diversas, de acordo com as necessidades do processo e com os artigos produzidos em cada linha, podendo inclusive haver ramificações das linhas produtivas na área fria para a eliminação de gargalos.

As linhas são munidas de paletizadoras, que formam e encaminham os paletes de produto acabado para alguns equipamentos dedicados a embalar tais paletes e, a partir daí, os produtos já podem ser enviados para o armazém ou diretamente para a expedição de acordo com a demanda existente. Eventualmente, pode haver alguma etapa adicional no processo produtivo como a decoração de garrafas e potes, como descrita por Almada-Lobo (2007), porém isso depende muito da estratégia adotada pela empresa produtora e não é o *core-business* do ramo vidreiro.

Com essa contextualização do processo produtivo da indústria vidreira, torna-se possível a identificação dos fatores que podem impactar diretamente o PCP de uma fábrica de embalagens de vidro sob o ponto de vista de operacionalização do plano de produção:

- a) a cor do vidro, já que o forno funde uma única batelada de composição para alimentação de todas as suas linhas;
- b) a capacidade do forno em termos de toneladas de vidro fundido;
- c) a capacidade de cada linha em volume de produção de acordo com a capacidade de extração de vidro do forno pela fornecedora e pela máquina IS;
- d) a capacidade técnica da linha em produzir determinado artigo do portfólio que é principalmente atrelada à máquina IS instalada na linha, mas que também é influenciada por outros equipamentos e definições de projeto da linha;
- e) a sequência dos artigos que entram e saem da linha que pode ser considerado o principal fator de impacto no planejamento da produção vidreira, pois influencia na produção, em termos operacionais, de diversas maneiras:
  - dependendo do tipo de preparação que ocorre de um artigo  $i$  para um artigo  $j$  na máquina  $k$ , tem-se um tempo de troca mecânica da máquina ( $T1$ ), mas há também um tempo de aquecimento da produção, denominado *warm up* ou *start-up* ( $T2$ ), no qual a máquina de conformação opera com um rendimento de produção inferior ao seu rendimento padrão. É cabível a observação de que trocas que envolvem parametrizações mais complexas da máquina IS, como a troca de um artigo produzido em simples gota para um artigo fabricado em dupla gota ou a troca de família de artigos produzidos, penalizam o processo de maneira mais assídua tanto em  $T1$  quanto em  $T2$ ;
  - além das perdas de  $T1$  e  $T2$  associadas com a sequência de produção em cada máquina, uma troca de fabricação em determinada linha produtiva pode impactar indiretamente em perdas de qualidade nas demais linhas, esse ponto envolve maior complexidade, pois aborda questões bastante técnicas da produção de embalagens. O que empiricamente se percebe nesse tipo de indústria é que para os casos nos quais há uma troca de fabricação em uma determinada linha, provocando uma variação muito brusca da extração de vidro fundido do forno

para a fornecedora dessa linha, o vidro perde sua homogeneidade térmica nas demais fornecedoras, visto que todas são alimentadas por uma batelada comum de vidro fundido.

Conforme mencionado na introdução, há poucos trabalhos científicos que abordam o dimensionamento de lotes especificamente para essa indústria. Dentre os trabalhos existentes, têm-se alguns dos fatores acima listados já muito bem solucionados:

