



MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE INTEGRADO AO PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM INDÚSTRIAS DE PAPEL

Sônia Cristina Poltroniere Silva

Faculdade de Ciências
Universidade Estadual Paulista (UNESP - Bauru)
soniacps@fc.unesp.br

Silvio Alexandre de Araujo

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Universidade Estadual Paulista (UNESP – São José do Rio Preto)
saraujo@ibilce.unesp.br

Kelly Cristina Poldi

Instituto de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP – São José dos Campos)
kelly.poldi@gmail.com

RESUMO

Um importante problema de programação da produção surge em indústrias de papel, integrando o problema de corte de estoque ao dimensionamento de lotes. O problema de dimensionamento de lotes deve determinar a quantidade de bobinas jumbos de diferentes tipos de papel a serem produzidos em cada máquina, ao longo de um horizonte de planejamento finito. Estes jumbos são então cortados para atender a demanda de itens para cada período. Neste trabalho, tratamos os problemas de corte de estoque e de dimensionamento de lotes de forma integrada, procurando minimizar custos com produção e estoque dos jumbos, como também a perda de papel durante o processo de corte. Várias modelagens para o problema integrado são consideradas, e os modelos foram resolvidos heurísticamente usando um pacote de otimização. Versões relaxadas dos modelos também foram resolvidas com o objetivo de obter limitantes inferiores para o problema. Resultados computacionais são apresentados e discutidos.

PALAVRAS CHAVE: Problema de Corte de Estoque, Dimensionamento de Lotes, Problemas Integrados.

ABSTRACT

An important production programming problem arises in paper industries, integrating the cutting stock problem with lot sizing. The lot sizing problem determines the quantity of jumbos of different types of paper to be produced on each machine over a finite planning horizon. These jumbos are then cut in order to meet the demand of items for each period. In this work, we treat the integrated cutting stock and lot sizing problem, to minimize costs of production and inventory of jumbos, as well the trim loss generated during the cutting process. Several mathematical models for the integrated problem are considered, and these models were solved heuristically using an optimization package. Relaxed versions of the models were also solved with the objective of obtaining lower bounds for the problem. Computational results are presented and discussed.

KEYWORDS: Cutting Stock Problem, Lot Sizing Problem, Integrated Problems.

1. Introdução

O problema de corte de estoque consiste na otimização do processo de corte de unidades maiores (objetos) que estejam disponíveis, para a produção de um conjunto de unidades menores (itens), com o objetivo de atender a demanda desses itens e satisfazer algum critério de otimização, como por exemplo, minimizar a perda de material gerada pelo corte ou o custo total dos objetos cortados. As formas e medidas dos objetos e dos itens são bem especificadas. Tais problemas vêm sendo investigados nas últimas décadas, desde os trabalhos pioneiros de Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965), que propuseram a técnica de geração de colunas, viabilizando a resolução de problemas reais.

Em indústrias de manufatura como, por exemplo, indústrias moveleira, papelreira e metalúrgica, o problema de corte de estoque aparece como um subproblema fundamental de um problema de planejamento da produção mais amplo, chamado problema de dimensionamento de lotes (Trigeiro et al. 1989), que consiste em determinar a quantidade de produtos a serem produzidos em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender certa demanda e otimizar uma função objetivo, como por exemplo, minimizar custos, atrasos etc.

Em Poltroniere et al. (2008) é feito um estudo aplicado à indústria de papel em que os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque são considerados de forma integrada. O objetivo do presente trabalho consiste na resolução de diferentes modelos matemáticos para o problema proposto em Poltroniere et al. (2008). Além do modelo proposto pelos autores em 2008, que considera a abordagem de Gilmore e Gomory (1963) para o problema de corte de estoque, neste trabalho, consideramos também a abordagem de Kantorovich (1960) e de Valério de Carvalho (1999, 2002), que é baseada num modelo de fluxo em redes. Os modelos são implementados num pacote de otimização, resolvidos de forma heurística e os resultados são comparados com os obtidos em Poltroniere et al. (2008). Além disso, algumas relaxações são resolvidas com o intuito de obter limitantes inferiores para o problema integrado, o que permitirá testar a qualidade das soluções heurísticas.

2. Revisão bibliográfica de problemas integrados

Farley (1988) foi o primeiro autor a publicar um estudo sobre o problema de corte de estoque integrado ao problema de planejamento e programação da produção, com aplicações na indústria de roupa. Respício e Captivo (2002) apresentaram um modelo de programação inteira, integrando o problema de corte de estoque unidimensional ao problema de planejamento, com aplicações em indústrias papeleiras. Um modelo simplificado é proposto e resolvido por um algoritmo do tipo *branch-and-price*. Menon e Schrage (2002) consideraram o problema composto de alocação de pedidos às máquinas e corte de bobinas em indústrias de papel, para um único período de planejamento. Correia et al. (2004) estudaram um problema de planejamento da produção e otimização do corte de bobinas e resmas, com aplicações numa indústria papeleira portuguesa. Os autores propuseram um método de solução heurística baseado na enumeração lexicográfica dos padrões de corte, que são selecionados e usados como colunas num modelo de programação linear. Também motivados por aplicações em indústria de papel, Poltroniere et al. (2008) propuseram um modelo matemático para tratar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma integrada, num horizonte de planejamento dividido em períodos. Foram propostos dois métodos heurísticos para a solução, baseados na relaxação Lagrangiana das restrições de integração, que se mostraram apropriados para tratar o problema integrado. Nessas heurísticas, o problema de corte de estoque foi resolvido, considerando-se a antecipação do corte de itens, quando apropriado.

