Estudo Poliédrico de Lárgura em Árvores

Jefferson L. Gurguri
ParGO - Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici - Bloco 910 - Fortaleza - CE
jeffersongurguri@gmail.com

Victor A. Campos
ParGO - Departamento de Computação - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici - Bloco 910 - Fortaleza - CE
campos@lia.ufc.br

Ana Shirley F. da Silva
ParGO - Departamento de Matemática - Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici - Bloco 914 - Fortaleza - CE
anasilva@mat.ufc.br

PALAVRAS CHAVE. Lárgura em Árvore, Poliedro, Facetas

Área Principal: OC, TAG

1. Resumo

O conceito de Largura em Árvore (“treewidth”) foi introduzido por Robertson and Seymour [2, 3].

Resultados demonstram que vários problemas NP-Completos podem ser resolvido em tempo polinomial quando restritos a grafos com largura em árvore limitada [5, 6, 7].

Uma formulação linear do problema pode oferecer bons limites inferiores e o estudo facial do poliedro pode ser utilizado para exibir facetas e gerar algoritmos de separação para o problema.

2. Introdução

Determinar a largura em árvore de um grafo arbitrário é um problema NP-Difícil [8], assim o que podemos esperar é obter bons limites. Obter limites superiores é relativamente simples, por exemplo, escolhendo uma triangulação para G e avaliando $\omega(G)$, entretanto obter bons limites inferiores vem sendo uma tarefa mais desafiadora.

Determinar bons limites inferiores para largura em árvore de um grafo tem diversas aplicações como:

- Bons limites inferiores podem ser usado como subrotinas para algoritmos de Branch-And-Bound.
- Na resolução de problemas combinatórios, um limite inferior alto para largura em árvore pode indicar a inviabilidade no tempo de computação utilizando DEA.
- Limites inferiores podem indicar a qualidade de limites superiores por um “gap” reduzido.

Nesse artigo inicial nós pretendemos:

- Exibir alguns fundamentos teóricos e um panorama do estado-da-arte sobre o problema de determinar a largura em árvore de grafos.
- Apresentar uma formulação inteira para o problema.
- Determinar a dimensão do poliedro associado a nossa formulação e realizar um estudo inicial sobre as facetas desse poliedro.

3. Fundamentação Teórica

3.1. Definições

Definição 1 (Decomposição em Árvore)**.** Um par $(\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ é chamado Decomposição Em Árvore(DEA) para um grafo $G = (V, E)$, onde $\{X_i \mid i \in I\}$ é uma família de subconjuntos de V, e T uma árvore com conjuntos de nós I e arestas F tal que:

1. $\bigcup_{i \in I} X_i = V$.
2. $\forall uv \in E, \exists i \in I : u, v \in X_i$
3. $\forall i, j, k \in I : j$ está no caminho de i para k em T, temos $X_i \cap X_k \subseteq X_j$.

Definição 2 (Largura em árvore)**.** A largura em árvore de uma decomposição $D = (\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$ para $G = (V, E)$ é definida como $tw_D(G) := \max_{i \in I}\{|X_i| - 1\}$ e a largura em árvore de G é a largura mínima dentre todas as decomposições em árvore possíveis para G, logo temos, $tw(G) := \min\{tw_D(G) \mid D$ uma DEA de G$\}$

Definição 3 (Grafo Cordal)**.** Um grafo é cordal se, e somente se, não contém qualquer ciclo induzido C_k com $k \geq 4$.

Definição 4 (Cordalização)**.** Um grafo $H = (V, E')$ é uma cordalização de um grafo $G = (V, E)$ se G é subgrafo gerador de H e H é cordal. $E' \setminus E$ é dito uma triangulação de G.

Definição 5 (Menor)**.** Um menor de G é um grafo H, obtido por operações de: eliminação de vértices e/ou arestas e contrações de arestas.

