UMA ESTRATÉGIA *RELAX-AND-FIX* NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA INTEGRADO DE DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES

Carla Ferreira Andrade Cunha
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Campus Univerdecidade - Unidade I
Av. Dr. Randolfo Borges Júnior, 1250, CEP 38064-200
Uberaba - Minas Gerais - Brasil
carlaacunha@hotmail.com

Deisemara Ferreira
Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba
Rodovia João Leme dos Santos, Km 110 - SP-264 - Bairro do Itinga, CEP 18052-780
Sorocaba - São Paulo - Brasil
deise@usfcar.br

RESUMO

Os problemas de programação da produção que integram sequenciamento e dimensionamento de lotes são NP-difíceis. Na literatura existem vários modelos desta classe para os quais, ainda não há métodos de solução que encontrem soluções ótimas rapidamente. Neste artigo são propostas heurísticas do tipo *Relax and Fix* para resolver um problema desta natureza. Um método híbrido que combina a heurística e o modelo matemático também é testado. Nos experimentos computacionais foram resolvidas instâncias de médio porte baseadas em dados reais. Os testes sugerem que a heurística e o método híbrido são competitivos quando comparados com a solução do modelo resolvido pelo CPLEX. A heurística fornece soluções com *gaps* menores que 1%, em média as soluções são apenas 0,76% piores que a solução CPLEX e tempo de processamento 95,68% melhores.

PALAVRAS-CHAVE. Programação inteira mista, Programação da produção, Heurística *Relax and Fix*.

Área Principal: Otimização Linear.

ABSTRACT

The lot sizing and scheduling problems are NP-hard. In literature there are no efficient methods to solve some of these problems. In the present paper Relax and Fix heuristics are proposed to solve one of these models. A hybrid method combining RF heuristic and mathematical model is tested as well. Computational experiments with large instances based on real data were solved. The heuristic and the hybrid method are competitive when compared with CPLEX solver. The heuristic provides solutions very close to the CPLEX solutions, only 0.76% of the solutions are worse and the processing time is 95.68% better.

KEYWORDS. Mixed integer programming, Production scheduling, *Relax and Fix* heuristic.

Main Area: Linear Optimization.

1. Introdução

A investigação dos problemas integrados de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção tem ganhado importância na literatura de pesquisa operacional, seja pelas aplicações práticas cada vez mais sofisticadas, ou pelo desafio teórico em resolver instâncias de grande porte em tempos computacionais plausíveis. Na literatura científica, existem diversas estratégias para incorporar as decisões de sequenciamento em modelos de dimensionamento de lotes. Em Kimms e Drexl (1997), os autores revisam duas abordagens principais, os modelos do tipo *small bucket* e os *big bucket*. Basicamente, a diferença entre tais abordagens é que, nos modelos *small bucket* apenas um item é produzido por período, enquanto em modelos *big bucket*, permite-se a produção de vários itens por período, mas este é dividido em períodos menores onde é permitida a produção de apenas um item. Em ambos os casos o número de períodos ou sub-períodos pode ser elevado, dependendo da aplicação. Uma alternativa para esta abordagem de modelagem matemática tem sido explorar modelos baseados no problema do Caixeiro Viajante Assimétrico.

Os itens são interpretados como sendo as cidades a serem visitadas. O sequenciamento é, portanto, a rota a ser executada (Menezes et al., 2011; Maldonado et al., 2014). Esta estratégia reduz o número de variáveis e restrições e tem sido aplicada com sucesso na literatura. Uma desvantagens deste tipo de modelagem é que ela depende da utilização de inequações de eliminação de subtours eficientes. Em Ferreira et al. (2012) é apresentada uma comparação entre formulações baseadas na divisão do período e formulações com restrições do problema ATSP. Dois tipos de inequações de eliminação de subtours são testadas MTZ (Miller, Tucker e Zemlim (Lawler et al., 1985)) e DFJ (Dantzig, Fulkerson e Johnson (Lawler et al., 1985)). As primeiras são em número polinomial e são inseridas diretamente no modelo. As inequações DFJ são exponenciais e a forma mais eficiente de utilizá-las é iterativamente. Detecta-se os *subtours* e gera-se as inequações para eliminá-lo. Espera-se que desta forma o método convirja sem ser necessário incluir todas as inequações. No trabalho de Ferreira et al. (2012) as inequações MTZ (modelo F1) apresentaram os melhores resultados. O modelo também foi comparado à uma heurística de solução desenvolvida a partir do algoritmo de inserção das inequações DFJ (algoritmo PS). Nela, a cada iteração, ao se detectar e eliminar *subtour* é feito um passo de factibilização da solução. A vantagem é ter a cada passo a garantia de uma solução factível. Esta estratégia apresenta resultados muito próximos aos resultados do modelo. Porém, para ambas as estratégias não são encontradas as soluções ótimas de todas as instâncias em um tempo limite de 4 horas de processamento.