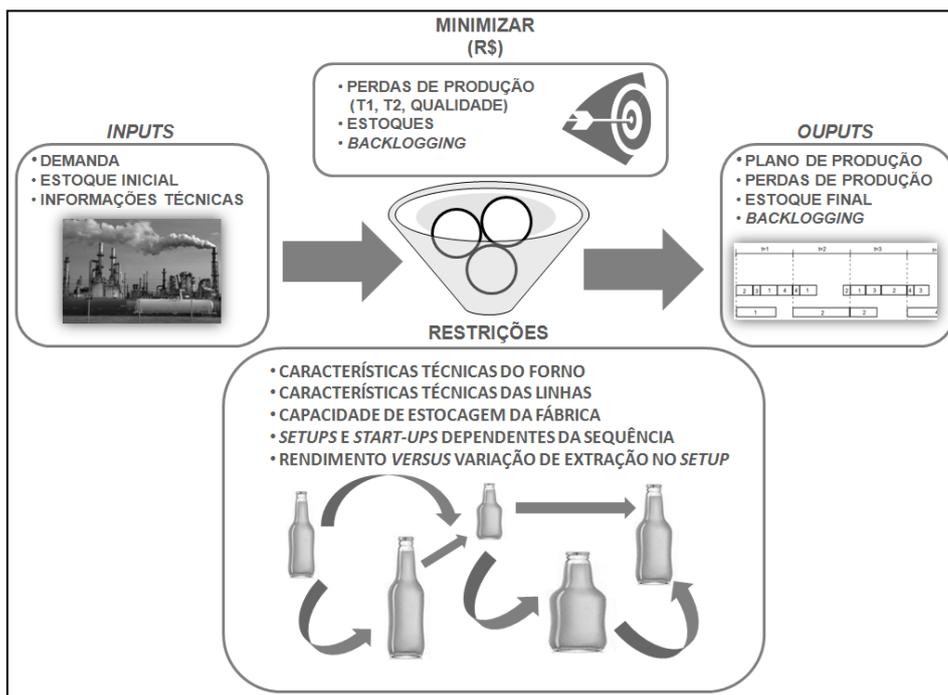
- a) Almada-Lobo (2007) e Almada-Lobo, Oliveira e Carravilla (2008) abordam o planejamento das campanhas do forno de modo muito preciso ao equacionar o planejamento de longo prazo, propondo inclusive um método de resolução do problema;
- b) T'kindt, Billaut e Proust (2001) abordam o planejamento da ocupação da capacidade do forno em termos financeiros, inclusive penalizando soluções obtidas que permitem a ociosidade das linhas;
- c) Richard e Proust (2000) analisam esse problema de planejamento sobre um prisma mais financeiro, considerando, inclusive, uma margem de retorno por produto;
- d) Almada-Lobo (2007) e Toledo *et al.* (2013) entram em detalhes de uma análise de planejamento de curto prazo abordando as restrições da capacidade técnica das linhas por meio da definição de conjuntos de artigos tecnicamente inviáveis para determinadas máquinas IS e abordam a restrição de preparação dependente da sequência.

Observou-se uma verdadeira lacuna na análise do planejamento da produção no âmbito mais operacional para esse tipo de indústria, pois os autores não tratam a especificidade da curva de *warm up*, inerente ao sequenciamento da produção, e não consideram as perdas de qualidade proporcionadas por uma variação brusca na extração do forno nos modelos apresentados na literatura.

### 3. O modelo proposto

Este trabalho propõe um modelo matemático baseado em programação inteira mista a fim de preencher as lacunas destacadas anteriormente para o problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção na indústria de embalagens de vidro. O principal intuito desta proposição é, além de abranger o curto prazo das atividades fabris, incorporar a diferença entre o tempo de preparação mecânica ( $T_1$ ) e o tempo de *warm up* ( $T_2$ ) e as perdas de produtividade inerentes a variações de extração no forno.

Para evidenciar as restrições tecnológicas do processo vidreiro acima destacadas, o modelo será proposto para uma fábrica de embalagens que possua apenas um forno e que trabalhe exclusivamente com uma cor de embalagens, visando a ganhos em escala e buscando a utilização máxima dos recursos existentes. No ramo vidreiro, são usuais fábricas com tal configuração, focadas em mercados específicos, como o de embalagens de cerveja, por exemplo. Tratam-se de fábricas de embalagens com, no máximo, uma troca de fabricação por dia e que direcionam a programação da produção de seus fornos para grandes lotes de produtos. Ao se definir o escopo deste estudo como o problema de planejamento da produção de uma fábrica com tais características, as restrições tecnológicas, que este trabalho tem como intuito destacar, ganham muita importância, pois representam os ganhos potenciais nestes ambientes de produção ininterrupta. A Figura 2 representa o modelo conceitual que embasou a modelagem quantitativa e, a seguir, encontra-se o modelo matemático proposto neste trabalho.



**Figura 2 – Ilustração do modelo conceitual definido para o problema de pesquisa**

### Índices

- $t = 1, \dots, T$ : períodos de produção, neste modelo considera-se o dia como unidade de tempo;
- $i = 1, \dots, N$ : tipos de embalagens produzidas;
- $m = 1, \dots, M$ : números de máquinas de conformação da fábrica.