3.2. Propriedades

Proposição 1. *Seja H um menor de G, então $tw(H) \leq tw(G)$*

Proposição 2. *Sejam G um grafo e H uma cordalização de G, então $tw(G) \leq tw(H) = \omega(H) - 1$.*

Proposição 3. *Encontrar uma decomposição em árvore mínima de um grafo G é equivalente a encontrar uma cordalização H de G que minimiza $\omega(H)$.*

Proposição 4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo e π uma ordem total sobre V, o conjunto*

$$E' = \left(\bigcup_{u \in V} \{vw \mid v, w \in N_\pi^+(u)\} \right) \setminus E$$

é uma triangulação para G. Definimos $G_\pi = (V, E_\pi = E' \cup E)$, e temos

$$tw(G_\pi) = \max_{u \in V} |N_\pi^+(u)|$$

Proposição 5. *Seja G um grafo, temos*

$$tw(G) = \min\{\max\{|N_\pi^+| : \pi \text{ uma ordem total de } V(G)\}\}$$

3.3. Limites Inferiores

3.3.1. Baseados no grau de vértices

Proposição 6 (Limites elementares)**.** *Seja δ_i o i-ésimo menor grau de G e*

$$\gamma_R(G) := \begin{cases} |V| - 1, & \text{se } G \text{ é completo} \\ \min_{\substack{v,w \in V \\ vw \notin E}} \max\{d(v), d(w)\}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

como definido por Ramachandramurthi em [11], temos que

$$\delta_1(G) \leq \delta_2(G) \leq \gamma_R(G) \leq tw(G)$$

Proposição 7 (Tomando menores)**.** *Vamos denotar por $\delta_i C(G)$ o máximo $\delta_i(H)$ e $\gamma_R C(G)$, o máximo de $\gamma_R(H)$, onde H é menor de G.*

$$\delta_1 C(G) \leq \delta_2 C(G) \leq \gamma_R C(G) \leq tw(G).$$

3.3.2. Maximum Cardinality Search (MCS)

Pode ser utilizado como heurística para limite superiores de G e pode ser utilizado também para gerar limites inferiores como mostrado por Lucena [9]. O algoritmo gera uma ordem π. Uma MCS-ordem é uma ordenação que pode ser gerada pelo algorithm MCS.

Teorema 1. *(Lucena) Para qualquer grafo $G = (V, E)$ e qualquer MCS-ordem π de G,*

$$tw(G) \geq MCSLB(G, \pi) = \max_{v \in V} |\{wv \in E \mid \pi(w) < \pi(v)\}|$$

3.3.3. Grafos Melhorados

A técnica de grafos melhorados trata-se da adição de arestas em um grafo G de forma que não modifique sua largura em árvore, mas melhore os limites inferiores obtidos sobre G por meio de outras técnicas.

Lema 1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $tw(G) \leq k$. Sejam $u, v \in G, uv \notin E$ e existam pelo menos $k + 1$ caminhos disjuntos de u a v. Então para $G' = (V, E \cup \{uv\})$, temos $tw(G') \leq k$*

Lema 2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $tw(G) \leq k$. Sejam $u, v \in G, uv \notin E$ e existam pelo menos $k + 1$ vértices adjacentes a u e v. Então para $G' = (V, E \cup \{uv\})$, temos $tw(G') \leq k$*

Considerando o procedimento de adicionar essas arestas até que não haja mais pares de vértices que satisfaçam (Lema 1) e (Lema 2) para um grafo G e inteiro k, temos então respectivamente os grafos $(k + 1)$ caminho-melhorado e $(k + 1)$ vizinho melhorado.

Teorema 2. *Seja G_n o $(k+1)$ vizinho melhorado de $G = (V, E)$ e G_p o $(k+1)$ caminho-melhorado de G. Então $tw(G) \leq k \iff tw(G_n) \leq k \iff tw(G_p) \leq k$.*

4. Formulação Inteira por Ordem de Eliminação para $tw(G)$

A formulação por ordem de eliminação considera um ordem total sobre $V(G)$ e um supergrafo $G_\pi = (V, E_\pi)$. Procuramos uma ordem π^* que minimize $w(G_\pi)$ dentre todas as ordens totais. A ordem π^* determina a triangulação ótima para G, ou equivalentemente, determina a largura em árvore de G.