Considerando a indústria moveleira, Gramani e França (2006) propuseram um modelo para o problema integrado que determina quais e como os vários produtos finais (mesas, prateleiras, guarda-roupas, etc.) devem ser produzidos num dado período. Desta decisão, segue um pedido de um determinado número de itens (retângulos menores), que devem ser cortados de placas disponíveis em estoque (retângulos maiores). Foi proposto um método de solução baseado no problema de caminho mínimo. Gramani et al. (2009) estenderam o modelo proposto em 2006 para considerar as decisões sobre os produtos finais. Os custos de preparação foram mantidos e

apenas o estoque de produtos finais é permitido. Foram propostos métodos de decomposição para resolver o problema integrado. Em Gramani et al. (2010), os custos de preparação não foram considerados, nem as frequências inteiras dos padrões de corte. Entretanto, considerou-se o estoque de produtos finais e de itens. O problema é resolvido usando geração de colunas. Ghidini (2008) também propôs um modelo para o problema integrado que permite a antecipação de alguns produtos e a armazenagem no estoque. Foram desenvolvidas duas heurísticas para resolver uma simplificação do modelo matemático proposto. Santos et al. (2011) também resolveram o problema integrado considerando os padrões de corte usados pela indústria e padrões de corte n -grupos aplicados em um conjunto de dados reais fornecidos pela fábrica. Em Vanzela et al. (2012) foi simulado parcialmente a prática de uma fábrica e proposto um modelo integrado. Nos dois últimos trabalhos têm-se restrições referentes à capacidade da serra em termos de número de ciclos da serra.

Silva et al. (2014) propõem dois modelos de programação inteira para resolver os problemas de corte bidimensional e dimensionamento de lotes de forma integrada. O primeiro modelo é uma extensão do modelo proposto em Silva et al. (2010) e o segundo modelo é uma extensão do modelo de Dyckhoff (1981). Nos dois modelos, tanto a antecipação da produção de itens quanto o estoque de sobras são permitidas e o objetivo é minimizar custos de produção e de estoque, e o número de placas iniciais usadas. Duas heurísticas são apresentadas e os resultados computacionais discutidos. Motivados por desafios que surgem na indústria de papel, Kallrath et al. (2014) apresentam várias abordagens para modelar e resolver os problemas de corte de estoque unidimensional e bidimensional. O objetivo é minimizar o número de bobinas e o número de padrões de corte, não permitindo qualquer superprodução. São propostas abordagens de geração de colunas para tratar dois casos: o PCE com bobinas de diferentes larguras em estoque, em quantidades limitadas, e o PCE com subprodução permitida, mas a ser minimizada.

3. Modelos matemáticos para o problema integrado de corte de estoque e dimensionamento de lotes

Poltroniere et al. (2008) propuseram um modelo matemático inteiro misto para tratar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma integrada, num horizonte de planejamento dividido em períodos. O problema de corte foi modelado usando a abordagem de Gilmore e Gomory (1963), supondo diferentes bobinas em estoque, em quantidades limitadas, como está apresentado na seção 3.1. Nas seções 3.2 e 3.3 são apresentadas as modelagens integradas considerando-se as abordagens de Kantorovich (1960) e de Valério de Carvalho (1999, 2002), respectivamente.

3.1. Modelo integrado usando a abordagem de Gilmore e Gomory (LCGG)

No processo de produção e corte de papel, o Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL) deve ser considerado para decidir qual deve ser o peso de jumbos (bobinas grandes) a ser produzido em cada período de um horizonte de planejamento. Os jumbos são produzidos em máquinas paralelas, que são capacitadas e têm desempenhos próprios. Posteriormente os jumbos são cortados em bobinas menores de larguras dadas (que podem ser cortadas na sequência em retângulos), para atender a demanda com o objetivo de minimizar a perda.

Diferentes tipos de papel (gramatura) devem ser produzidos para atender a demanda e a mudança de um tipo para outro causa perda relevante de matéria-prima (custo de preparação) e perda de tempo de máquina (tempo de preparação), que são sequências dependentes. Por simplicidade, são considerados custo de preparação e tempo de preparação independentes da sequência. Além disso, sem perda de generalidade, supõe-se que cada jumbo consiste de apenas um tipo de papel.

Na modelagem, considera-se um jumbo de gramatura k e largura L_s cm (essa largura depende da máquina em que o jumbo foi produzido) como um número de *bobinas-mestre*, todas elas de mesmo peso específico ρ_k definido previamente como ilustrado na Figura 1.

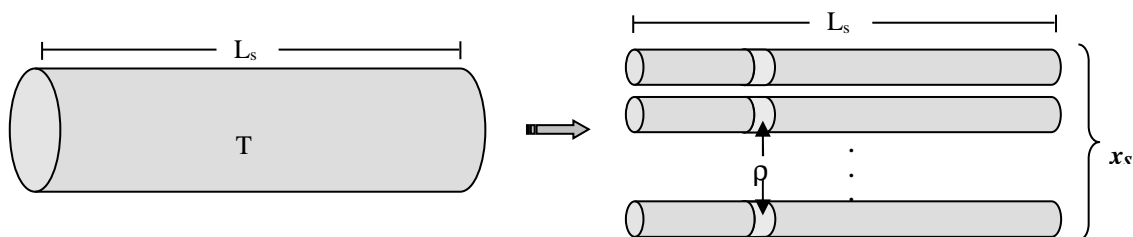


Figura 1: Um jumbo de gramatura k discretizado em um número de bobinas-mestre.

