

UM MODELO MATEMÁTICO APLICADO AO DIMENSIONAMENTO E SEQUENCIAMENTO DE LOTES EM MÁQUINAS DISTINTAS EM PARALELO COM ESTOQUES INTERMEDIÁRIOS LIMITADOS

Gerson Ulbricht

IFSC - CEP 89254-430 – Jaraguá do Sul - SC.

e-mail: gerson.ulbricht@ifsc.edu.br

Neida M. Patias Volpi

UFPR - CEP 81531-990 - Curitiba - PR.

e-mail: neida@ufpr.br

Sander Joner

IFSC - CEP 89254-430 – Jaraguá do Sul - SC.

e-mail: sander.joner@ifsc.edu.br

RESUMO

O presente trabalho apresenta um modelo matemático de dimensionamento e sequenciamento de lotes com máquinas em paralelo composto por um estágio voltado à fabricação dos itens e outro ao teste de funcionamento, onde entre estes estágios, há a possibilidade de se manter um estoque intermediário de itens, o qual possui limitação de capacidade e custos de armazenamento. A problemática trata do sequenciamento e programação da produção dos itens nas máquinas paralelas bem como do envio desses itens para células de teste, onde estes são submetidos a testes de funcionamento por um tempo fixo em um ambiente com temperatura elevada. Neste artigo é proposto um modelo matemático voltado ao cumprimento da demanda estabelecida para o horizonte de planejamento, bem como pela otimização do uso das células de teste de carga, evitando o seu uso com espaços ociosos, de forma a reduzir custos na produção dos vários tipos de itens que compõe o *mix* de produção. Para validação do modelo, propõe-se uma aplicação com dados reais obtidos de uma empresa fabricante de itens eletrônicos o qual é resolvido com uso do software *Cplex* e heurística *relax-and-fix*.

PALAVRAS CHAVE: Máquinas paralelas, estoques intermediários, programação da produção.

Área principal: Programação Matemática.

ABSTRACT

This paper presents a mathematical model for batch sizing and scheduling with parallel machines consisting of a stage facing the manufacture of other items and the test run, where between these stages, there is the possibility of maintaining an intermediate stock items, which has limited capacity and storage costs. The problem is the sequencing and scheduling of items in parallel machines as well as sending these items to test cells, where items are subjected to functional testing for a fixed time in a high-temperature environment. This paper introduces one facing the implementation of an established demand for the planning horizon mathematical model, and by optimizing the use of cell load test, preventing its use with empty spaces in order to reduce costs in the production of various types of items that make up the production mix. To validate the model, we propose an application to real data obtained from a manufacturer of electronic items which is solved using CPLEX and *relax-and-fix* heuristic.

KEYWORDS: Parallel machines , intermediate stocks , production scheduling .

Main area: Mathematical Programming

1. Introdução

Realizar o planejamento do sequenciamento de tarefas implica em melhorar o controle do fluxo da cadeia produtiva. Como benefício de um bom planejamento, está a redução dos custos de produção, cumprimento das demandas estabelecidas e aumento da eficiência organizacional. O problema de realizar a programação e/ou sequenciamento de tarefas está presente em diversas áreas, destacando-se na indústria principalmente no gerenciamento da produção e logística.

O processo de dimensionar lotes de produção consiste em determinar quanto produzir de cada produto em cada período afim de atender uma demanda prevista sob as condições e capacidades operacionais existentes. Sequenciar lotes de produção significa determinar em que ordem produzi-los, de forma a melhor aproveitar os recursos produtivos e atender aos prazos estabelecidos.

De acordo com Pinedo (2008), os problemas de *scheduling* referem-se aos procedimentos de alocação, num determinado período de tempo, de recursos e equipamentos limitados para executar o processamento de tarefas. O *scheduling* possui três elementos fundamentais: a designação dos recursos que envolve a seleção de um conjunto de recursos para uma atividade conhecida; o sequenciamento de atividades, que define a ordem de execução das atividades designadas para os recursos; e a determinação dos tempos de início e término de cada atividade.

A complexidade dos problemas de dimensionamento de lotes dependem das características concebidas no modelo. As características a seguir afetam a classificação, a modelagem e a complexidade das decisões no dimensionamento dos lotes, conforme citado por Karimi *et al.* (2003): horizonte de planejamento, número de níveis (estágios da produção), números de produtos, restrições de capacidade ou recursos, deterioração de itens, demanda, estrutura de preparação de máquina para produção (*setup*) e falta de estoque.