Temos dois tipos de variáveis. As variáveis em z indicam a ordem π e as variáveis em x indicam as arestas de G_π.

Seja o problema inteiro $LP_{\text{EOF}}(G)$ definido abaixo com o seu correspondente conjunto viável P:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & uv \in E_\pi \text{ e } \pi(u) < \pi(v) \\ 0, & c.c. \end{cases} \tag{1}$$

$$z_{uv} = \begin{cases} 1, & \pi(u) < \pi(v) \\ 0, & c.c. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\min \quad & \omega && && (3)\\
\text{s.t.} \quad & \omega \geq \sum_{v \in V \setminus u} x_{uv}, && \forall u \in V && (4)\\
& z_{uv} + z_{vu} = 1, && \forall u, v \in V, u \neq v && (5)\\
& z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1, && \forall u, v, w, u \neq v \neq w && (6)\\
& x_{uv} \leq z_{uv}, && \forall u, v \in \bar{E} && (7)\\
& x_{uv} = z_{uv}, && \forall u, v \in E && (8)\\
& x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}, && \forall u \in V, v, w \in \bar{E} && (9)\\
& x_{uv} \in \{0, 1\}, z_{uv} \in \{0, 1\}, && \forall u, v \in V && (10)
\end{aligned}$$

As restrições (5), (6) e (10) garantem que z determina uma ordem total, (7) garante que a variável x_{uv} é zero se u não precede v, (8) impõe que as arestas são contadas na triangulação e (9) impõe que se uv e uw estão na triangulação com u precedendo v e w, então deve existir uma aresta vw ou wv.

5. Estudo poliédrico de $LP_{\text{EOF}}(G)$

Sejam

$$n := |V(G)|, m := |E(G)|, \bar{m} := \binom{n}{2} - m$$

Vamos definir LP' como o problema obtido através da eliminação das variáveis x_{uv} tal que $uv \in E(G)$ e z_{uv} tal que $u \prec v$, sendo $\prec$ é a ordem natural sobre os índices dos vértices, em $LP_{\text{EOF}}(G)$, utilizando as restrições (8) e (5), respectivamente. Denotamos P' como conjunto viável do problema LP'.

Seja $g : P' \to P$ a função que mapea uma solução viável de P' a única solução em P que contém o mesmo valor para componentes que estão em ambos os espaços e respeita as restrições (**??**) e (5).

Se s é um vetor particionado em componentes $x^i \in I$, então denotamos por s^{x_i} as componentes da parte x_i de s.

5.1. Dimensão de $LP_{\text{EOF}}(G)$

Lema 3. $\dim(P') \leq \dim(P)$

Vamos demonstrar que se S é um conjunto linearmente independente (LI) em P', então $g(S) = \{g(x) : x \in S\}$ em P é LI por sua contra-positiva. Vamos particionar $g(s)$ em $(x, y)^\top$ onde as componentes em x são as variáveis comuns a $LP_{\text{EOF}}(G)$ e LP'.

Por contraposição, Suponha que $g(S)$ seja linearmente dependente (LD), então existe $\alpha \neq \vec{0}$ tal que

$$\sum_{s\in S} \alpha_s g(s) = \vec{0} \iff \sum_{s\in S} \alpha_s g(s)^x = \vec{0} \wedge \sum_{s\in S} \alpha_s g(s)^y = \vec{0} \tag{11}$$

$$\implies \sum_{s\in S} \alpha_s g(s)^x = \sum_{s\in S} \alpha_s s = \vec{0}, \alpha \neq \vec{0} \tag{12}$$

$$\square \tag{13}$$

Proposição 8. *Sejam dois vetores $s_2, s_1 \in H = \{s \in \mathbb{R}^n : \pi^\top s = \pi_0\}$, tais que $s_2 = s_1 + k \sum_{i\in I} e_i, k \neq 0$, então $\sum_{i\in I} \pi_i = 0$.*

Vamos admitir o particionamento dos vetores em P' em x e z como definidas em $LP_{\text{EOF}}(G)$, exceto as que foram eliminadas.