Para descrever o modelo matemático consideramos a seguinte notação e os seguintes dados.

Índices:

- $t = 1, \dots, T$: número de períodos no horizonte de planejamento;
- $k = 1, \dots, K$: número de gramaturas;
- $m = 1, \dots, M$: número de máquinas (máquina m produz bobinas-mestre de largura L_m);
- $j = 1, \dots, N_m$: número de padrões de corte para as bobinas-mestre do tipo m ;
- $i = 1, \dots, Nf$: número de itens demandados;
- $\{1, \dots, Nf\} = S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(K)$, em que $S(k) = \{i \text{ tal que o item } i \text{ tem gramatura } k\}$.

Parâmetros:

- c_{kmt} : custo de produção da bobina-mestre de gramatura k na máquina m no período t ;
- h_{kt} : custo/ton de estocar bobinas-mestre de gramatura k no período t ;
- s_{kmt} : custo de preparação da máquina m para produzir bobina-mestre de gram. k no período t ;
- cp_{kt} : custo/cm de perda de papel de gramatura k durante o processo de corte, no período t ;
- σ_{it} : custo/ton de estocar itens finais do tipo i no período t ;
- C_{mt} : capacidade (ton) da máquina m no período t ;
- \mathbf{d}_{kt} : vetor da demanda de itens finais de gramatura k no período t ;
- ρ_k : peso específico da bobina-mestre de gramatura k ;
- $\boldsymbol{\eta}_k$: vetor de pesos dos itens finais de gramatura k (o peso do item final ik é $\eta_{ik} = \rho_k l_i$);
- D_{kt} : demanda (ton) de papel a ser produzido da gramatura k no período t ;
- b_{km} : peso da bobina-mestre de gramatura k produzida na máquina m ($b_{km} = L_m \rho_k$);
- f_{km} : peso do papel desperdiçado na preparação da máquina m para produzir bobina de gramatura k ;
- \mathbf{a}_{jm} : vetor associado ao padrão de corte j para a bobina-mestre de largura L_m . Sua dimensão é $|S(k)|$ e cada componente a_{ijm} representa o número de itens do tipo i , $i \in S(k)$, cortados pelo padrão j da bobina-mestre de largura L_m ;
- p_{jm} : perda de papel (cm) no padrão de corte j usado na bobina-mestre de largura L_m ;
- Q : número grande.

Variáveis de decisão:

- x_{kmt} : número de bobinas-mestre de gramatura k , produzidas na máquina m no período t ;
- w_{kmt} : estoque de bobinas-mestre de gramatura k , máquina m estocadas no fim do período t ;
- z_{kmt} : indicam a produção ou não da bobina-mestre gramatura k na máquina m no período t ;
- y_{kmt}^j : número de bobinas-mestre de gramatura k produzida na máquina m no período t , cortadas usando o padrão de corte j ;

\mathbf{e}_{kt} : vetor de itens finais de gramatura k estocados no final do período t . Sua dimensão é $|S(k)|$ e cada componente e_{ikt} representa o número de itens finais i , $i \in S(k)$, em estoque no final do período t .

Um modelo para o problema de corte integrado à programação da produção, o qual chamaremos de **LCGG-Lote Corte Gilmore Gomory**, é proposto:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (c_{kmt} x_{kmt} + h_{kt} b_{km} w_{kmt} + s_{kmt} z_{kmt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K cp_{kt} F(k, t) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S(k)} \sigma_{it} \eta_{ik} e_{ikt} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{m=1}^M (b_{km} x_{kmt} + b_{km} w_{k,m,t-1} - b_{km} w_{kmt}) = D_{kt}, \quad k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^K (b_{km} x_{kmt} + f_{km} z_{kmt}) \leq C_{mt}, \quad m = 1, \dots, T; t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$x_{kmt} \leq Q \cdot z_{kmt}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, T; t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{a}_{jm} y_{kmt}^j + \mathbf{e}_{k,t-1} - \mathbf{e}_{kt} = \mathbf{d}_{kt}, \quad k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{N_m} y_{kmt}^j = x_{kmt} + w_{k,m,t-1} - w_{kmt}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, T; t = 1, \dots, T \quad (6)$$

$$w_{km0} = 0, \mathbf{e}_{k0} = 0, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M \quad (7)$$

$$x_{kmt} \geq 0, w_{kmt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (8)$$

$$z_{kmt} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (9)$$

$$y_{kmt}^j \geq 0 \text{ e inteiros}, \mathbf{e}_{kt} \geq 0, \quad j = 1, \dots, N_m; \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (10)$$

O parâmetro D_{kt} não é um dado do problema, pois depende da perda que ocorre durante o processo de corte. Por definição, ele deve ser $D_{kt} = \sum_{i \in S(k)} \eta_{ik} d_{ikt} + \text{perda}$. Por outro lado, o parâmetro D_{kt} pode ser expresso em termos das variáveis que determinam o número de bobinas mestre do tipo k que deve ser cortada no período t , isto é, $D_{kt} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} b_{km} y_{kmt}^j$.