Em Toledo et al. (2014) é tratado o mesmo problema. Nesse artigo uma estratégia híbrida de Algoritmo Genético e Modelagem Matemática (GAMP) é aplicada. O Algoritmo Genético faz o sequenciamento dos lotes e passa as informações para um modelo linear contínuo que irá determinar os lotes, ou seja, primeiro é feita a minimização do sequenciamento dos lotes e em seguida o dimensionamento. Esta estratégia foi comparada as estratégias F1 e PS. Foram utilizadas 15 instâncias da literatura. A estratégia GAMP foi melhor em 9 instâncias em relação ao modelo F1 e em apenas 7 em relação a estratégia PS. Embora a estratégia GAMP tenha sido um pouco melhor em relação ao modelo F1 resolvido via método exato *Cut and Branch* ela é ruim em relação a estratégia PS. Isto ocorre pois, as instâncias I1-I15 possuem os custos de troca muito maiores que qualquer outro custo, ou seja, o gargalo é o sequenciamento. Como a estratégia GAMP minimiza o sequenciamento em uma primeira etapa, ela consegue buscar soluções melhores em termos da sequência, enquanto o modelo matemático faz a busca em todo o espaço. Comparando a estratégia GAMP com o método PS, que de certa forma também prioriza a minimização do sequenciamento, ela não tem um bom desempenho. Isto sugere que a estratégia GAMP não teve um bom desempenho geral. Além disto, em cenários onde os custos de troca são reduzidos o modelo F1 se compara a estratégia PS conseguindo soluções melhores em 50% dos casos. Porém, ainda não são encontradas as soluções ótimas para todas as instâncias testadas.

James e Almada-Lobo (2011) tratam um problema mais geral dimensionamento e sequenciamento de lotes multi-máquinas capacitado do que o tratado nos trabalhos anteriores. Eles propõem estratégias do tipo *Relax and Fix* e conseguem bons resultados para instâncias de grande porte.

Apesar da dificuldade de solução destes modelos, a integração deste problema com outras decisões práticas, por exemplo, distribuição e roteamento de veículos, vem crescendo na literatura. No trabalho de Schmid et al. (2013), por exemplo, os autores apresentam uma discussão de três importantes integrações, dentre elas os modelos de dimensionamento e sequenciamento de lotes da produção com o roteamento de veículo.

Na tentativa de integrar decisões práticas - em geral, advindas de problemas NP-difíceis - os modelos matemáticos resultantes tornam-se ainda mais intratáveis. Mesmo com a recente sofisticação de métodos de solução (Maniezzo et al., 2010), no melhor do conhecimento dos autores, não há nenhum método eficiente para resolver modelos gerais de dimensionamento de lotes e sequenciamento da produção.

Neste sentido o presente artigo propõe uma heurística do tipo *Relax and Fix*, e uma estratégia híbrida que combina heurística do tipo *Relax and Fix* com um método *Cut and Branch* do CPLEX, para solução de um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de médio porte baseado no modelo F1. Na próxima seção são descritos o problema a ser resolvido e a estratégia proposta. Na seção 3 são descritos e discutidos os experimentos computacionais. E por fim, na seção 4 são apresentadas as conclusões finais.

2. Modelo matemático e abordagens de solução

Conforme discutido nas seções anteriores existem vários trabalhos na literatura que tratam o problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção. Neste artigo será estudado o seguinte problema: dado um conjunto de J itens com demandas (d_{jt}) referentes a um horizonte de planejamento de T períodos, deve-se decidir para cada uma das M máquinas quanto (x_{jt}), quando e em que sequência (z_{mijt}) produzir e/ou estocar (I^+_{jt})/atrasar (I^-_{jt}) de cada item j em cada período t a fim de atender as demandas com o menor custo total possível. Sendo que, o custo total é formado pelos custos de estoque (h_{jt}), atraso (g_{jt}) e troca de itens nas máquinas (c_{ij}). Os custos de troca c_{ij} são dependentes da sequência. As capacidades (K_{mt}) das máquinas nos períodos são limitadas. O desempenho de cada máquina na produção de cada item (a_{jm}) e o *mix* de itens produzidos em cada máquina (α_m) variam. Além da capacidade das linhas, há limites mínimos (LB_{mj}) e máximos (UB_{mj}) de produção por lote de item j, ou seja, podem ocorrer dois lotes de tamanhos diferentes de um mesmo item. Os tempos de troca (b_{ij}) são dependentes da sequência de produção dos itens e, mesmo para lotes sequenciais de mesmo item é necessário preparar a máquina. O *set up* não é *carryover*, mas o preparo do primeiro item no início do período depende do último item preparado no período anterior. Os estoques e atrasos do início do horizonte de planejamento são conhecidos I^+_{j0}, I^-_{j0}. Bem como o último preparo da máquina no horizonte de planejamento anterior y_{mj0}.