Lema 4. *P' tem dimensão plena, ou seja, $\dim(P') = 2\bar{m} + \binom{n}{2}$.*

Vamos demonstrar que se

$$P' \subseteq H := \left\{ s \in \mathbb{R}^{2\bar{m}+\binom{n}{2}} : \pi^\top s = \pi_0 \right\} \tag{14}$$

então $\pi = \vec{0}$ e $\pi_0 = 0$.

1. $\forall uv \notin E, \pi^x_{uv} = 0$.

   Seja z dada pela ordem total $p = \langle u, v, v_2, \ldots, v_n \rangle$, $x_{rs} = z_{rs}$ para toda não aresta diferente de uv e $x_{uv} \in \{0, 1\}$ define duas soluções viáveis para LP'. Observe que não existe vértice que preceda o vértice u e uv é não aresta, assim o valor de $x_{uv} \in \{0, 1\}$ define duas soluções viáveis.

   Sejam s_1 e s_2 esses vetores, com $s_2 = s_1 + (e^x_{uv}, 0)^\top$. Como s_1 e s_2 diferem apenas pela componente x_{uv} , temos $\pi^x_{uv} = 0$ pela proposição (8).

2. $\forall uv\,(u \prec v), \pi^z_{uv} = 0$.

   Seja $p_1 = \langle u, v, v_2, \ldots, v_n\rangle$, *e* $p_2 = \langle v, u, v_2, \ldots, v_n\rangle$, $x_{rs} = z_{rs}$, $x_{rs} = z_{rs}$ *para* $rs \neq uv$, *com* s^z_1 *e* s^z_2, *dados respectivamentes pelas ordens* p_1 *e* p_2

   (a) Se $uv \notin E(G)$, *defina* ${s_1}^x_{uv} = {s_2}^x_{uv} = 0$, *assim* s_1 *e* $s_2 \in P'$ *e diferem em apenas uma componente.*

   (b) Se $uv \in E(G)$, *defina* ${s_1}^x_{uv} = 1$, ${s_2}^x_{uv} = 0$. *Observe que* s_1 *e* $s_2 \in P'$ *e diferem nas componentes* x_{uv} *e* z_{uv}, *contudo* $uv \in E(G)$, *assim* x_{uv} *não está presente em* LP'. *Portanto, pela proposição (8),* $\pi^z_{uv} = 0$.

Assim, temos que $H = \mathbb{R}^{2\bar{m}+\binom{n}{2}}$, *e* P' *tem dimensão plena.*

Teorema 3. $LP_{EOF}(G)$ *tem dimensão* $2\bar{m} + \binom{n}{2}$

Seja $A^=$ *a matriz dos hiperplanos do modelo* $LP_{EOF}(G)$, *temos que*

$$\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A^=) \leq 2\bar{m} + \binom{n}{2} \tag{15}$$

$$2\bar{m} + \binom{n}{2} = \dim(P') \leq \dim(P) \leq 2\bar{m} + \binom{n}{2} \tag{16}$$

$$\implies \dim(P) = 2\bar{m} + \binom{n}{2} \tag{17}$$

$$\blacksquare \tag{18}$$

6. Algumas facetas

6.1. Preliminares

Lema 5. *Se* F *é faceta de* P', *então* F *é faceta de* P.