As restrições de balanceamento de estoque (2) descrevem que a quantidade total de papel produzido (ton) de cada gramatura em cada período, mais o estoque do período anterior, devem atender a demanda mais o estoque para o próximo período. As restrições (3) respeitam as capacidades das máquinas em qualquer período. Observe que as variáveis x_{kmt} e w_{kmt} estão multiplicadas por $b_{km} = L_m \rho_k$, pois a demanda de papel é dada em peso. Nas restrições (4), temos $z_{kmt} = 1$ no caso de $x_{kmt} > 0$. Se $x_{kmt} = 0$, então $z_{kmt} = 0$. Em (5) temos as equações de balanceamento de estoque de itens. Note que $\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} \mathbf{a}_{jm} y_{kmt}^j$ fornece um vetor com o total de itens de cada tipo cortados no período t . As restrições (6) limitam o número de bobinas-mestre

cortadas àquelas que foram produzidas anteriormente. São estas as restrições de integração que envolvem decisões relativas à produção e ao corte de jumbos.

3.2. Modelo integrado usando a abordagem de Kantorovich (LCKT)

Kantorovich (1960) introduziu uma formulação matemática para o problema de corte de estoque, supondo apenas um tipo de objeto em estoque de largura L , com o objetivo de minimizar o número de objetos (bobinas no caso específico da indústria de papel) cortados para atender a uma demanda. O modelo integrado proposto em Poltroniere et al. (2008), usando a abordagem de Kantorovich é apresentado a seguir.

Além da notação, das variáveis de decisão e dos dados utilizados na seção 3.1, para a formulação usando a abordagem de Kantorovich, considere NB_{kmt} um limitante superior conhecido para o número de bobinas disponíveis de gramatura k produzidas na máquina m no período t . Considere também as variáveis binárias Cut_{kmt}^j , que indicam se a bobina j , $j = 1, \dots, NB_{kmt}$, de gramatura k produzida na máquina m no período t , é ou não usada no corte, e y_{ikmt}^j , que representa o número de vezes que o item i é cortado na bobina j .

O Modelo LCKT-Lote Corte Kantorovich é dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (c_{kmt} x_{kmt} + h_{kt} b_{km} w_{kmt} + s_{kmt} z_{kmt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K c p_{kt} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{NB_{kmt}} \left(L_m Cut_{kmt}^j - \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{NB_{kmt}} \sum_{i=1}^{Nf} l_i y_{ikmt}^j \right) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S(k)} \sigma_{it} \eta_{ik} e_{ikt} \quad (11)$$

sujeito a: Conjunto de restrições (2) - (4),

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{NB_{kmt}} y_{ikmt}^j + e_{i,k,t-1} - e_{ikt} = d_{ikt}, \quad i = 1, \dots, Nf; k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T; \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{Nf} y_{ikmt}^j \leq L_m Cut_{kmt}^j, \quad j = 1, \dots, NB_{kmt}; k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{NB_{kmt}} Cut_{kmt}^j \leq x_{kmt} + w_{k,m,t-1} - w_{kmt} \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; \quad (14)$$

$$Cut_{kmt}^j \in \{0, 1\}, e_{ikt} \geq 0, \quad j = 1, \dots, NB_{kmt}; \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; \quad (15)$$

$$y_{ikmt}^j \geq 0 \text{ e inteiros}, i = 1, \dots, Nf; j = 1, \dots, NB_{kmt}; \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; \quad (16)$$

Conjunto de restrições (7) - (9).

3.3. Modelo integrado usando a abordagem de Valério de Carvalho (LCVC)

Valério de Carvalho (1999) propôs uma formulação alternativa para o problema de corte, considerando objetos idênticos em estoque. Trata-se de um problema de fluxo mínimo com restrições adicionais impondo a satisfação da demanda. Segundo o autor, o modelo linear, obtido pela relaxação das variáveis de integralidade, é equivalente ao modelo de Gilmore e Gomory (1961) e, portanto, os limitantes inferiores em ambos os casos são iguais. A extensão desse modelo, considerando-se vários tipos de objetos em estoque é apresentada em Valério (2002), cuja abordagem utilizamos no problema integrado de Poltroniere et al. (2008), como segue.

Além da notação das variáveis de decisão e dos dados utilizados na seção 3.1, considere L_{\max} a largura da maior bobina em estoque, o conjunto de vértices $V = \{0, 1, \dots, L_{\max}\}$ e o conjunto de arcos $A = \{(d, e) : 0 \leq d < e \leq L_{\max} \text{ e } e - d = l_i \text{ para cada } 1 \leq i \leq Nf\}$, significando que

existe um arco orientado entre dois vértices se há um item do tamanho correspondente. Considere também arcos extras entre $(d, d+1)$, $d = 0, 1, \dots, L_{\max} - 1$ relativos às perdas no processo de corte das bobinas. O número de variáveis é polinomial, dado em função da largura das bobinas e do número de itens, e é da ordem $O(Nf \cdot L_{\max})$. Observa-se que foram implementados alguns dos critérios de redução propostos em Valério de Carvalho (1999, 2002).

Então, determinar um padrão de corte válido para a bobina de largura L_m é modelado como o problema de determinar um caminho entre os vértices 0 e L_m no grafo $G = (V, A)$. Os arcos que formam um caminho definem um padrão de corte e o comprimento dos arcos que constituem o caminho definem os tamanhos dos itens a serem cortados. Seja y_{kijt} a variável de decisão que representa o número de itens de largura $j - i$ cortados no padrão de corte.