### Dados do Problema

- $\beta$ : custo, em reais, por tonelada de vidro fundido;
- $\lambda$ : custo, em reais, para manter uma tonelada de vidro em estoque por um período;
- $\Omega$ : custo, em reais, de se atrasar a entrega de uma tonelada de vidro por um período;
- $\theta$ : custo, em reais, do atraso acumulado após último período do horizonte de planejamento (no modelo proposto, esse tipo de atraso será considerado uma oportunidade de venda perdida);
- $A$ : capacidade de armazenagem de artigos na fábrica, dada em toneladas de vidro;
- $C$ : capacidade de fusão do forno, dada em toneladas de vidro;
- $d_{it}$ : demanda do artigo  $i$  no período  $t$ , informada em toneladas de vidro;
- $\varepsilon_{mi}$ : taxa de extração<sup>1</sup> de vidro da máquina  $m$  ao produzir o artigo  $i$ , ou seja, a quantidade de vidro, em toneladas, que a máquina  $m$  consome do forno por unidade de tempo para produzir o artigo  $i$ ;
- $p_{mi}$ : taxa de produção<sup>2</sup> da máquina  $m$  ao produzir o artigo  $i$ , ou seja, a quantidade de artigos  $i$ , em toneladas de vidro bom, produzida pelo máquina  $m$  por unidade de tempo;
- $s_{mij}$ : T1 ou tempo de preparação mecânica (expresso em uma fração do período  $t$  corrente) em uma troca de fabricação na máquina  $m$  do artigo  $i$  para o artigo  $j$ ;
- $r_{mij}$ : T2 ou tempo de *warm up* (expresso em uma fração do período  $t$  corrente) em uma troca de fabricação na máquina  $m$  do artigo  $i$  para o artigo  $j$ ;
- $I_{0i}$ : estoque inicial do artigo  $i$ , em toneladas de vidro;

<sup>1</sup> Esta taxa de extração  $\varepsilon_{im}$  é obtida pelo produto do peso médio do artigo  $i$ , da sua velocidade de produção em artigos por unidade de tempo por seção da máquina  $m$  e do número de seções utilizado para sua fabricação.

<sup>2</sup> Basicamente esta taxa de produção  $p_{mi}$  consiste no produto da extração  $\varepsilon_{im}$  pelo rendimento padrão que a máquina  $m$  consegue obter para o artigo  $i$ , conforme estabelecido pela norma técnica da empresa.

- $b_{0i}$ : backlog inicial ou atraso de entregas inicial do artigo  $i$ , em toneladas de vidro;
- $\alpha_{0mi}$ : configuração inicial das máquinas, ou seja, para quais artigos cada uma das  $m$  máquinas está preparada no início do horizonte de planejamento;
- $\omega$ : constante que quantifica o tempo de produção que cada máquina  $m$  perde em um período (expresso em uma fração desse período) quando há uma troca de fabricação que altera significativamente a extração de vidro do forno de fusão, ativando a variável de criticidade de troca de fabricação.

### Variáveis do Problema

- $X_{mit}$ : fração do período corrente no qual a máquina  $m$  produz o artigo  $i$  no período  $t$ ;
- $I_{it}$ : estoque do artigo  $i$  no início do período  $t$ , em toneladas de vidro;
- $I'_i$ : estoque final (após o último período do horizonte de planejamento) do artigo  $i$ , em toneladas de vidro;
- $B_{it}$ : backlog ou atraso de entregas do artigo  $i$  no início do período  $t$ , em toneladas de vidro;
- $B'_i$ : backlog ou atraso final (após o último período do horizonte de planejamento) de entregas do artigo  $i$ , em toneladas de vidro (no modelo proposto, esse tipo de atraso será considerado uma oportunidade de venda perdida);
- $\delta_t$ : criticidade de uma troca de fabricação ocorrido no período  $t$ , de acordo com a variação de extração do forno resultante;
- $Y_{mit}$ :  $Y_{mit} = 1$ , se a máquina  $m$  produz o artigo  $i$  durante o período  $t$ , caso contrário,  $Y_{mit} = 0$ ;
- $\alpha_{mit}$ :  $\alpha_{mit} = 1$ , se a máquina  $m$  está preparada para a produção do artigo  $i$  no início do período  $t$ , caso contrário,  $\alpha_{mit} = 0$ ;
- $Z_{mijt}$ :  $Z_{mijt} = 1$ , se há uma troca de fabricação do artigo  $i$  para o artigo  $j$  na máquina  $m$  durante o período  $t$ , caso contrário,  $Z_{mijt} = 0$ .