Seja $F = \{s \in P' : \pi^\top s \leq \pi_0\}$. *Como* F *é faceta, a desigualdade induzida por* F, (π, π_0), *é válida para* P' *e* $\dim(F) = \dim(P') - 1$. *Pela construção de* LP' *a partir de* $LP_{EOF}(G)$, *temos que* $((\pi, \vec{0})^\top, \pi_0)$ *é desigualdade válida para* P. *Temos também que*

$$\dim(F) = \dim(P') - 1 = \dim(P) - 1; \quad \textit{pelo teorema } (3) \tag{19}$$

Portanto, F *é faceta de* P.

Iremos na próxima subseção uma técnica de demonstração de facetas para poliedros de dimensão plena. A partir da suposição de que a face $F = \{x \in P : \alpha^\top x = \alpha_0\}$, que desejamos demonstrar ser faceta, está contida em uma outra face $H = \{x \in P : \pi^\top x = \pi_0\}$, se demonstramos que $(\pi^\top, \pi_0) = \lambda(\alpha^\top, \alpha_0)$, $\lambda \neq 0$, teremos que F é faceta.

Utilizaremos para tal a proposição (8), exibindo dois ou mais vetores em F (portanto, em H) que se diferenciam em componentes específicas com o intuito de demonstrar que essas componentes são nulas ou se relacionam de forma “apropriada”.

Não iremos tratar a componente w das soluções, pois essa não é ilimitada superiormente, assim podemos obter uma nova solução apenas acrescendo o valor de w.

As componentes de um vetor $s_i \in F$ serão particionadas em $s_i = (x^i, z^i)^\top$ e ao definir valores para z_{uv} com $u \prec v$ ou x_{uv} com $uv \in E$ estaremos definindo pelas restrições (5) e (**??**) variáveis no modelo LP'.

Proposição 9. *As seguintes desigualdades são válidas para* P'.

1. $1 \geq x_{uv} \geq 0$ *para todo* $\{u, v\} \subset V$.

   Devido a relaxação da restrições de integralidade.

2. $1 - x_{vu} \geq z_{uv}$, *para* $uv \notin E$.

   Devido as restrições do modelo (5) e (7).

3. $z_{uv} + x_{uw} \geq z_{uw}$, *para* $uv, vw \in E$ *e* $uw \notin E$.

   Suponha que a restrição não seja válida, assim temos que $z_{uw} = 1$ *e* $z_{uv} = x_{uw} = 0$, *como* $uv, vw \in E$,$uw \notin E$ *e as restrições do tipo (7), (8) e (9), chegamos que* $x_{uw} = 1$.

6.2. $z_{uv} \geq 0$ é faceta se, e somente se, $uv \in E$ e $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$

$$F = \{s \in P' : z_{uv} = 0\} \subseteq H = \{s \in P' : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

6.2.1. Se $uv \in E$ e $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$, então $z_{uv} \geq 0$ é faceta.

Argumento 1. *Iremos exibir dois vetores em* F *que diferem apenas por uma componente, assim pela proposição (8) a componente respectiva em* π *será nula.*

1. $\pi^x_{wt} = 0, \forall wt \notin E$

   (a) $w = u, t \neq v$

   Seja a ordem $p = \langle v, u, t, \ldots, v_n \rangle$ *definindo* $z^1 = z^2$, *como* $t \notin N(u)$, *então por contraposição* $t \notin N(v)$ *e* v *precede* t *podemos fixar* $x^1_{vt} = x^2_{vt} = 0$, $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para todo* $rs \notin \{vt, ut\}$ *e* $x^1_{ut} = 1$ *e* $x^2_{ut} = 0$.

   (b) $w \neq v, t = u$

   Seja a ordem $p = \langle w, v, u, \ldots, v_n \rangle$ *definindo* $z^1 = z^2$, *como* $w \notin N(u)$, *então por contraposição* $w \notin N(v)$, *logo podemos fixar* $x^1_{wv} = x^2_{wv} = 0$, $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para todo* $rs \notin \{wv, wu\}$ *e* $x^1_{wu} = 1$ *e* $x^2_{wu} = 0$.