O Modelo LCVC-Lote Corte Valério de Carvalho é dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (c_{kmt} x_{kmt} + h_{kt} b_{km} w_{kmt} + s_{kmt} z_{kmt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K cp_{kt} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{L_{\max}} \left(L_m Fl_{kmt} - \sum_{i=1}^{Nf} \sum_{j=1}^{L_{\max}} \sum_{(j, j+l_i) \in A} l_i y_{k, j, j+l_i, t} \right) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S(k)} \sigma_{it} \eta_{ik} e_{ikt} \quad (17)$$

sujeito a: Conjunto de restrições (2) - (4),

$$- \sum_{(i, j) \in A} y_{kijt} + \sum_{(j, o) \in A} y_{kjot} = \begin{cases} \sum_{m=1}^M Fl_{kmt}, & \text{se } j = 0, \\ -Fl_{kmt}, & \text{se } j = L_m, m = 1, \dots, M, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, K; \\ t = 1, \dots, T; \end{matrix} \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{L_{\max}} \sum_{(j, j+l_i) \in A} y_{k, j, j+l_i, t} + e_{i, k, t-1} - e_{ikt} = d_{ikt}, \quad i = 1, \dots, Nf; k = 1, \dots, K; \quad t = 1, \dots, T; \quad (19)$$

$$Fl_{kmt} = x_{kmt} + w_{k, m, t-1} - w_{kmt}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; \quad t = 1, \dots, T; \quad (20)$$

$$y_{kijt} \geq 0, e_{ikt} \geq 0 \text{ e inteiros,} \quad (i, j) \in A; k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; \quad t = 1, \dots, T \quad (21)$$

Conjunto de restrições (7) - (9).

4. Métodos de solução para o problema integrado propostos por Poltroniere et al. (2008)

Para resolver o problema integrado (1)-(10), foram propostos dois métodos, denominados heurísticas Lote/Corte e Corte/Lote, baseadas na relaxação lagrangiana das restrições de integração (6) que são adicionadas à função objetivo (1), ponderadas pelas variáveis duais γ_{kmt} . Assim, o problema (1)-(10) é decomposto em dois subproblemas: dimensionamento de lotes (PDL) e corte de estoque (PCE), que são abordados separadamente e iterativamente, já que a solução exata é impossível de se obter na prática, por várias razões. O PDL é capacitado, em um ambiente com máquinas paralelas distintas, que é NP-completo (Maes et al., 1991). As restrições do PCE possuem dois fatores que tornam essa formulação muito difícil: a condição de integralidade das variáveis y_{kmt}^j e o grande número de variáveis (uma variável para cada padrão de corte). Além disso, na prática, os dados contêm imprecisões, que podem ser atenuadas usando estratégias como horizonte rolante e abordagens estocásticas.

Para resolver o PDL definido pelas restrições (2)-(4), (8) e (9), foi realizada uma adaptação do método proposto por Toledo (1998). A solução obtida supre o PCE com os jumbos a serem cortados. O PCE multiperíodo (restrições (5) acopladas por causa do estoque de itens finais e_{ikt}) é composto por K subproblemas independentes, um para cada gramatura. Esses K

subproblemas foram resolvidos num horizonte dividido em períodos, usando método simplex com geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961, 1963) e considerando a condição de integralidade relaxada. Para possibilitar a antecipação de itens durante o processo de corte, foi desenvolvida uma abordagem heurística, permitindo novas combinações de itens.

4.1. Breve descrição das heurísticas

A heurística Lote/Corte resolve, inicialmente, o PDL, cuja função objetivo é minimizar os custos de produção e estoque e os custos de preparação, obtido de (1) considerando-se apenas os termos que envolvem as decisões de produção e estoque das bobinas-mestre, sujeito às restrições (2)-(4), (8) e (9). A solução obtida pelo PDL fornece o estoque de bobinas-mestre para o PCE multiperíodo, que é resolvido com o objetivo de minimizar os custos com a perda de papel e de estoque de itens finais sujeito à (5), (6) e (10). É realizado um número máximo de iterações definido previamente. Na primeira iteração, assume-se $\gamma_{kmt} = 0$, e nas demais iterações γ_{kmt} são dadas pelas variáveis duais associadas a (6), obtida pelo PCE na iteração anterior. Note que a produção de jumbos no dimensionamento de lotes deve fornecer a quantidade de papel de gramatura k no período t suficiente para atender a demanda de itens no estágio de corte, incluindo uma porcentagem adicional para cobrir eventuais perdas. Como a perda de papel é desconhecida, considera-se $D_{kt} = (1 + \theta) \sum_{i \in S(k)} \eta_{ik} d_{ikt}$, sendo θ uma estimativa da perda no processo de corte.

A heurística Corte/Lote resolve primeiramente o problema de corte baseado na demanda de itens, mas com um número livre de jumbos supostamente disponíveis. Portanto, a solução do problema de corte produz o número necessário de bobinas-mestre para atender a demanda de qualquer gramatura. Então, o problema de dimensionamento de lotes, que considera custos de preparação, capacidades de máquina, custos de produção e preparação, etc., é resolvido, produzindo uma nova programação da produção, que será entrada para o próximo problema de corte de estoque, e assim por diante. Um número limitado de iterações desse processo é realizado e a melhor solução obtida é considerada.

5. Resultados computacionais

Nesta seção, inicialmente, apresentamos detalhes sobre os exemplares utilizados. Posteriormente, apresentamos os resultados obtidos pelas heurísticas de Poltroniere et al. (2008) descritas na Seção 4, bem como de algumas heurísticas baseadas na resolução, com o pacote Ampl/Cplex 12.6, dos modelos apresentados na Seção 3. Por fim, na Seção 5.3, versões relaxadas dos modelos foram resolvidas com o objetivo de obter limitantes inferiores para o problema. Para os testes computacionais foi utilizado computador com processador Intel (R) Core (TM) Core i7-4770K, com 3,5 GHz 3,5 GHz e 32 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows 8.1.