Para a descrição do modelo considere a seguinte notação: o conjunto λ_j refere-se às máquinas que podem produzir o item j, enquanto α_m é o conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina m. O parâmetro $M_{mjt} = \frac{K^{II}_{mt}}{UB_{mj} \times a^{II}_{mj}} + 1$ é o limite superior para número de preparos. Além das variáveis de produção, estoque, atraso e troca itens (respectivamente x_{jt}, I^+_{jt} I^-_{jt}, z_{mijt}) citadas anteriormente, considere $\eta_{mjt} = 1$ se a máquina m está configurada para o item j no começo do período t e 0 caso contrário; ξ_{mjt} é número de vezes que a máquina m está configurada para o item j no período t; $z_{mijt} = 1$ se há troca na máquina m do item i para j, para todo i, $j \in \alpha_m$ no período t; 0 caso contrário; $z_{mjjt} = 0$ para todo $j \in \alpha_m$.

Modelo Formulação Geral: FG

$$\text{Min} \sum_{j\in[J]} \sum_{t\in[T]} (h_j\, I^+_{jt} + g_j\, I^-_{jt}) + \sum_{m\in[M]} \sum_{t\in[T]} \sum_{j\in\alpha_m} c_{jj} \left(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m|i\neq j} z_{mijt} \right)$$

$$+ \sum_{m\in[M]} \sum_{t\in[T]} \sum_{i\in\alpha_m} \sum_{j\in\alpha_m|i\neq j} c_{ij} z_{mijt} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$I^+_{j(t-1)} + \sum_{m\in[M]} x_{mjt} + I^-_{jt} = I^+_{jt} + I^-_{j(t-1)} + d_{jt} \qquad \forall\, j \in [J], t \in [T] \tag{2}$$

$$\sum_{j\in\alpha_m} a_{mj} x_{mjt} + \sum_{i\in\alpha_m} \sum_{j\in\alpha_m|i\neq j} b_{ij} z_{mijt} + \sum_{j\in\alpha_m} b_{jj} \left(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i\in\alpha_m|i\neq j} z_{mijt} \right) \leq K_{mt}$$

$$\forall\, m \in [M], t \in [T] \tag{3}$$

$$\sum_{j\in\alpha_m} \eta_{mjt} = 1 \qquad \forall\, m \in [M], t \in [T] \tag{4}$$

$$\eta_{mjt} + \sum_{i\in\alpha_m} z_{mijt} = \sum_{i\in\alpha_m} z_{mjit} + \eta_{mj(t+1)} \qquad \forall\, m \in [M], j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{5}$$

$$\xi_{mjt} \leq M_{mjt}(\sum_{i\in\alpha_m} z_{mijt} + \eta_{mjt}) \qquad \forall\, m \in [M], j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{6}$$

$$x_{mjt} \leq UB_{mj}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt}) \qquad \forall\, m \in [M], j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{7}$$

$$x_{mjt} \geq LB_{mj}(\xi_{mjt} - \eta_{mjt}) \qquad \forall\, m \in [M], j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{8}$$

$$\sum_{i\in\alpha_m} z_{mijt} \leq \xi_{mjt} \qquad \forall\, m \in [M], j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{9}$$

$$v_{mit} + 1 \leq v_{mjt} + |\alpha_m|(1 + \eta_{mit} - z_{mijt}) \forall\, t \in [T],\; m \in [M],\; i \in \alpha_m,\; j \in \alpha_m \backslash \{i\} \tag{10}$$

$$\sum_{j\in\alpha_m} z_{mijt} \;\leq\; 1 \qquad \forall\, m \in [M], t \in [T], i \in \alpha_m \tag{11}$$

$$I^+_{jt}, I^-_{jt} \geq 0 \qquad \forall\, j \in [J], t \in [T] \tag{12}$$

$$v_{mjt}, x_{mjt} \geq 0; \eta_{mjt}, z_{mijt} \in \{0,1\}; \xi_{mjt} \in Z^+$$

$$\forall\, m \in [M], i, j \in \alpha_m, t \in [T] \tag{13}$$

A função objetivo (1) minimiza os custos de estoque, atraso e troca entre itens. O conjunto de restrições (2) faz o balanceamento de estoques, enquanto as restrições (3) são restrições de capacidade. As restrições (4) garantem que sempre as máquinas estão configuradas para produzir um e, apenas um, item no início de cada período, mesmo que não haja produção. Elas complementam as restrições de balanceamento de fluxo (5). As restrições (6) asseguram que só pode haver o preparo do item j se ele está configurado para ser produzido no início do período ($\eta_{mjt} = 1$) ou se houve a troca de algum item i para o item j ($\sum_{i\in\alpha_m} z_{mijt} = 1$). As restrições (7) e (8) são de *set up* e lote máximo e mínimo, respectivamente. O termo ($\xi_{mjt} - \eta_{mjt}$) conta o número de lotes produzidos, pois é o número de preparos menos a primeira configuração do período. A restrição garante que só pode haver troca de um item i para j se o item j estiver preparado. Esta restrição e a restrição (6) ligam as variáveis de preparo e troca. As restrições (10) fazem o sequenciamento dos itens. O conjunto de restrições (11) garantem que há apenas uma troca de um item i para o item j no período t. Por fim as restrições de domínio das variáveis sãs as restrições (13).