### Modelo Matemático

#### Minimizar:

$$\beta \cdot \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^T \left[ \left( s_{mij} + \frac{r_{mij}}{2} \right) \cdot \max(p_{mi}, p_{mj}) \cdot Z_{mijt} \right] + \sum_{t=1}^T (\omega \cdot \delta_t) \cdot C \right\} \\ + \lambda \cdot \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T I_{it} + \sum_{i=1}^N I'_i \right) + \Omega \cdot \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T B_{it} \right) + \theta \cdot \left( \sum_{i=1}^N B'_i \right) \quad (3.1)$$

#### Sujeito à:

$$-B_{it} + I_{it} + \sum_{m=1}^M X_{mit} \cdot p_{mi} = d_{it} + I_{i(t+1)} - B_{i(t+1)} \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T-1 \quad (3.2)$$

$$-B_{iT} + I_{iT} + \sum_{m=1}^M X_{miT} \cdot p_{mi} = d_{iT} + I'_i - B'_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{mit} = 1 \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z_{mijt} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T; i \neq j \quad (3.5)$$

$$Y_{mit} \leq \sum_{j=1}^N (Z_{mijt}) + \alpha_{mit} \quad m = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^N (Z_{mjit}) + \alpha_{mit} = \sum_{j=1}^N (Z_{mijt}) + \alpha_{mi(t+1)} \quad m = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T - 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{mit} = 1 \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.8)$$

$$\delta_t \geq \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \left\lfloor \frac{\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{mj}}{10} \right\rfloor \cdot Z_{mijt} \right) \quad t = 1, \dots, T \quad (3.9)$$

$$\delta_t \geq \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \left\lfloor \frac{\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{mj}}{10} \right\rfloor \cdot (-Z_{mijt}) \right] \quad t = 1, \dots, T \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=1}^N \left[ \left( s_{mji} + \frac{r_{mji}}{2} \right) \cdot Z_{mijt} \right] + X_{mit} = Y_{mit} \quad m = 1, \dots, M; i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (3.11)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^N (\varepsilon_{mi} \cdot Y_{mit}) \leq C \quad t = 1, \dots, T \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^N I_{it} \leq A \quad t = 1, \dots, T \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^N I'_i \leq A \quad (3.14)$$

$$(X_{mit}, I_{it}, I'_i, B_{it}, B'_t) \in R_+, \delta_t \in Z_+, (Y_{mit}, \alpha_{mit}, Z_{mijt}) \in \{0,1\} \quad (3.15)$$

A função objetivo (3.1) visa a minimizar os custos, em reais, das perdas de produção por troca de fabricação nas linhas, dos níveis de estoque da fábrica, dos atrasos no decorrer do horizonte de planejamento e do atraso final de entrega de produtos acabados, que será considerado um volume de vendas perdido. As restrições (3.2) e (3.3) consistem no balanço de estoque para cada período e para o período final do horizonte de planejamento, respectivamente. As restrições (3.4) garantem que cada máquina inicie cada período preparada para somente um artigo e, em (3.5), garante-se que ocorra, no máximo, uma troca de fabricação por período. As restrições (3.6) asseguram que uma máquina somente está apta a produzir um determinado artigo em um período, se ela já inicia o período preparada para aquela produção ou se há uma preparação dessa máquina para esse artigo no período. As restrições (3.7) correspondem às equações de balanço de preparação, incorporando a característica de carregamento da preparação entre períodos. Em (3.8), limita-se a produção de cada máquina a somente um tipo de artigo por dia e garante-se a não ociosidade das linhas. Por meio de (3.9) e (3.10), atribui-se um valor  $\delta_t$  que penaliza a produção em todas as linhas quando há uma troca de fabricação que impacta em uma variação de extração de vidro fundido do forno em um valor superior a dez toneladas por dia. Esse último conjunto de restrições foi baseado na análise do histórico dos últimos três anos de produção e na experiência dos técnicos vidreiros, o que se pode observar é que a cada dez toneladas de variação da extração do forno por uma troca de fabricação, penaliza-se a capacidade produtiva de toda a fábrica segundo uma determinada constante, que neste modelo é representada pelo parâmetro  $\omega$ . As restrições (3.11) garantem, para cada período, que os tempos de produção de cada artigo em cada máquina,  $X_{mit}$ , são penalizados pelos tempos de preparação mecânica e *warm up*. Em (3.12), limita-se a produção diária à capacidade do forno. As restrições (3.13) e (3.14) asseguram que os níveis de estoque de cada período respeitem a capacidade física dos armazéns da fábrica. Em (3.15), define-se o domínio das variáveis do problema.