O problema de dimensionamento de lotes não capacitado (*Uncapacitated Lot Sizing Problem* - ULSP) é a mais simples variação desta classe de problemas. Ele é caracterizado como simples nível, pois leva em conta custos de *setup* sem *carryover*, e o horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos. A demanda de cada produto ou item é conhecida em cada período, podendo variar ao longo do tempo, e os limites de capacidade não são considerados. O problema de dimensionamento de lotes capacitado (*Capacitated Lot-Sizing Problem* - CLSP) que é uma extensão do ULSP é conhecido como *large bucket* por produzir vários itens em um mesmo período, onde cada período consiste de uma semana e o horizonte de programação é usualmente de até seis meses. Como os itens competem pelo mesmo recurso, o modelo não pode ser decomposto em problemas menores, o que o faz da classe NP-difícil, conforme em Bitran & Yanasse, 1982).

O Problema Discreto de Dimensionamento e Programação de Lotes (*Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem* - DLSP) consiste na divisão do horizonte de planejamento em *small buckets* e sua principal característica é que a produção é realizada na forma de "tudo ou nada", ou seja, somente um produto é produzido por período e utiliza toda a sua capacidade produtiva, segundo Schrage (1984). Os problemas de Programação e Dimensionamento de Lotes Contínuo (*Continuous Setup Lot Sizing Problem* - CSLP) descartam a produção "tudo-ou-nada", ou seja, os lotes podem ter tamanhos variados, entretanto, os demais pressupostos fundamentais são os mesmos dos DLSP. Nos casos em que os tamanhos de lote necessários para atendimento da demanda utilizem parcialmente a capacidade do período, o modelo CSLP é a melhor alternativa em relação ao modelo DLSP.

O Problema de Programação e Dimensionamento de Lotes Compartilhado (*Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem* - PLSP) permite a utilização da capacidade dos recursos por mais de um item durante o mesmo período. Tem como principal objetivo permitir que um item j seja produzido em períodos em que a capacidade não tenha sido totalmente utilizada pelo item i ($i \neq j$) que iniciou a produção. Isso permite que a produção de j seja adiantada e evita capacidade excedente na linha de produção. A troca para j implica em custo de setup no período t em questão. Se i e j são produzidos em um único período, é especificada a ordem com que estes itens são processados, o que implica em decisões adicionais de programação (*scheduling*).

No Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes Generalizado (*General Lot Sizing and Scheduling Problem* - GLSP), cada período t é subdividido em subperíodos de tamanho variável, fixando-se um número máximo de lotes a serem produzidos por período (P_t). Cada lote está associado a um subperíodo (ou posição) no período t . Os subperíodos são indexados cronologicamente e de maneira contínua ao longo do horizonte de planejamento. O GLSP, segundo Fleischmann & Meyr (1997), é um modelo geral porque diversos modelos para dimensionamento e sequenciamento de lotes diferem dele apenas por restrições adicionais que modificam a estrutura e esforço computacional para obtenção das soluções.

O Problema de Dimensionamento de Lotes e Sequenciamento na Programação da Produção em Máquinas Paralelas (*General Lot Sizing and Scheduling Problem for Parallel Production Lines* - GLSPPL) é um modelo análogo ao GLSP, onde os itens são produzidos em um sistema de máquinas em paralelo e uma das decisões envolvidas é a alocação dos lotes de produção nas máquinas. Kang, Malik e Thomas (1999) trataram o GLSPPL considerando como função objetivo a minimização dos custos de *setup* e de estoque descontando-se o faturamento com as vendas.

Clark e Clark (2000) estudaram o GLSPPL cuja função objetivo minimiza custos de armazenagem e de *backordering*. Sua formulação matemática baseia-se numa premissa de que o número máximo de *setups* por período é pré-determinado. Foi utilizada neste trabalho, uma heurística de horizonte rolante, que tratava exatamente um subproblema composto pelos períodos mais próximos, enquanto que o subproblema composto pelos períodos mais distantes era tratado relaxando-se a integralidade de suas variáveis. Uma heurística do tipo *Relax-and-fix* é também utilizada nas variáveis que indicam as ocorrências de *setup*. Porém os resultados computacionais mostraram que somente problemas de pequeno porte puderam ser resolvidos em tempos razoáveis.