O modelo FG se difere do modelo F1 de Ferreira et al.(2012) pois, não considera restrições de estoque mínimo e também não limita o número de lotes de produção. Estas limitações foram desconsideradas para que o modelo represente uma situação mais geral.

Heurística Relax and Fix (R&F)

Para resolver o modelo (1)-(13), propõe-se utilizar uma heurística do tipo *Relax and Fix* (Wolsey, 1998). Basicamente, tal heurística consiste em particionar o conjunto de variáveis em *n* conjuntos distintos, sendo que o número de conjuntos da partição determinará o número de iterações da heurística; a cada iteração toma-se um conjunto P_n da partição, em que apenas as variáveis desse conjunto serão assumidas como binárias/inteiras, as demais são relaxadas. O problema resultante, ou submodelo, é então resolvido. Se ele for infactível então o processo para, caso contrário as variáveis do conjunto P_n, ou parte delas, dependendo de um critério de fixação pré-definido, são fixadas no valor atual. O processo é repetido para os demais conjuntos. A característica fundamental dessa heurística é a solução de submodelos inteiros mistos menores do que o original a cada iteração. Sua eficiência depende do tamanho dos submodelos, logo está fortemente relacionada ao critério de partição dos conjuntos e de fixação das variáveis.

Neste artigo a partição do conjunto de variáveis é feita por períodos. Para estabelecer o critério de fixação foi observado que, dada a partição por períodos, em uma iteração *k* é comum que a produção seja deslocada para períodos onde as variáveis estão relaxadas. Desta forma, se forem fixadas todas as variáveis deste período *k*, ao final do processo de resolução ocorre ociosidade em período iniciais e atrasos nos últimos períodos. Para evitar esse tipo de solução, foi estabelecido um critério de fixação baseado na produção do período. Se $x_{mjt} > 0$ então fixe η_{mjt}, z_{mijt} e ξ_{mjt} em seu valor atual. Note que, embora o número de lotes de um item *j* seja fixado via fixação da variável ξ_{mjt}, o tamanho do lote não é fixado, assim em iterações (períodos) posteriores ele pode ser redimensionado. Além disso, na iteração seguinte (*k+1*) as variáveis não fixadas na iterações 1 à *k* são mantidas como binárias/inteiras e re-avaliadas para uma possível fixação. Portanto, itens não produzidos em uma iteração *k* poderão ser produzidos em iterações posteriores. O que favorece a produção de estoques ao invés de atrasos. Neste trabalho os período foram percorrido do primeiro ao último.

As heurísticas*Relax and Fix* clássicas que fazem a fixação de todas as variáveis do período também foram testadas. Tanto para o caso *forward* quanto *backward*. Porém, seus resultados não foram promissores e por esta razão os resultados não estão reportados no presente artigo.

Heurística Híbrida (R&F-FG)

Dado que são permitidos atrasos, a heurística RFX irá retornar sempre uma solução inteira factível. Esta solução pode ser inserida como solução inicial em métodos exatos como o método *Cut and Branch* com o intuito de acelerar sua resolução. A segunda estratégia proposta no presente artigo se trata deste tipo de método híbrido. Na primeira etapa a heurística RFX é aplicada e obtém uma solução inteira-factível. Na segunda etapa esta solução é utilizada como solução inicial do método *Cut and Branch* implementado no CPLEX 12.4.

A seguir são apresentados os experimentos computacionais.

3. Experimentos Computacionais

A linguagem de modelagem AMPL (Fourer et al., 2002) foi utilizada para implementação da heurística e para gerar as instâncias do modelo que foram resolvidas pelo *software* de otimização CPLEX versão 12.4 (2012). Os testes computacionais foram realizados em um computador Intel Core I7 (2,93GHz), 4.0 GB RAM.

Após a implementação, a heurística *Relax and Fix* foi aplicada na solução do problema de programação F1 descrito na seção (2.). Devido a semelhança dos modelos foram utilizados dados baseadas nas instâncias E1-E28, I1-I15 obtidas de Ferreira et al. (2012). Algumas modificações foram realizadas para considerar cenários de produção mais gerais. O cálculo do limite superior de número de lotes a serem produzidos foi estabelecido pela fórmula $M_{mjt} = \frac{K^{II}_{mt}}{UB_{mj} \times a^{II}_{mj}} + 1$ (ver restrição 6).

O tratamento dos custos de troca também foi modificado. A consideração de custos de troca deve ocorrer apenas em casos onde há um custo real de troca como, por exemplo, custo de produtos utilizados na limpeza, contratação de funcionários para esta atividade, como é o caso, de fábricas de moldes plásticos, etc. Caso contrário, a única perda no sequenciamento é de tempo e em períodos ociosos este custo é irrelevante. Por essa razão, os custos de troca de itens c_{ij} foram determinados de forma a serem uma penalização para o desempate de soluções equivalentes em períodos ociosos. Em períodos com escassez os tempos de troca da restrição de capacidade já consideram a importância do sequenciamento, ou seja, o modelo matemático faz o *trade off* entre o dimensionamento dos lotes e o sequenciamento da produção.