5.1 Geração de dados

Para uma avaliação inicial do comportamento das heurísticas, foram utilizados 9 exemplares retirados da Classe 1 de exemplos gerados em Poltroniere et al. (2008). Tais exemplares têm as seguintes características: $Nf = 5$ tipos de itens demandados; $K = 2$ gramaturas; $T = 8$ períodos; $M = 2$ máquinas, sendo que a máquina 1 produz jumbos de largura $L_1 = 540$ cm, e a máquina 2 jumbos de largura $L_2 = 460$ cm; peso específico $\rho_k = 2$ kg/cm.

Para cada exemplar, tentando simular observações com dados reais, os parâmetros, definidos na seção 3.1, foram gerados como descrito a seguir:

- $c_{kmt} \in [0,015; 0,025] \cdot b_{km}$, sendo $b_{km} = L_m \rho_k$;
- $s_{kmt} \in [0,03; 0,05] \cdot c_{kmt}$; $h_{kt} \in [0,0000075; 0,0000125]$; $f_{km} \in [0,01; 0,05] \cdot b_{km}$;
- $cp_{kt} = \frac{\sum_{m=1}^M c_{kmt}}{M} \cdot 10$; $\sigma_{ikt} = 0,5 \cdot h_{kt}$, $i \in S(k)$;
- $l_i \in [0,1; 0,3] \cdot \frac{\sum_{m=1}^M L_m}{M}$; $d_{ikt} \in [0; 300]$. Se $d_{ikt} \leq 50$ então faça $d_{ikt} = 0$.

As capacidades das máquinas de produção foram geradas como segue:

$$C_{mt} = \frac{b_{km}}{\sum_{m=1}^M b_{km}} \cdot Cap \quad \text{sendo} \quad Cap = \phi \cdot \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \left(\frac{D_{kt}}{M} + f_{km} \right)}{MT}$$

A constante ϕ tem a função de manter a utilização da capacidade das máquinas em torno de um percentual desejado.

5.2 Soluções heurísticas

Inicialmente, apresentam-se na Tabela 1 os resultados obtidos pelas heurísticas desenvolvidas em Poltroniere et al. (2008) e descritas de forma resumida na Seção 4. O PCE multiperíodo foi resolvido de duas maneiras. A primeira não considera as variáveis de estoque de itens, resolvendo-se KT subproblemas de corte independentes (colunas LC_sem e CL_sem). A segunda maneira, para cada gramatura, resolve-se o PCE multiperíodo utilizando a Heurística de Antecipação de Itens proposta pelos autores, permitindo o corte antecipado de itens, baseado nas variáveis duais associadas às restrições de balanceamento de estoque de itens (colunas LC_com e CL_com).

Na coluna F.O. têm-se o valor da função objetivo e, na coluna Folga tem-se a porcentagem em que a demanda de papel foi aumentada em cada uma das heurísticas. Esse aumento é necessário para que seja possível encontrar soluções factíveis no processo de corte, ou seja, para que se tenham bobinas suficientes para o corte de todos os itens demandados. Observa-se que o tempo computacional das heurísticas é relativamente baixo, sendo que o maior deles foi de 35,23 segundos ao aplicar a heurística Lote/Corte, com antecipação de itens no corte (LC_com), no exemplo 5.

Tabela 1: Resultados das heurísticas de Poltroniere et al. (2008).

| Exemplos | LC_sem | | LC_com | | CL_sem | | CL_com | |
|----------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| | F.O. | Folga | F.O. | Folga | F.O. | Folga | F.O. | Folga |
| 1 | 41498,85 | 2% | 40229,96 | 2% | ----- | --- | ----- | --- |
| 2 | 58757,62 | 4% | 59111,02 | 3% | 58863,03 | 2% | 59370,77 | 2% |
| 3 | 98120,01 | 10% | 91043,04 | 10% | 93956,66 | 9% | 97838,09 | 9% |
| 4 | 42820,84 | 3% | 42249,53 | 3% | ----- | --- | ----- | --- |
| 5 | 72946,23 | 4% | 73276,28 | 5% | 70450,81 | 2% | 70598,97 | 2% |
| 6 | 83910,93 | 10% | 85607,01 | 10% | 76887,00 | 4% | 79970,35 | 4% |
| 7 | 51175,32 | 2% | ----- | --- | 50887,77 | 1% | ----- | --- |
| 8 | 77625,49 | 10% | 76590,87 | 10% | 71018,96 | 5% | 74517,03 | 5% |
| 9 | 44846,33 | 1% | ----- | --- | 44707,14 | 1% | ----- | --- |

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos com a resolução dos modelos utilizando o pacote computacional Cplex 12.6. Em todos os exemplos, a demanda das bobinas foi aumentada em 10%. Para a resolução dos modelos LCKT e LCVC considera-se os modelos originais com variáveis inteiras, e o tempo computacional foi limitado em 600 segundos na tentativa de obter uma solução exata. Para o modelo LCKT foi considerado limite superior para o

número de objetos $NB_{kmt} = \sum_{i=t}^T \frac{D_{ki}}{b_{km}}$.

No modelo LCGG, primeiramente, é resolvida a relaxação linear de forma ótima e, posteriormente, considerando-se somente as colunas da solução ótima da relaxação linear, é dado um limite de 600 segundos para que o pacote encontre uma solução inteira.