Meyr (2002) adaptou a metodologia utilizada por ele mesmo em 2000, para abordar GLSPPL com máquinas distintas, visando minimizar os custos de produção, estoque e *setup* dependente sem permitir atrasos de entrega (*backorders*). Dastidar e Nagi (2005) trataram o GLSPPL com máquinas distintas minimizando custos de estoque, *backordering* e *setup*. Uma fábrica de produtos injetáveis para tratamento médico foi utilizado como estudo de caso, na qual existe uma restrição de quantidade limitada de recursos produtivos, como misturadores, trituradores e secadores, que são instalados nas máquinas para executar determinadas tarefas.

Beraldi et al. (2008) desenvolveram heurísticas de horizonte rolante e *Relax-and-fix* para resolver o GLSPPL com *setup* dependente num ambiente de máquinas idênticas em paralelo, encontrado na indústria têxtil e de fibra de vidro. Esse trabalho introduz uma formulação compacta para o caso de máquinas idênticas, considerando apenas os custos de *setup* e desprezando os tempos de *setup*.

Józefowska e Zimniak (2008) desenvolveram um sistema de apoio à decisão aplicado em uma empresa polonesa fabricante de tubos plásticos, cujo ambiente produtivo é composto por máquinas em paralelo. Esse sistema foi baseado numa abordagem multi-objetivo que compreendeu entre seus critérios a maximização da utilização de máquina e a minimização do desvio entre o programa de produção pelo S&OP (*Sales and Operation Plan*), da perda de lucro dadas pelas faltas de produtos permitidas pelo modelo, do tempo total de *setup* e da quantidade de produtos abaixo do nível de estoque de segurança desejado.

Ferreira, Morabito e Rangel (2009) abordaram o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com tempos e custos de *setup* dependentes em uma fábrica de refrigerantes, cujo sistema produtivo é composto de 2 estágios (preparação do refrigerante e engarrafamento) que devem ser sincronizados em linhas de produção em paralelo. Com o objetivo de minimizar os custos de estoque, de *backordering* e *setup*, foram desenvolvidos duas abordagens de resolução do problema que utilizavam 15 diferentes estratégias de *Relax-and-fix* baseadas em conjugações de relaxamento de variáveis de períodos, máquinas e estágios de produção. A primeira era baseada na aplicação das estratégias de *Relax-and-fix* na formulação matemática do GLSPPL adaptada para sistemas com dois estágios (P2SMM) enquanto que a segunda utilizava um relaxamento da formulação P2SMM, considerando que o estágio de

preparação do líquido não representava um gargalo para o processo e poderia ser posteriormente programado.

Meyr e Mann (2013) apresentam uma nova solução heurística para o GLSPPL, que aborda o problema de simultaneamente decidir sobre os tamanhos e horários de lotes de produção em linhas de produção paralelas heterogêneas com relação à capacidade escassa, a tempos de preparação dependentes da sequência e à demanda determinística e dinâmica de vários produtos. Seu objetivo é minimizar os custos de manutenção de estoque, de instalação e de produção dependente da sequência. A nova heurística iterativa decompõe o problema multilinha em uma série de problemas de uma única linha, que são mais fáceis de resolver.

O presente trabalho trata do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes composto por máquinas paralelas, em um horizonte de planejamento de 1 dia de produção (8h), dividido em 4 períodos de 2h cada, que é o tempo em que cada item necessita para ser testado em uma célula de teste com temperatura controlada. O modelo trata do sequenciamento e programação da produção dos itens em 2 máquinas paralelas distintas onde os tempos de *setup* são dependentes da sequência dos itens a serem produzidos. O modelo também considera o envio dos itens para células de teste, onde estes são submetidos a testes de funcionamento é um diferencial nesse trabalho. Trata-se neste trabalho do sequenciamento e programação da produção bem como da otimização do uso das células de teste de carga, evitando o seu uso com espaços ociosos, pois estas células são espécies de fornos e não podem ter seu ciclo interrompido para que seja adicionado um novo item e sendo assim, a falta de itens para completar sua capacidade máxima acarreta custos relacionados à subutilização deste estágio.

Esse trabalho está dividido como descrito a seguir: A seção 2 apresenta a descrição do problema em estudo. Na Seção 3, é apresentada a metodologia do problema, sua formulação matemática e a implementação prática do modelo. A Seção 4 mostra as principais conclusões do trabalho.