Os custos de troca foram calculados a partir da seguinte equação:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij}}{\max_{\{k \in J, l \in J\}} b_{kl}} \tag{14}$$

.

Eles são valores no intervalo $[0, 1]$ e proporcionais aos tempos de troca. A Tabela 1 exibe um comparativo das características gerais dos grupos de instâncias resolvidos.

Tabela 1: Dimensões e características das instâncias utilizadas.

Grupo	**Itens**	**Máquinas**	**Períodos**	**Número de variáveis**			**Restrições**
				Inteiras	**Binárias**	**Total**	
E1-E28	4	2	3	24	104	232	216
I1-I15	23	2	3	580	1.920	2.500	2.354

A seguir são apresentados os experimentos computacionais. Na primeira parte são discutidos os resultados obtidos na solução do grupo de instâncias de pequeno porte (E1-E28) e na segunda parte o grupo de instâncias de médio porte (I1-I15). Os parâmetros do CPLEX foram mantidos no modo padrão (*default*). Para avaliar o desempenho das estratégias R&F e R&F-FG em relação às soluções do CPLEX foi utilizada a fórmula de porcentagem de melhoria:

$$Melhoria(\%) = \frac{solucao(heuristica) - solucao(CPX)}{solucao(CPX)}. \tag{15}$$

Grupo de instâncias E1-E28 - pequeno porte

Para o primeiro grupo de instâncias (E1-E28) foram realizadas duas análises de desempenho. A primeira pretende avaliar se as soluções fornecidas pela RF são melhores que as primeiras soluções do CPLEX e, a segunda compara as soluções heurísticas com a solução ótima do modelo FG. Além da qualidade da solução em termos do menor custo, também é observado o menor tempo computacional.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos na solução das instâncias E1-E28 pela heurística *Relax and Fix* e pelo CPLEX, ela está organizada da seguinte maneira, mostra na primeira coluna o nome da instância, em seguida o valor do custo total da 1ª solução inteira obtida pelo CPLEX, na sequência é dada a solução encontrada pela heurística *Relax and Fix* e o tempo necessário para obtê-la, depois na coluna 5 a porcentagem de melhoria da solução da heurística em relação a 1ª solução inteira do pacote de otimização. Em seguida, colunas 6 e 7 são apresentadas, respectivamente, a solução ótima e seu tempo de obtenção e, por fim a porcentagem de melhoria do tempo de processamento da heurística em relação ao pacote de otimização. A última linha contém a média do valor de cada coluna. As melhores soluções e tempos estão destacadas em negrito.

Tabela 2: Resultados das soluções das instâncias E1-E28 fornecidas pelo CPLEX e heurística R&F.

Instâncias	1ª Sol. Int.* CPX	Solução R&F	Tempo R&F	% Melhoria Solução	Sol. Ótima CPX	Tempo CPX	% Melhoria Tempo
E1	22.949,56	**202,86**	0,71	**99,12**	**202,86**	5,09	**86,05**
E2	11.220,58	**205,78**	0,39	**98,17**	**205,78**	4,57	**91,47**
E3	12.288,16	**223,72**	0,37	**98,18**	**223,72**	5,43	**93,19**
E4	11.115,29	**207,88**	0,39	**98,13**	**207,88**	4,96	**92,14**
E5	26.210,94	**228,13**	0,32	**99,13**	**228,13**	2,17	**85,25**
E6	16.037,52	**257,77**	0,27	**98,39**	**257,77**	4,12	**93,45**
E7	15.800,34	**202,94**	0,19	**98,72**	**202,94**	0,12	**-58,33**
E8	22.949,56	**202,86**	0,56	**99,12**	**202,86**	1,31	**57,25**
E9	11.220,58	**205,78**	0,52	**98,17**	**205,78**	1,12	**53,57**
E10	12.288,16	**223,72**	0,30	**98,18**	**223,72**	1,22	**75,41**
E11	11.115,29	**226,63**	0,41	**97,96**	**226,63**	1,76	**76,70**
E12	26.210,94	**228,13**	0,12	**99,13**	**228,13**	0,75	**84,00**
E13	16.037,52	**257,77**	0,18	**98,39**	**257,77**	0,64	**71,88**
E14	15.800,34	**202,94**	0,10	**98,72**	**202,94**	0,25	**60,00**
E15	22.949,56	**212,04**	0,32	**99,08**	**212,04**	2,57	**87,55**
E16	11.220,58	**206,68**	0,27	**98,16**	**206,68**	1,54	**82,47**
E17	12.288,16	**243,37**	0,26	**98,02**	**243,37**	1,95	**86,67**
E18	11.115,29	**262,53**	0,37	**97,64**	**246,28**	2,40	**84,58**
E19	26.210,94	**229,03**	0,13	**99,13**	**229,03**	1,29	**89,92**
E20	16.037,52	**258,67**	0,15	**98,39**	**258,67**	0,66	**77,27**
E21	15.800,34	**253,88**	0,09	**98,39**	**253,88**	0,06	**-50,00**
E22	22.949,56	**203,76**	1,32	**99,11**	**203,76**	3,99	**66,92**
E23	11.220,58	**206,68**	0,40	**98,16**	**206,68**	4,45	**91,01**
E24	12.288,16	**224,62**	0,41	**98,17**	**224,62**	4,56	**91,01**
E25	11.115,29	**208,78**	1,32	**98,12**	**208,78**	3,79	**65,17**
E26	26.210,94	**229,03**	0,36	**99,13**	**229,03**	3,88	**90,72**
E27	16.037,52	**258,67**	0,22	**98,39**	**258,67**	3,57	**93,84**
E28	15.800,34	**203,84**	0,16	**98,71**	**203,84**	0,30	**46,67**
Média	16.517,48	**224,23**	0,38	**98,50**	**223,65**	2,45	**70,21**