   (c) $w = v, t \neq u$

   Seja a ordem $p = \langle v, u, t \ldots, v_n \rangle$ *definindo* $z^1 = z^2$, *podemos fixar* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para todo* $rs \neq vt$ *e* $x^1_{vt} = 1$ *e* $x^2_{vt} = 0$.

   (d) $w \neq u, t = v$

   Seja a ordem $p = \langle w, v, u \ldots, v_n \rangle$ *definindo* $z^1 = z^2$, *podemos fixar* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para todo* $rs \neq wv$ *e* $x^1_{wv} = 1$ *e* $x^2_{wv} = 0$.

   (e) $\{w, t\} \cap \{u, v\} = \emptyset$

   Seja a ordem $p = \langle w, t, v, u \ldots, v_n \rangle$ *definindo* $z^1 = z^2$, *podemos fixar* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para todo* $rs \neq wt$ *e* $x^1_{wt} = 1$ *e* $x^2_{wt} = 0$.

2. $\forall wt \neq uv, \pi^z_{wt} = 0$

   (a) $w = u, t \neq v$

   Sejam as ordens $p_1 = \langle v, u, t, \ldots, v_n \rangle, p_2 = \langle v, t, u, \ldots, v_n \rangle$, *definindo as componentes* z^1, z^2 *(respectivamente) e* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para* $rs \notin \{vt, ut\}$. *Se* $ut \notin E \implies vt \notin E$, *então podemos fixar* $x^1_{vt} = x^2_{vt} = x^1_{ut} = x^2_{ut} = 0$. *Se* $ut \in E$ *fixe* $x^1_{vt} = x^2_{vt} = 1$ *e* $x^1_{ut} = x^2_{tu} := 1, x^2_{ut} = 0$.

   (b) $w = v, t \neq u$

   Sejam as ordens $p_1 = \langle v, t, u, \ldots, v_n \rangle, p_2 = \langle t, v, u, \ldots, v_n \rangle$, *definindo as componentes* z^1, z^2 *(respectivamente) e* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para* $rs \neq vt$. *Se* $vt \in E$ *definimos* $x^1_{vt} = x^2_{tv} := 1$ *e* $x^2_{vt} = 0$, *se* $vt \notin E$ *podemos definir* $x^1_{vt} = x^2_{vt} = 0$.

   (c) $\{w, t\} \cap \{u, v\} = \emptyset$

   Sejam as ordens $p_1 = \langle w, t, v, u, \ldots, v_n \rangle, p_2 = \langle t, w, v, u, \ldots, v_n \rangle$, *definindo as componentes* z^1, z^2 *(respectivamente) e* $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ *para* $rs \neq wt$. *Se* $vt \in E$ *definimos* $x^1_{wt} = x^2_{tw} := 1$ *e* $x^2_{wt} = 0$, *se* $wt \notin E$ *podemos definir* $x^1_{wt} = x^2_{wt} = 0$.

Assim, $F = \{s \in P' : z_{uv} = 0\} \subseteq H = \{s \in P' : \pi^z_{uv} z_{uv} = \pi_0\} \implies \pi_0 = 0$, portanto temos que a desigualdade que induz H é um múltiplo não-nulo da desigualde que induz F.

□

6.2.2. Se $z_{uv} \geq 0$ é faceta, então $uv \in E$ e $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$

Vamos demonstrar a proposição por sua contrapositiva.

$$uv \notin E \text{ ou } N(v) \setminus (N(u) \cup \{u\}) \neq \emptyset \implies z_{uv} \geq 0 \text{ não é faceta} \tag{20}$$

- $uv \notin E$, então $z_{uv} \geq 0$ não é faceta.

  Observe que $x_{uv} \leq z_{uv}$ com $uv \notin E$ e $x_{uv} \geq 0$ são válidas para P', assim podemos expressar $z_{uv} \geq 0$ como combinação linear.

  Como $z_{uv} \geq 0$ é dominada, ela não induz faceta.