2. Descrição do Problema

Na problemática envolvida, tem-se um ambiente de produção composto por máquinas paralelas, em um horizonte de planejamento composto de períodos e subperíodos. A construção do modelo é baseada em uma fábrica de itens eletrônicos onde alguns desses itens podem ser produzidos ao mesmo tempo em diferentes máquinas, sendo que nem todas as máquinas, por limitações técnicas, são capazes de produzir todos os itens. O fato de se produzir um novo tipo de item em alguma das máquinas, gera um custo de *setup*, que é dependente da sequência, pois dependendo dos itens que se sucedem e/ou se antecedem, o *setup* pode ser complexo ou simples, provocando a troca de componentes e ajustes nas máquinas.

Após produzidos os itens nas m máquinas paralelas, esses são enviados a um setor de teste de funcionamento, denominado “Células de Teste”, as quais são espécies de fornos que operam a uma temperatura elevada de modo a simular o funcionamento do item em condições extremas, e que contam com conectores (*slots*) apropriados ao tipo de item que deve ser testado. Cada item submetido a uma célula de teste deve ficar ali acondicionado por um tempo determinado de 2 horas, tempo este em que fica em operação simulando seu real funcionamento. Existe na empresa um único tipo diferente de célula para cada tipo de item, pois esta precisa estar adaptada ao item produzido devido aos conectores elétricos.

Um dos problemas encontrados, além do sequenciamento e programação da produção nas m máquinas paralelas, é o fato de tentar se trabalhar com as células teste de forma que suas capacidades não sejam subutilizadas. Uma vez que uma célula de teste que tem capacidade para n itens, começa a operar de forma a não estar completamente ocupada, o processo não pode ser interrompido pelo tempo de 2 horas. A espera por novos itens até a completa lotação do forno, implica no processo de resfriamento/aquecimento ou da manutenção da célula de teste aquecida durante um tempo, o que gera custos. Devido ao tempo para aquecimento da célula, é mais viável manter a célula sempre aquecida durante o horizonte de planejamento.

Se não houver controle no processo de fabricação, pode-se incorrer tanto na falta de itens para completar espaços ociosos nas células de teste, bem como na produção demasiada de um determinado tipo de item em um mesmo período, o que gera estoque intermediário de itens não testados e conseqüentemente custos com estocagem e com acúmulo de itens gerando filas.

Um dos objetivos para qual o modelo matemático foi formulado, foi o de estabelecer um controle dos estoques intermediários evitando filas em determinadas células e falta de itens em outras, e ainda limitar a quantidade de itens em estoque intermediário. A figura 1 mostra uma ideia geral do ambiente de produção.

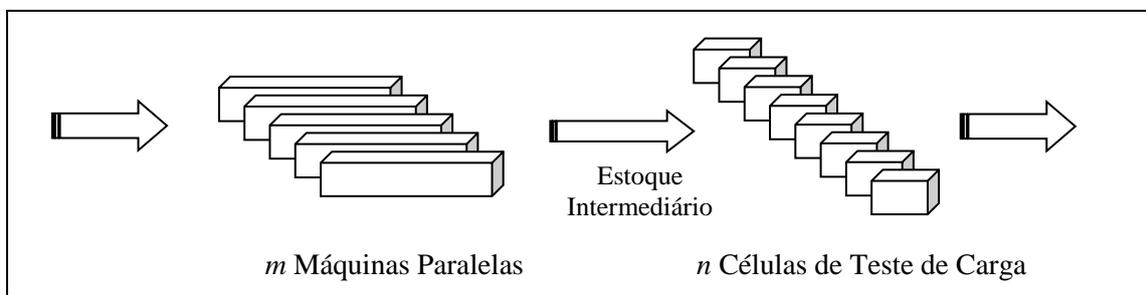


Figura 1: Esquema básico do ambiente de produção.

Observa-se que nem sempre é possível ou viável produzir uma quantidade que possa suprir a capacidade da célula de teste num período, aqui fixado em 2h. Sendo assim, na formulação do modelo matemático foi aplicada uma penalidade por cada espaço ocioso cujo valor varia conforme o tipo de item, o que na prática está relacionado com os custos de operação de um espaço vazio em um determinado período. Devido à busca pela minimização de custos, torna-se necessário sempre que possível, utilizar ao máximo a capacidade das células teste buscando atender às demandas previstas para o horizonte de planejamento.