*Os tempos de obtenção da solução são menores que 0,03 segundos.

Quando se compara a primeira solução inteira factível fornecida pelo CPLEX 12.4 com as soluções fornecidas pela heurística R&F observa-se que as soluções da R&F são em média 98,50%

melhores que as soluções iniciais do CPLEX. Os tempos computacionais em ambos os casos para todas as instâncias são em média menores que 1 segundo. A qualidade da solução R&F também pode ser comparada às soluções ótimas fornecidas pelo método exato (coluna 6, Tabela 2). Neste caso, observa-se que a heurística obteve soluções ótimas em 96% das instâncias. Além disso, o tempo computacional de obtenção destas soluções é em média 70,26% menor que o tempo gasto pelo CPLEX 12.4, ou seja, é menor em 26 das 28 instâncias analisadas. A única solução que não é ótima, referente à instância E18, é apenas 6,60% pior. Uma vez que a heurística R&F obteve a solução ótima em quase 100% das instâncias, a estratégia híbrida R&F-FG não foi testada.

Grupo de instâncias I1-I15 - médio porte

Teste 1 - Primeira solução R&F e primeira solução CPLEX

Para o grupo de instâncias (I1-I15), que são de médio porte, foram estabelecidos critérios de parada em cada teste. No primeiro teste o critério de parada para resolução dos submodelos da heurística R&F foi a primeira solução inteira factível encontrada. Estas soluções foram comparadas a primeira solução inteira factível obtida pelo CPLEX. A Tabela 3, reporta os resultados.

A Tabela 3 está organizada da seguinte maneira, mostra na primeira coluna o nome da instância, em seguida o valor da 1ª solução inteira obtida pelo CPLEX, em seguida seu tempo de obtenção, depois a solução inteira factível fornecida heurística R&F (critério de parada de solução dos submodelos 1a solução inteira factível) e o tempo necessário para obtê-la. Na última coluna é apresentada a porcentagem de melhoria da solução R&F em relação ao pacote de otimização CPLEX. A última linha contém a média do valor de cada coluna. As melhores soluções estão destacadas em negrito.

Tabela 3: Resultados da 1ª solução inteira CPLEX e da solução heurística R&F critério de parada 1ª solução inteira, instâncias I1-I15.

Instâncias	**1ª Sol. Int. CPX**	**Tempo CPX**	**1ª Sol. Int. R&F**	**Tempo R&F**	**% Melhoria Solução**
I1	1.827.086,66	**0,30**	3.630.795,93	0,45	-98,72
I2	1.492.286,07	**0,46**	3.633.829,29	0,39	-143,51
I3	3.645.232,46	**0,25**	7.252.445,63	0,38	-98,96
I4	2.967.394,29	**0,12**	**1.691.198,90**	0,26	**43,01**
I5	3.545.445,30	**0,13**	3.600.233,26	0,45	-1,55
I6	5.263.864,91	1,87	**4.003.567,79**	**0,47**	**23,94**
I7	6.473.545,40	**0,23**	**6.384.762,33**	0,29	**1,37**
I8	7.175.405,30	**0,26**	**4.521.115,53**	0,26	**36,99**
I9	6.198.070,10	**0,29**	**3.537.761,13**	0,26	**42,92**
I10	5.418.801,09	**0,28**	5.520.310,53	0,30	-1,87
I11	5.879.645,80	**0,31**	**5.786.308,73**	0,32	**1,59**
I12	5.407.918,78	**0,29**	**1.590.538,32**	0,50	**70,59**
I13	4.973.000,10	**0,28**	**2.174.497,06**	0,36	**56,27**
I14	4.695.551,33	**0,13**	**1.125.434,12**	0,42	**76,03**
I15	5.186.791,52	**0,75**	**1.377.078,06**	0,63	**73,45**
Média	4.676.669,27	**0,40**	**3.721.991,77**	0,38	**5,44**

Quando se compara a primeira solução inteira factível fornecida pelo CPLEX observa-se (Tabela 3) que a heurística R&F é melhor em 10 das 15 instâncias, com uma melhoria média de 5,44%. Os tempos computacionais em ambos os casos para todas as instâncias são baixos e em média menores que 0,4 segundo.