Logo, tornam-se evidentes no modelo proposto a inclusão das especificidades do processo vidreiro: a função objetivo (3.1) é penalizada pelo tempo de preparação mecânica (T1), pelo tempo

de *warm up* (T2) e pelas variações de extração do forno; as restrições tecnológicas (3.9) e (3.10) definem o comportamento de tais perdas por variação de extração; a restrição (3.11) penaliza a produção do período de acordo com os impactos associados à preparação de máquina (T1 e T2).

#### 4. Testes computacionais

O modelo proposto foi aplicado para a resolução de um problema real a fim de que fosse validado. O problema aparece em uma indústria especializada na fabricação de vidro âmbar para embalagens de cerveja pertencente a uma grande multinacional que figura entre as líderes do setor e que apresenta as características definidas no modelo conceitual.

Um amplo levantamento de dados foi realizado nessa empresa, envolvendo desde o resgate de todo o histórico do sistema ERP (*Enterprise Resource Planning*) até a realização de entrevistas com especialistas e gestores, tanto do departamento de PCP, quanto das áreas técnicas de produção e manutenção. Desse modo, foi possível que se levantassem todos os índices e dados do problema para essa fábrica que possui um único forno de capacidade máxima de fusão de 360 toneladas de vidro por dia, é equipada com 3 máquinas IS e possui uma capacidade de armazenagem de 18.000 toneladas de embalagens. As demandas diárias e os níveis de estoque da fábrica de 2010 a 2013 foram levantadas para cada um dos 31 artigos do seu portfólio, assim como as características técnicas de cada linha, as perdas referentes a T1 e T2 para cada troca de artigo possível em cada máquina IS foram estimadas e, com uma análise do histórico de trocas da fábrica aliado a uma bateria de entrevistas com os técnicos de produção, foi possível estimar a constante  $\omega = 0,02$  que penaliza a capacidade produtiva de toda a fábrica para trocas de fabricação com variações bruscas da extração de vidro do forno.

Foi possível ainda, que se estimassem os custos, em reais, da tonelada de vidro fundida ( $\beta$ ) e da tonelada de vidro mantida em estoque por dia ( $\lambda$ ). Como particularidade do modelo de gestão da empresa estudada, o parâmetro  $\Omega = 0$  foi definido, pois os atrasos que ocorrem no decorrer horizonte de planejamento, em geral, não acarretam em penalizações financeiras para essa organização. O contrário ocorreu com o parâmetro  $\theta$ , que pôde ser estimado, pois o atraso final ( $B'_i$ ), de fato, implica em custos referentes à perda de mercado pela empresa.

Assim, uma série de testes computacionais utilizando instâncias reais de um problema de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção foi executada. Três meses de produção entre 2010 e 2013 foram selecionados aleatoriamente e seus dados foram utilizados para aplicação do modelo proposto no pacote comercial IBM ILOG CPLEX Optimization Studio Versão 12.5 em um computador equipado com sistema operacional Windows 7, CPU Intel® Core™ i3 2,13GHz e 4 GB de memória RAM. Os testes foram executados para diferentes horizontes de planejamento a partir do início de cada mês selecionado e com uma parametrização de tempo limite de 3.600 segundos para processamento da solução do problema, os resultados obtidos encontram-se resumidos na Tabela 1.

**Tabela 1 – Resultados dos testes computacionais com o modelo proposto**

	Horizonte de Planejamento (dias)	Tempo (s)	Gap otimalidade * (%)	Valor função objetivo (R\$)	Perdas T1+T2 (R\$)	Perdas variação extração (R\$)	Soma estoques totais (R\$)	Atraso final (R\$)
Janeiro 2011	t = 7	14	0	113.003	18.849	0	88.616	5.538
	t = 14	373	0	200.439	24.713	5.342	170.384	0
	t = 31	3.618	9,04	438.966	44.313	0	394.653	0
Setembro 2012	t = 7	6	0	201.028	0	0	197.004	4.024
	t = 14	131	0	381.020	10.754	0	360.498	9.768
	t = 30	3.618	4,81	775.947	63.252	0	712.695	0
Fevereiro 2013	t = 7	10	0	129.924	12.744	0	117.180	0
	t = 14	20	0	247.890	20.969	0	223.497	3.424
	t = 28	3.617	10,25	522.189	51.445	10.685	460.059	0