Tabela 2: Soluções obtidas com a resolução dos modelos.

| Exemplos | LCGG | | LCKT | | LCVC | |
|----------|----------|-----------|----------|-----------|-------|-----------|
| | F.O. | Tempo (s) | F.O. | Tempo (s) | F.O. | Tempo (s) |
| 1 | 41249,44 | ~5 | 41503,16 | 600 | ----- | 600 |
| 2 | 57230,16 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 3 | 72665,34 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 4 | 41444,21 | ~5 | 53925,88 | 600 | ----- | 600 |
| 5 | 68513,99 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 6 | 74835,47 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 7 | 50663,90 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 8 | 64682,27 | ~5 | ----- | 600 | ----- | 600 |
| 9 | 45544,71 | ~5 | 52557,86 | 600 | ----- | 600 |

----- não foi encontrada solução factível no limite de tempo dado

~ aproximadamente

Destacam-se, na Tabela 2, os resultados obtidos ao se resolver o modelo LCGG, pois, num tempo computacional aproximado de 5 segundos, encontram-se soluções muitas vezes melhores do que as encontradas pelas heurísticas desenvolvidas em Poltroniere et al. (2008). Deve-se observar que, com exceção dos casos em que a folga das heurísticas da Tabela 1 é de 10%, os resultados não são totalmente comparáveis, pois, nos modelos apresentados na Tabela 2 a folga foi sempre de 10%. O modelo LCKT não consegue provar a otimalidade para nenhum exemplo, mas encontra soluções factíveis para 3 exemplos dentro do tempo disponível. Já o modelo LCVC não consegue encontrar soluções factíveis em 600 segundos.

5.3 Relaxações

Versões relaxadas dos modelos apresentados na Seção 3 também foram resolvidas com o objetivo de prover limitantes inferiores para os exemplos e conseqüentemente ter um parâmetro de teste para a qualidade das heurísticas.

Na Tabela 3, além dos padrões de corte que já estavam relaxados nas tabelas apresentadas anteriormente, relaxamos também as variáveis binárias de preparação de máquina que passaram a serem consideradas contínuas entre 0 e 1, bem como, as variáveis relativas ao problema da mochila, que representa a quantidade de cada item presente em cada padrão de corte. Dentre os limitantes inferiores obtidos pelos modelos, destacam-se aqueles obtidos pelo modelo LCVC. Além disso, vale destacar que esses limitantes não estão muito distantes das soluções heurísticas apresentadas nas Tabelas 1 e 2, o que permite observar a qualidade das heurísticas. O tempo computacional para o modelo LCGG é muito próximo do apresentado na Tabela 2, pois a maior parte do tempo é gasta no processo de geração de colunas. O processo de arredondamento (da Tabela 2) leva um tempo insignificante devido ao número restrito de colunas consideradas.

Tabela 3: Solução da relaxação linear (inclusive das variáveis relativas ao problema da mochila).

| Exemplos | LCGG | | LCKT | | LCVC | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | F.O. | Tempo(s) | F.O. | Tempo(s) | F.O. | Tempo(s) |
| 1 | 40935,14 | ~5 | 40932,74 | 2,40 | 41101,71 | 0,40 |
| 2 | 55832,39 | ~5 | 55839,77 | 3,46 | 56898,30 | 0,25 |
| 3 | 67449,10 | ~5 | 67542,25 | 3,82 | 72309,65 | 0,07 |
| 4 | 40468,85 | ~5 | 40521,83 | 3,00 | 41154,01 | 0,23 |
| 5 | 65520,40 | ~5 | 65560,55 | 4,78 | 68030,57 | 0,10 |
| 6 | 70895,63 | ~5 | 70903,18 | 3,96 | 73753,25 | 0,20 |
| 7 | 49873,90 | ~5 | 49896,13 | 4,03 | 50486,10 | 0,28 |
| 8 | 51949,63 | ~5 | 52068,64 | 3,70 | 62089,39 | 0,14 |
| 9 | 44614,82 | ~5 | 44621,54 | 2,85 | 45416,15 | 0,42 |

Com o intuito de obter limitantes inferiores ainda mais apertados, na Tabela 4, têm-se os resultados dos modelos LCKT e LCVC ao tentar resolver o problema com as variáveis de preparação binárias e as restantes contínuas (inclusive as variáveis relativas ao problema da mochila). Observa-se que neste caso não faz sentido a aplicação do modelo LCGG, pois, seria uma solução heurística já que nem todas as colunas estariam disponíveis no processo de arredondamento. Além disso, só é possível garantir que se tem um limitante inferior, quando os modelos LCKT e LCVC resolvem o problema de forma ótima, o que ocorreu para todas as instâncias, num tempo computacional bastante baixo. Novamente destacam-se os limitantes obtidos pelo modelo LCVC.

Tabela 4: Solução do problema com variáveis de preparação binárias e as demais contínuas.

| Exemplos | LCKT | | LCVC | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| | F.O. | Tempo(s) | F.O. | Tempo(s) |
| 1 | 40955,52 | 0,48 | 41122,45 | 1,82 |
| 2 | 55856,93 | 0,59 | 56918,26 | 0,71 |
| 3 | 67558,59 | 0,89 | 72335,69 | 0,15 |
| 4 | 40533,42 | 0,73 | 41164,16 | 1,17 |
| 5 | 65581,65 | 0,92 | 68051,03 | 0,65 |
| 6 | 70919,20 | 0,87 | 73772,70 | 0,73 |
| 7 | 49909,11 | 0,73 | 50499,36 | 1,39 |
| 8 | 52082,86 | 0,68 | 62110,40 | 0,62 |
| 9 | 44638,82 | 0,59 | 45435,63 | 2,37 |

6. Conclusões e perspectivas futuras

Este trabalho considerou o modelo para o problema integrado corte de estoque e dimensionamento de lotes proposto por Poltroniere et al. (2008). Três modelagens matemáticas foram implementadas e resolvidas heurísticamente usando o pacote Ampl/Cplex 12.6. Versões relaxadas dos modelos foram, também, resolvidas com o objetivo de obter limitantes inferiores para a solução do problema integrado. As soluções heurísticas obtidas usando o pacote computacional Cplex 12.6 mostraram-se satisfatórias, sendo que, para alguns exemplos, os resultados obtidos foram melhores que os obtidos por Poltroniere et al. (2008). Os resultados apresentados mostram que as relaxações consideradas forneceram bons limitantes inferiores para o problema integrado.