Teste 2 - Melhor solução heurística R&F e solução CPLEX

O Teste 1 indica que a heurística R&F pode fornecer soluções boas. No intuito de melhorar a solução R&F foi realizado o Teste 2 onde cada submodelo da heurística *Relax and Fix* R&F foi resolvido até a otimalidade. Os resultados foram comparados aos resultados fornecidos pelo CPLEX em 40 minutos de processamento (2.400 segundos). A Tabela 3. exibe estes resultados.

A tabela esta organizada da seguinte maneira, mostra na primeira coluna o nome da instância, em seguida o valor da solução obtida com o *software* CPLEX utilizando um critério de parada de 40 minutos, seu tempo de obtenção e o valor do *gap*, nas colunas seguintes são apresentados o valor da solução obtida, e o tempo de obtenção dessa solução com a heurística R&F. As últimas colunas apresentam a porcentagem de melhoria da solução e do tempo de processamento da heurística em relação ao CPLEX no modo *default*. A última linha contém a média do valor de cada coluna. As melhores soluções e tempos execução estão destacadas em negrito.

Tabela 4: Custos totais das instâncias I1-I15 resolvidas pelo CPLEX e pela heurística R&F.

Instâncias	Solução CPX	Tempo CPX	*gap* CPX	Solução R&F	Tempo R&F	% Melhoria Solução	% Melhoria Tempo
I1	**3.151,03**	695,44	0,00	3.151,85	**9,69**	-0,03	**98,61**
I2	**6.283,84**	229,32	0,00	6.285,08	**7,02**	-0,02	**96,94**
I3	**3.151,03**	1.167,92	0,00	3.151,20	**7,71**	-0,01	**99,34**
I4	**6.783,81**	35,48	0,00	6.784,82	**8,61**	-0,01	**75,73**
I5	**3.419,30**	2.400,00	1,32	3.452,35	**110,46**	-0,97	**95,40**
I6	**398,40**	71,52	0,00	403,29	**11,69**	-1,23	**83,65**
I7	**376,53**	2.400,00	0,09	390,62	**21,14**	-3,74	**99,12**
I8	**505,50**	2.400,00	0,25	505,53	**66,41**	-0,01	**97,23**
I9	**504,98**	2.400,00	0,19	505,00	**26,42**	0,00	**98,90**
I10	**552,89**	2.400,00	0,13	553,06	**25,52**	-0,03	**98,94**
I11	**616,75**	2.176,29	0,00	616,77	**70,14**	0,00	**96,78**
I12	**719,92**	2.400,00	0,09	720,37	**14,20**	-0,06	**99,41**
I13	**795,32**	2.400,00	0,11	795,56	**12,25**	-0,03	**99,49**
I14	**804,17**	1.716,00	0,00	804,34	**21,17**	-0,02	**98,77**
I15	**576,07**	678,53	0,00	605,90	**20,66**	-5,18	**96,96**
Média	**1.909,30**	1.571,37	0,14	1.915,05	**28,87**	-0,76	**95,68**

Os *gaps* fornecidos pelo CPLEX, coluna 4 da Tabela , em média menores que 1% sugerem que as soluções obtidas são as soluções ótimas. A heurística R&F fornece soluções bem próximos às soluções CPX, em média os resultados são apenas 0,76% piores. De fato, com exceção das instâncias I7 e I5, nas outras 13 instâncias pode-se considerar que as soluções da R&F são as soluções ótimas também. Os tempos computacionais são em média 95,68% menores que o tempo gasto pelo CPLEX. Além disso, no pior caso, instância I5 o tempo é de 110 segundos e para o CPLEX foram utilizados os 40 minutos.

Estes resultados motivaram a aplicação da heurística Híbrida R&F-FG na tentativa de obter de fato as soluções ótimas das instâncias.

Teste 3 - Estratégia Híbrida R&F-FG

A Tabela 5 apresenta na primeira coluna o nome da instância, em seguida o valor da solução obtida pelo CPLEX, seu tempo de obtenção, e o *gap* da solução. Em seguida são apresentadas essas mesmas informações para a estratégia híbrida. Na última coluna é apresentada a porcentagem de melhoria da solução e do tempo de processamento da heurística em relação ao pacote de otimização.

Tabela 5: Custos totais das instâncias resolvidas pelo CPLEX e método híbrido R&F-FG.