\* **GAP DE OTIMALIDADE** = (LIMITANTE INFERIOR - MELHOR SOLUÇÃO INTEIRA) / LIMITANTE INFERIOR

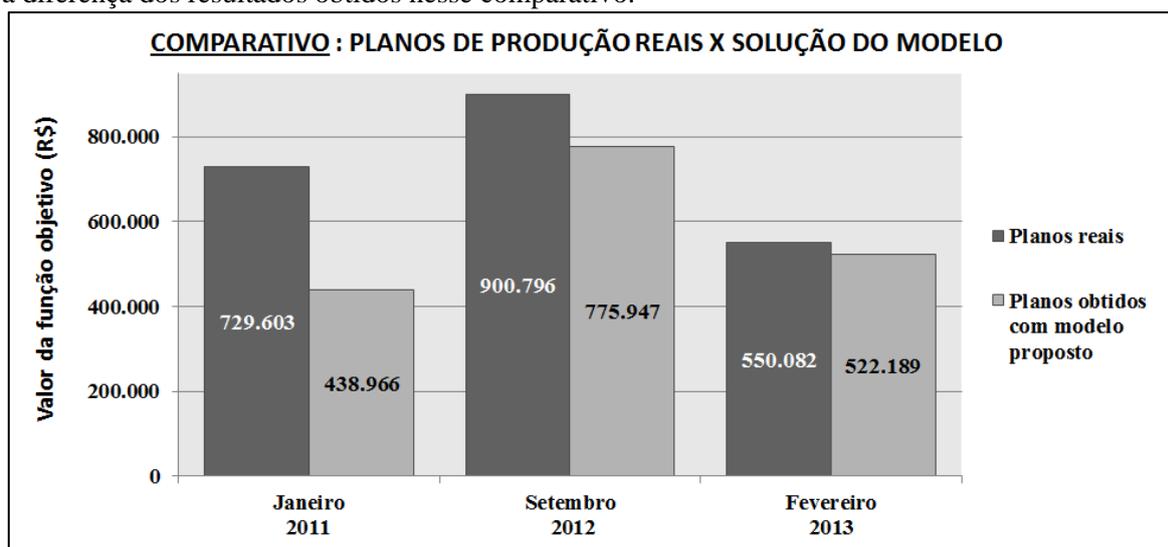
Em uma primeira análise dos resultados dos testes computacionais realizados com base em dados de um problema real, percebe-se que, para instâncias menores, como o planejamento da produção da fábrica em horizontes de planejamento de uma ou duas semanas, o algoritmo de *Branch and Cut* do CPLEX foi capaz de resolver o problema de maneira bastante eficiente e rápida, obtendo um plano de produção ótimo em alguns segundos de processamento. Para instâncias maiores, como o planejamento de um mês de produção, o CPLEX atingiu o tempo limite de processamento de 3.600 segundos antes de chegar a uma solução ótima, porém observa-se que, mesmo com esse tempo limite de processamento relativamente baixo, obtiveram-se soluções de alta acurácia com baixos *gaps* em relação aos limitantes inferiores calculados para o problema de minimização.

A fim de se criarem subsídios para uma validação empírica do modelo, foi calculado o valor da função objetivo para os planos de produção reais que foram executados nesses três meses com base nos dados e nas premissas do modelo matemático proposto. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 2.