Como propostas futuras, pretende-se desenvolver métodos de solução para auxiliar na resolução dos modelos matemáticos de forma exata e/ou heurística via pacote de otimização. Os testes computacionais deverão ser realizados para um conjunto maior de dados, considerando problemas maiores. Alguns testes iniciais realizados em Poldi e Araujo (2014) mostram que o problema de corte de estoque multiperíodo, que aparece no contexto do problema integrado, pode ser bem resolvido quando o modelo de fluxo em arcos é utilizado. Assim, podemos utilizar estes modelos matemáticos de forma conjunta com as heurísticas propostas em Poltroniere et al. (2008).

Referências bibliográficas

- Correia, M.H., Oliveira, J.F., Ferreira, J.S.,** *Reel and sheet cutting at a paper mill.* Computers & Operations Research 31, 1223-1243, 2004.
- Dyckhoff, H.,** *A new linear programming approach to the cutting stock problem.* Operations Research 29(6), 1092-1104, 1981.
- Farley, A.A.,** *Mathematical Programming Models for Cutting-Stock Problems in the Clothing Industry.* Operational Research Society 1, 41-53, 1988.
- Gilmore, P.C., Gomory, R.E.,** *A linear programming approach to the cutting stock problem.* Operations Research 9, 848-859, 1961.

- Gilmore, P.C., Gomory, R.E.,** *A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II.* Operations Research 11, 863-888, 1963.
- Gilmore, P.C., Gomory, R.E.,** *Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions.* Operations Research 13, 94-120, 1965.
- Gramani, M.C.N., França, P.M.,** *The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes.* European Journal of Operational Research 174, 509-521, 2006.
- Gramani, M.C.N., França, P.M., Arenales, M.N.,** *A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem.* International Journal of Production Economics 119, 219-227, 2009.
- Gramani, M.C.N., França, P.M., Arenales, M.N.,** *A linear optimization approach to the combined production planning model.* Journal of the Franklin Institute 348(7), 1523-1536, 2010.
- Ghidini, C. T. L. S.** *Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque.* Tese de doutorado. ICMC-USP, São Carlos-SP, 2008.
- Kallrath, J., Rebennack, S., Kallrath, J., Kusche, R.,** *Solving Real-World Cutting Stock-Problems in the Paper Industry.* Mathematical Approaches, Experience and Challenges, European Journal of Operational Research, 2014, (doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2014.03.027>)
- Kantorovich, L.,** *Mathematical methods of organising and planning production* (traduzido a partir de um artigo russo, datado de 1939), Management Science 6, 366-422, 1960.
- Maes J., McClain, J.O., Van Wassenhove, L.N.,** *Multilevel capacitated lotsizing complexity and LP based heuristic.* European Journal of Operational Research 53, 131-148, 1991.
- Menon S., Schrage, L.,** *Order allocation for stock cutting in the paper industry.* Operations Research 50, 324-332, 2002.
- Poldi, K.C., Araújo, S. A.** Formulações para o problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. Anais do CNMAC 2014.
- Poltroniere, S.C., Poldi, K.C., Toledo, F.M.B., Arenales, M.N.,** *Coupling Cutting Stock and Lot Sizing Problems in the Paper Industry.* Annals of Operations Research 157, 91-104, 2008.
- Respício, A., Captivo, M.E.,** *Integrating the cutting stock problem in capacity planning.* PhD thesis. Department of Informatics and Centre of Operational Research. University of Lisbon/Portugal, 2002.
- Santos, S.G., De Araujo, S.A., Rangel, S.,** *Integrated Cutting Machine Programming and Lot Sizing in Furniture Industry.* Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento 3, 249-266, 2011.
- Silva, E., Alvelos, F., Valério de Carvalho, J.M.,** *An integer programming model for two-and three-estage two-dimensional cutting stock problems.* European Journal of Operational Research 205(3), 699-708, 2010.
- Silva, E., Alvelos, F., Valério de Carvalho, J.M.,** *Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems.* Journal of Operational Research Society 65, 108-123, 2014.
- Toledo, F.M.B.,** *Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas.* Tese de Doutorado. DENNIS-UNICAMP, 1998.
- Trigeiro, W.W., Thomas, L.G., McClain, J.O.,** *Capacitated lot sizing with setup times.* Management Science 35(3), 353-366, 1989.
- Valério de Carvalho, J. M.,** *Exact solution of bin packing problem using column generation and branch-and-bound.* Annals of Operations Research 86, 629-659, 1999.
- Valério de Carvalho, J. M.,** *LP models for bin packing and cutting stock problems.* European Journal of Operational Research 141, 253-273, 2002.
- Vanzela, M., Rangel, S., Araujo, S., Carravilla, M.A.,** *Um estudo de problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque para uma fábrica de móveis de pequeno porte.* Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro – RJ, 2012.