Neste problema, o horizonte de planejamento considera um dia de trabalho de 8 h, o qual foi dividido em 4 períodos de 2h cada, pois este é o tempo necessário para testar o item nas células teste. Cada um dos períodos foi dividido em subperíodos, o que torna possível no modelo matemático, a produção de mais de um tipo de item por máquina em um mesmo período. A seção a seguir apresenta de forma detalhada e descrição do modelo matemático para este problema.

3 Metodologia

Neste tópico é apresentado o modelo matemático, os dados referentes ao problema, os resultados encontrados e os cenários para diferentes números de itens.

3.1 Modelo Matemático

O modelo proposto para o problema em estudo foi adaptado do modelo de programação inteira mista (MIP) de Meyr (2002) e Kawamura (2009).

No modelo proposto por esses autores, o horizonte de planejamento é dividido simultaneamente em T períodos e W subperíodos, sendo que a cada período t é constituído de subperíodos s . Em cada subperíodo permite-se a produção de apenas um tipo de produto, e a sequência de subperíodos identifica os lotes a serem produzidos. A divisão em subperíodos permite identificar a sequência de tarefas na máquina, assim como associar os respectivos custos e tempos de *setup* dependentes (Kawamura, 2009). Para otimizar a saída dos itens nas m máquinas paralelas, neste trabalho estão sendo propostas novas restrições para minimizar o estoque intermediário entre a saída das máquinas paralelas e a entrada nas células teste, e maximizar a carga de cada célula teste. Foi inserido um custo (penalidade) por item, na operação de uma célula teste com capacidade ociosa.

A seguir é apresentado o modelo matemático para o problema em estudo.



Parâmetros:

- SP_l : conjunto de itens que podem ser produzidos na máquina l ;
- D_i : demanda do item i no horizonte de planejamento;
- CP_{lt} : capacidade de produção disponível na máquina l no período t ;
- cs_{ijl} : custo de *setup* para produzir o item j imediatamente após o item i na máquina l ;
- cp_{il} : custo de produção para produzir o item i na máquina l ;
- h_i : custo de manutenção de uma unidade do item i não testado em estoque por período;
- p_{il} : tempo consumido para produção de uma unidade do item i na máquina l ;
- $lmin_{il}$: lote mínimo do item i produzido na máquina l .
- st_{ijl} : tempo de *setup* para a produção do item j imediatamente após o item i na máquina l ;
- I_{i0} : quantidade de item i não testado em estoque, no início do horizonte de planejamento;
- x_{i0} : 1, se a máquina está preparada para produzir o item i na máquina l no início do horizonte de planejamento; 0, caso contrário;
- cf_i : custo da falta de cada unidade do item i para completar a capacidade máxima da célula teste;
- W_t : Conjunto de subperíodos contidos no período t ;
- CCT_i : capacidade da célula de teste para o item i ;
- CAT : capacidade de armazenamento de itens testados para todo o horizonte de planejamento;
- $CANT_t$: capacidade de armazenamento de itens não testados para cada período t .

Variáveis de Decisão:

- q_{ils} : quantidade do item i produzido na máquina l no subperíodo s ;
- x_{ils} é igual a 1, se a máquina l está preparada para produzir o item i no subperíodo s ; e 0, caso contrário;
- y_{ijls} é igual a 1, se há *setup* do item i para o item j na máquina l no subperíodo s ; e 0, caso contrário;
- I_{it} : quantidade do item i não testado em estoque no final do período t ;
- qf_{it} : quantidade faltante para completar a capacidade máxima da célula teste do item i no período t ;
- qc_{it} : quantidade do item i que será enviado à célula teste dedicada a este item, no período t .

Modelo matemático:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T h_i \cdot I_{it} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W c_{sijl} \cdot y_{ijls} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{l=1}^M \sum_{s=1}^W cp_{il} \cdot q_{ils} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{t=1}^T cf_i \cdot qf_{it} \quad (1)$$

$$I_{i,t-1} + \sum_{l=1}^M \sum_{s \in W_t} q_{ils} - I_{it} = qc_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad i \in SP_l \quad (2)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N qc_{it} \leq CAT \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N I_{it} \leq CANT_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$\sum_{i \in SP_l} \sum_{s \in W_t} p_{il} \cdot q_{ils} + \sum_{i \in SP_l} \sum_{j \in SP_l} \sum_{s \in W_t} st_{ijl} \cdot y_{ijls} \leq CP_{lt} \quad l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$p_{il} \cdot q_{ils} \leq CP_{lt} \cdot x_{ils} \quad i \in SP_l; l = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T; s \in S_{lt} \quad (6)$$