Instâncias	Solução C&B	Tempo C&B	*gap* C&B	Solução Híbrido	Tempo Híbrido	*gap* Híbrido	Melhoria % Tempo
I1	**3.151,03**	695,44	**0,00**	**3.151,03**	**335,67**	**0,00**	**51,73**
I2	**6.283,84**	**229,32**	**0,00**	**6.283,89**	636,18	**0,00**	-177,42
I3	**3.151,03**	1.167,92	**0,00**	**3.151,03**	**587,82**	**0,00**	**49,67**
I4	**6.783,81**	**35,48**	**0,00**	**6.783,88**	344,93	**0,00**	-872,18
I5	**3.419,30**	**2.400,00**	1,32	**3.419,30**	**2.400,00**	**1,28**	**0,00**
I6	**398,40**	**71,52**	**0,00**	**398,40**	90,57	**0,00**	-26,64
I7	**376,53**	2.400,00	0,09	**376,53**	**236,02**	**0,00**	**90,17**
I8	**505,50**	**2.400,00**	0,25	505,53	**2.400,00**	**0,14**	**0,00**
I9	**504,98**	2.400,00	0,19	**504,98**	**280,55**	**0,00**	**88,31**
I10	**552,89**	**2.400,00**	0,13	**552,89**	**2.400,00**	**0,06**	**0,00**
I11	**616,75**	**2.176,29**	**0,00**	**616,75**	2.400,00	0,06	-10,28
I12	**719,92**	**2.400,00**	**0,09**	**719,92**	**2.400,00**	0,12	**0,00**
I13	**795,32**	2.400,00	0,11	**795,32**	**130,75**	**0,00**	**94,55**
I14	**804,17**	1.716,00	**0,00**	**804,17**	**356,06**	**0,00**	**79,25**
I15	**576,07**	678,53	**0,00**	**576,07**	**561,05**	**0,00**	**17,31**
Média	**1.909,30**	1.571,37	0,14	1.909,31	**1.037,31**	**0,11**	-41,03

A estratégia híbrida fornece as mesmas soluções do CPLEX em 14 das 15 instâncias analisadas e, a única solução que não é semelhante, referente à instância I8, é apenas 0,01% pior. Em relação ao tempo de processamento, a heurística R&F-FG é melhor em 7 das 15 instâncias. Para a instância I4 ele é 100 vezes pior. Porém, para as instâncias I3, I7, I9 e I14 o tempo é reduzido em mais de 50%.

4. Conclusões e perspectivas futuras

No presente trabalho foram propostas duas heurísticas do tipo *Relax and Fix* (R&F e R&F-FG) para resolver um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento da produção de médio porte. Testes utilizando as soluções heurísticas como soluções iniciais foram realizados. Nos experimentos computacionais instâncias modificadas da literatura foram resolvidas.

Tanto nas instâncias de pequeno, quanto de médio porte as heurísticas forneceram soluções ótimas quase 100% dos casos. Além disto, os tempos de solução no caso das instâncias de pequeno porte são inferiores a 0,03 segundos. Nas instâncias de médio porte os tempos são em média menores que 29 segundos, enquanto os tempos do CPLEX estão na média de 1.500 segundos. Os experimentos onde as soluções foram utilizadas como soluções iniciais se observou que não houve uma melhora na solução do problema pelo CPLEX. Os tempos de solução continuaram altos e não foi provada a otimalidade das soluções em 40 minutos de execução.

No presente trabalho foi mostrado então que, heurísticas que aproveitem a estrutura de modelos matemáticos podem resolvê-los de forma eficiente e rápida. Outra contribuição deste trabalho foi mostrar que, em alguns casos, a inclusão de uma solução inicial de boa qualidade, ou seja, um limitante superior para o problema, no CPLEX pode não melhorar seu desempenho. Ele sugere que investir em boas heurísticas que utilizem a estrutura do modelo matemático pode ser mais vantajoso.

Perspectivas futuras interessantes são, testar essas heurísticas e outras heurísticas que utilizam a estrutura do modelo na solução de outros problemas de grande porte.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem à Fapesp, Fapemig e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

Ferreira, D.; Clark, A. R.; Almada-Lobo, B.,; Morabito, R. (2012). Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics*, 136(2), 255–265.

Fourer, R.; Gay, D.,; Kernighan, B. (2002). *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press, Brooks, Cole Publishing Company, 2 edition.

James, R. J. W.; Almada-Lobo, B. (2011). Single and parallel machine capacitated lotsizing and scheduling: New iterative mip-based neighborhood search heuristics. *Computers & OR*, 38(12), 1816–1825.

Kimms, A.; Drexl, A. (1997). Lotsizing and scheduling, survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, 99, 221–235.

Lawler, E.; Lenstra, J.; Kan, A. K.,; Shmmoys, D. (1985). *The Traveling Salesman Problem - A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Chichester, Wiley.

Maldonado, M.; Rangel, S.,; Ferreira, D. (2014). A study of different subsequence elimination strategies for the soft drink production planning. *Journal of Applied Research and Technology*.

Maniezzo, V.; Stützle, T.,; Voß, S., editors (2010). *Matheuristics - Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*, volume 10 of *Annals of Information Systems*. Springer.

Menezes, A. A.; Clark, A.,; Almada-Lobo, B. (2011). Capacitated lot-sizing and scheduling with sequence-dependent, period-overlapping and non-triangular setups. *J. Scheduling*, 14(2), 209–219.

Schmid, V.; Doerner, K. F.,; Laporte, G. (2013). Rich routing problems arising in supply chain management. *European Journal of Operational Research*, 224(3), 435–448.

Toledo, C. F. M.; de Oliveira, L.; de Freitas Pereira, R.; França, P. M.,; Morabito, R. (2014). A genetic algorithm/mathematical programming approach to solve a two-level soft drink production problem. *Computers & OR*, 48, 40–52.

Wolsey, L. (1998). Integer programming. *John Wiley & Sons*.