- Se $uv \in E$ e $\exists w \in N(v) \setminus (N(u) \cup \{u\})$, então $z_{uv} \geq 0$ não é faceta.

  $z_{uv} + x_{uw} \geq z_{uw}$ e $-x_{uw} \geq -z_{uw}$ são desigualdades válida para P' pela proposição (9) , assim podemos expressar $z_{uv} \geq 0$ como combinação linear.

□

6.3. $x_{uw} \leq z_{uv}$ é faceta para todo $uv \notin E$

Por contradição, suponha

$$F = \{s \in P' : x_{uv} = z_{uv}\} \subseteq H = \{s \in P' : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Utilizando um demonstração similar ao argumento (1) temos:

1. $(\forall wt \notin E \cup \{uv\})\, (\pi^x_{wt} = 0)$
2. $(\forall wt \neq uv)\, (\pi^z_{uv} = 0)$

Sejam as ordens $p_1 = \langle v, u, \ldots, v_n \rangle, p_2 = \langle u, v \ldots, v_n \rangle$, definindo as componentes z^1, z^2 (respectivamente) e $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ para $rs \neq vu$. Se $vt \in E$ definimos $x^1_{vu} = 0$ e $x^2_{vu} = 0$.

Observe que as soluções viáveis s^1, s^2 são tais que

$$\begin{aligned} & s^2 = s^1 + e^x_{uv} + e^z_{uv} \\ \implies & \pi^x_{uv} + \pi^z_{uv} = 0 \quad \text{proposição (8)} \\ \implies & -\pi^x_{uv} = \pi^z_{uv} \end{aligned}$$

Assim,temos que

$$\begin{aligned} F = \{s \in P' : x_{uv} = z_{uv}\} \subseteq H = \{s \in P' : \pi^x_{uv} - \pi^x_{uv} = \pi_0\} \\ s \in F \implies s \in H \\ \implies x_{uv} = z_{uv}, \pi^x_{uv}(x_{uv} - z_{uv}) = \pi_0 \\ \implies \pi_0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, podemos descrever a desigualdade que induz H com um múltiplo da desigualdade indutora de F.

$\Rightarrow\Leftarrow$

F é faceta para $uv \notin E$.

6.4. $x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$ é faceta, para todo $uv, uw, vw \notin E$

Suponha que,

$$F = \{s \in P' : x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}\} \subseteq H = \{s \in P' : \pi^\top s = \pi_0\} \tag{21}$$

As seguintes proposições seguem análogas ao argumento (1):

- $(\forall wt)(\pi^z_{wt} = 0)$.
- $(\forall wt \notin E \cup \{uv, uw, vw, wv\})(\pi^x_{wt} = 0)$.

Temos que

$$H = \{s \in P' : \pi^x_{uv}x_{uv} + \pi^x_{uw}x_{uw} + \pi^x_{vw}x_{vw} + \pi^x_{wv}x_{wv} = \pi_0\}$$

1. $\pi^x_{uv} = \pi^x_{uw}$

   Seja a ordem $p = \langle u, v, w \dots, v_n\rangle$ definindo $z^1 = z^2$, podemos fixar $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ para todo $rs \notin \{uv, uw, vw\}$,fixamos também $(x^1_{uv}, x^1_{uw}, x^1_{vw}) = (1, 0, 0)$ e $(x^2_{uv}, x^2_{uw}, x^2_{vw}) = (0, 1, 0)$.

   Assim temos que $s^2 = s^1 - e^x_{uv} + e^x_{uw}$ e pela proposição (8), temos que $\pi^x_{uv} = \pi^x_{uw}$.

2. $\pi^x_{wv} = -\pi^x_{uv}$

   Seja a ordem $p = \langle u, w, v \dots, v_n\rangle$ definindo $z^1 = z^2$, podemos fixar $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ para todo $rs \notin \{uv, uw, wv\}$,fixamos também $(x^1_{uv}, x^1_{uw}, x^1_{wv}) = (0, 1, 0)$ e $(x^2_{uv}, x^2_{uw}, x^2_{wv}) = (1, 1, 1)$.