**Tabela 2 – Função objetivo para planos reais de produção da fábrica**

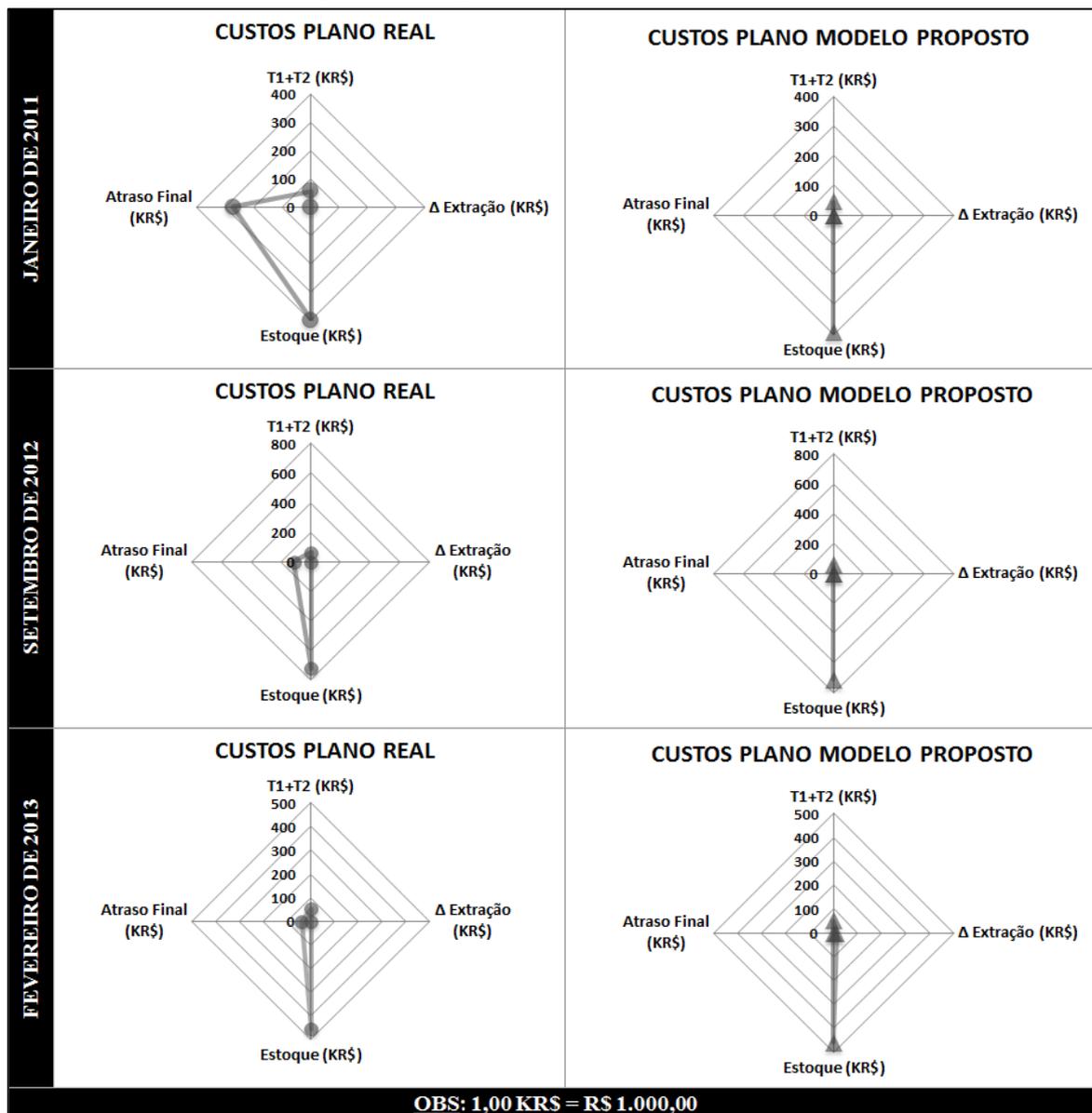
	Horizonte de Planejamento (dias)	Tempo de planejamento	Valor função objetivo (R\$)	Perdas T1+T2 (R\$)	Perdas variação extração (R\$)	Soma estoques totais (R\$)	Atraso final (R\$)
Janeiro 2011	t = 31	1 semana	729.603	56.697	0	399.879	273.027
Setembro 2012	t = 30	1 semana	900.796	61.807	0	721.928	117.061
Fevereiro 2013	t = 28	1 semana	550.082	52.854	0	458.559	38.669

Ao se confrontarem os resultados obtidos para os planos de produções reais da fábrica com o planejamento otimizado obtido pela resolução do modelo no CPLEX, foi possível evidenciar que, com apenas 1 hora de processamento no *solver*, a aplicação do modelo proporcionou planos de produção mais eficientes que os planos reais para todos os meses de análise (Janeiro de 2011, Setembro de 2012 e Fevereiro de 2013). Tais resultados representam um ganho considerável, ao se observar que para a obtenção dos planos de produção reais o PCP teve de alocar o recurso de um especialista com dedicação exclusiva por uma semana de trabalho. A Figura 3 mostra graficamente a diferença dos resultados obtidos nesse comparativo.