$$q_{ils} \geq \text{min}_{il} \cdot (x_{ils} - x_{il,s-1}) \quad i \in SP_l; l = 1, \dots, M; s \in W_t \quad (7)$$

$$qc_{it} + qf_{it} = CCT_i \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (8)$$

$$\sum_{t=1}^T qc_{it} = D_i \quad i = 1, \dots, N \quad (9)$$

$$\sum_{i \in S_l} x_{ils} = 1 \quad l = 1, \dots, M; s \in W_t \quad (10)$$

$$y_{ijls} \geq x_{il,s-1} + x_{jls} - 1 \quad i, j \in SP_l; l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, W \quad (11)$$

$$x_{i0} = 0 \quad i \in SP_l; l = 1, \dots, M \quad (12)$$

$$x_{ils} \in \{0,1\} \quad i \in SP_l; l = 1, \dots, M; s = 1, \dots, W \quad (13)$$

$$x_{ils}, q_{ils}, qc_{it}, I_{it}, qf_{it} \in Z^+; y_{ijls} \geq 0 \quad (14)$$

A função objetivo (1) é a minimização dos custos variáveis com armazenagem, *setup*, produção e custos de operação das células teste com espaços ociosos. A restrição (2) realiza o balanço de estoques, relacionando quantidades produzidas, estoque intermediário de itens a serem testados com a capacidade da célula teste para cada item por período em todo o horizonte de planejamento. A restrição (3) garante que a quantidade de itens testados nas células de teste durante o horizonte de planejamento não ultrapasse a capacidade máxima de armazenamento de itens testados. A restrição (4) garante que a quantidade de itens não testados, que compõem o estoque intermediário, não exceda a capacidade de armazenamento de itens não testados. A restrição (5) garante a quantidade de horas consumidas na produção, adicionada da quantidade de horas necessárias para preparação da máquina, seja menor ou igual à capacidade disponível em cada máquina em cada período de tempo. A restrição (6) indica que somente haverá produção do item i no subperíodo s se a máquina estiver preparada para o item ($x_{ils} = 1$). A restrição (7) impõe uma condição de lote mínimo de produção para cada tipo de item em um subperíodo e que somente é ativada, quando ocorre a preparação de máquina para um novo item. A restrição (8) impõe que a quantidade faltante para completar a capacidade máxima da célula teste do item i no período t é a diferença entre a capacidade da célula de teste para o item i e a quantidade do item i que será enviado à célula de teste dedicada a este item, no período t . A restrição (9) determina

que a quantidade total do item i que será enviada à célula de teste dedicada a este item em todos os períodos, deve ser igual à demanda do item i estabelecida para o horizonte de planejamento. A restrição (10) determina que a máquina esteja preparada para produzir somente um item por máquina em cada subperíodo s . A restrição (11) indica se houve mudança de produção do item i para o item j na máquina l entre os subperíodos. A restrição (12) indica que as máquinas não estão preparadas para nenhum item no início do horizonte de planejamento T . A restrição (13) indica que a variável x_{ils} é binária e a restrição (14) indica que as variáveis x_{ils} , q_{ils} , qc_{it} , I_{it} e qf_{it} são inteiras não negativas e que as variáveis y_{ijls} são reais não negativas, pois pela formulação do modelo, não há necessidade de definir as variáveis y_{ijls} como inteiras, pois estas são obtidas da combinação de variáveis binárias.

3.2 Implementação do Modelo

Com objetivo de validar o modelo, dados foram fornecidos pela empresa na qual este problema é objeto de estudo.

As tabelas 1 a 4 apresentam os valores para os parâmetros utilizados.

Item	Demanda (D_i)	Capacidade da célula de teste (CCT_i)	Custo da falta na célula de teste (cf_i)	Estoque inicial de itens não testados (I_{i0})	Custo de estoque (h_i)
Item 1	28	10	3	0	4
Item 2	22	6	7	0	3
Item 3	30	8	8	0	3
Item 4	15	4	7	0	3
Item 5	16	5	6	0	4
Item 6	20	6	6	0	4
Item 7	19	6	7	0	4
Item 8	18	5	6	0	3

Tabela 1: Parâmetros para cada item.