   Assim temos que $s^2 = s^1 + e^x uv + e^x_{wv}$.

3. $\pi^x_{uw} = -\pi^x_{vw}$

   Seja a ordem $p = \langle u, v, w \dots, v_n\rangle$ definindo $z^1 = z^2$, podemos fixar $x^1_{rs} = x^2_{rs} = z^1_{rs}$ para todo $rs \notin \{uv, uw, vw\}$,fixamos também $(x^1_{uv}, x^1_{uw}, x^1_{vw}) = (1, 0, 0)$ e $(x^2_{uv}, x^2_{uw}, x^2_{vw}) = (1, 1, 1)$.

   Assim temos que $s^2 = s^1 + e^x_{uw} + e^x_{vw}$.

Utilizando as igualdades entre as componentes não nulas de π obtemos,

$$-\pi^x_{wv} = \pi^x_{uv} = \pi^x_{uw} = -\pi^x_{vw}$$

o qual nos permiti expressar H como,

$$H = \left\{ s \in P' : \pi^x_{uv} \cdot (x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{wv}) = \pi^x_{uv} \cdot \frac{\pi_0}{\pi^x_{uv}} \right\} \tag{22}$$

Como existe $s \in F \cap H$, temos $\pi_0 = 1$ e a inequação de H é multiplo da inequação F. Uma contradição, assim temos que F é faceta.

6.5. Outras facetas

Reutilizando as estratégias utilizadas podemos demonstrar as seguintes facetas:

- $x_{uv} \geq 0$ é faceta, para todo $uv \notin E$.
- $z_{uv} \leq 1$ é faceta se, e somente se, $uv \in E, N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$
- $z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1$ é faceta para todo $u, v, w \in V$.
- $z_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$ é faceta, para todo $uv \in E$ e $uw, vw \notin E$.
- $z_{uw} + x_{wu} \geq x_{vw}$ é faceta, para todo $uv \in E$ e $uw, vw \notin E$.
- $z_{vu} + x_{vw} \geq z_{vw}$ é faceta, para todo $uv, uw \in E$ e $vw \notin E$.

Referências

[1] Hans L. Bodlaender, Arie M.C.S.A Koster, Treewidth Computations II. Lower Bounds. Techical Report UU-CS-2010-022, September 2010.

[2] N. Robertson, P.D. Seymour, Graph Minors. I. Excluding a forest, J. Combin. Theory, Ser. B 35 (1983) 39-61.

[3] N. Robertson, P.D. Seymour, Graph Minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, J. Algorithm 7 (1986) 309-322.

[4] L. Sunil chandran and C.R. Subramanian. A spectral lower bound for the treewidth of a graph and its consequences. Information Processing Letters, 87:195-200, 2003.

[5] S. Arnborg, Efficient algorithms for combinatorial problems on graphs with bounded decomposability—a survey, BIT 25 (1985) 2–23.

[6] S. Arnborg, A. Proskurowski, Linear time algorithms for NP-hard problems on graphs embedded in k-trees, Discrete Appl. Math. 23 (1989) 11–24.

[7] H.L. Bodlaender, A tourist guide through treewidth, Acta Cybernet. 11 (1993) 1–21.

[8] S. Arnborg, D. G. Corneil, and A. Proskurowski, Complexity of finding embeddings in a k-tree, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 8 (1987), pp. 277–284.

[9] A new lower bound for tree-width using maximum cardinality search. SIAM Journal on Discrete Mathematics.

[10] A.M.C.A. Koster and Bodlaender H.L.: Private communication.

[11] S. Ramachandramurthi. A lower bound for treewidth and its consequences. In E. W. Mayr, G. Schmidt, and G. Tinhofer, editors, Proceedings of the 20th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG'94, pages 14–25. Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science, vol. 903, 1995.