**Figura 3 – Comparativo: planos de produção reais versus planos obtidos com solução do modelo**

É possível ainda analisar a qualidade dos resultados obtidos ao se comparar os principais custos que compõem as funções objetivo dos planos de produção reais e dos planos de produção provenientes da solução do modelo proposto. Esse tipo de análise deixa bastante evidente que o custo que viabiliza a maior economia nos planos obtidos com o modelo matemático é o custo de atraso final, ou seja, a solução obtida pelo CPLEX minimiza os atrasos no fim do horizonte de planejamento, evitando a perda de vendas pelo não atendimento dessa demanda. Além disso, na maioria dos casos, a solução do modelo proposto se mostrou mais eficiente na redução dos custos de estoque, T1 e T2, o que se percebe em uma análise das Tabelas 1 e 2. A Figura 4 ilustra esquematicamente as diferenças acima expostas.



**Figura 4 – Comparação dos custos dos planos de produção**

### 5. Conclusões

O problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes é estudado nesse artigo. É proposta uma modelagem matemática que incorpora novas restrições tecnológicas não observadas na literatura. A solução do modelo proposto é capaz de gerar planos de produção factíveis para a indústria de embalagens de vidro satisfazendo restrições tecnológicas específicas desse processo produtivo.

Além disso, a comparação dos resultados com as atuais ferramentas disponíveis pelo PCP da empresa, observam-se possibilidades concretas de ganho ao se implantar o modelo aliado a um pacote comercial como o CPLEX, de forma a se construir um Sistema de Apoio à Decisão (SAD):

- a) tempo de elaboração dos planos de produção: nos testes realizados, obtiveram-se planos de produção mensais com apenas uma hora de processamento do modelo. Hoje, a empresa demora em média uma semana para realizar o mesmo trabalho;
- b) qualidade das soluções: ao se aplicar o modelo aliado a um *solver* foi possível resolver o problema de maneira bastante eficaz. Nos testes realizados, obtiveram-se soluções com planos de produção de menor custo que os planos reais implementados. Isso se deve, principalmente, à obtenção de planos de produção otimizados no que tange à redução dos atrasos de entrega de produtos, evitando uma possível perda de mercado, e, logo, resultando em menores custos globais do planejamento.

Por fim, como oportunidades da continuidade deste trabalho, propõem-se: o desenvolvimento e aplicação de métodos de validação mais amplos para o modelo sob o ponto de vista de pesquisa operacional e também sob o prisma de gestão da cadeia de suprimentos, e o desenvolvimento de uma heurística específica para resolução do modelo proposto que dispense pacotes comerciais de otimização.

### Referências

- Almada-Lobo, B.** Lotsizing and Scheduling in the Glass Container Industry. 2007. 164f. Tese (Doutorado) - Universidade do Porto, Porto, 2007.
- Almada-Lobo, B., Oliveira, J.F. e Carravilla M.A.** Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach. *International Journal of Production Economics*, v.114, n.1, p. 363-375, 2008.
- Camargo, V. C. B., Toledo, F. M. B. e Almada-Lobo, B.** Three time-based scale formulations for the two-stage lot sizing and scheduling in process industries. *Journal of the Operational Research Society*, v.63, n.11, p. 1613-1630, 2012.
- Clark, A., Almada-Lobo, B. e Almeder, C.** Lot sizing and scheduling: industrial extensions and research opportunities. *International Journal of Production Research*, v.49, n.9, p. 2457-2461, 2011.
- Karimi, B., Ghomi, S. M. T. F. e Wilson, J. M.** The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega International Journal of Management Science*, v. 31, n.5, p. 365-378, 2003.
- Kovacec, M., Pilipovic, A. e Stefanic, N.** Improving the quality of glass containers production with plunger process control. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, v.3, n.4, p. 304-310, 2010.
- Pochet, Y. e Wosley, L. A.** Production Planning by Mixed Integer Programming. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*. Nova York, 2006.
- Richard, P. e Proust, C.** Maximizing benefits in short-term planning in bottle-glass industry. *International Journal of Production Economics*, v.64, n 1-3, p. 11-19, 2000.
- Toledo, C.F.M., Arantes, M. S., Oliveira, R. R. R. e Almada-Lobo B.** Glass container production scheduling through hybrid multi-population based evolutionary algorithm. *Applied Soft Computing*, v.13, n.3, p. 1352-1364, 2013.
- T'kindt, V., Billaut J. C. e Proust, C.** Solving a bicriteria scheduling problem on unrelated parallel machines occurring in the glass bottle industry. *European Journal of Operational Research*, v.135, n. 1, p. 42-49, 2001.