		Custo de produção (cp_{iu})	Tempo de produção (p_{iu})	Lote mínimo por item i ($lmin_{iu}$)
Item 1	Máq. 1	8	6	2
	Máq. 2	9	8	2
Item 2	Máq. 1	7	4	2
	Máq. 2	9	4	2
Item 3	Máq. 1	7	4	3
	Máq. 2	7	4	3
Item 4	Máq. 1	5	2	2
	Máq. 2	4	2	2
Item 5	Máq. 1	6	4	2
	Máq. 2	5	6	2
Item 6	Máq. 1	9	6	1
	Máq. 2	8	6	1
Item 7	Máq. 1	6	6	2
	Máq. 2	5	10	2
Item 8	Máq. 1	5	4	1
	Máq. 2	6	8	1

Tabela 2: Parâmetros para cada item em diferentes máquinas.

No problema implementado, a capacidade de armazenamento de itens testados para todo o horizonte de planejamento (CAT) foi fixada em 300 itens. A capacidade de armazenamento de itens não testados para cada período t ($CANT_t$) foi, para cada um dos períodos de respectivamente 80 itens.

Todos os itens podem ser produzidos em qualquer uma das máquinas, o que foi definido pelas variáveis (SP_l). Observa-se que o modelo apresentado neste artigo permite restringir máquinas de fabricar alguns tipos de itens, mas devido à característica dos itens fabricados nesta

linha de produção essa restrição não foi necessária. Cada período t foi dividido em 8 subperíodos para fins de modelagem do problema, sendo importante salientar que após a resolução e análise dos resultados, a duração de um subperíodo na prática, é dada pela quantidade produzida de cada item no subperíodo s , multiplicada pelo tempo de produção do respectivo item, o que torna os subperíodos de tamanho variável. Todas as máquinas estavam preparadas para a produção, no início do horizonte de planejamento. A capacidade de produção CP_{lt} (em minutos) disponível em cada máquina l por período t é apresentada na tabela 3.

	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
Máq. 1	120	120	120	60
Máq. 2	120	120	120	100

Tabela 3: Capacidade de produção disponível em cada máquina l

Na tabela 4, é mostrado o custo de *setup* (cs_{ijl}) e tempo de *setup* (st_{ijl}) para produzir o item j imediatamente após o item i na máquina l .

Custo de <i>Setup</i> (cs_{ijl}) e Tempo de <i>Setup</i> (st_{ijl}): [cs_{ijl} ; st_{ijl}]																	
	Máquina 1								Máquina 2								
	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8	
Item 1	[0; 0]	[4; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[4; 3]	[3; 3]	[4; 3]	[3; 3]	[0; 0]	[4; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[4; 3]	[3; 3]	[4; 3]	[3; 3]	
Item 2	[2; 2]	[0; 0]	[2; 2]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[2; 2]	[0; 0]	[2; 2]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[1; 1]	
Item 3	[4; 4]	[4; 4]	[0; 0]	[4; 4]	[5; 4]	[4; 4]	[4; 4]	[4; 4]	[3; 4]	[4; 4]	[0; 0]	[4; 4]	[5; 4]	[2; 4]	[4; 4]	[2; 4]	
Item 4	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[0; 0]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[0; 0]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	[3; 3]	
Item 5	[1; 1]	[2; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[0; 0]	[1; 1]	[3; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[2; 1]	[1; 1]	[1; 1]	[0; 0]	[1; 1]	[3; 1]	[1; 1]	
Item 6	[2; 2]	[2; 2]	[2; 2]	[3; 3]	[2; 2]	[0; 0]	[2; 2]	[3; 3]	[2; 2]	[1; 2]	[2; 2]	[3; 3]	[2; 2]	[0; 0]	[2; 2]	[3; 3]	
Item 7	[2; 2]	[3; 2]	[2; 2]	[3; 3]	[2; 2]	[2; 2]	[0; 0]	[3; 3]	[2; 2]	[3; 2]	[2; 2]	[3; 3]	[2; 2]	[2; 2]	[0; 0]	[3; 3]	
Item 8	[3; 1]	[3; 1]	[3; 2]	[2; 1]	[4; 2]	[3; 2]	[2; 1]	[0; 0]	[2; 1]	[1; 1]	[1; 2]	[1; 1]	[2; 2]	[1; 2]	[1; 1]	[0; 0]	

Tabela 4: Custo e tempo de *setup* dependente da sequência em cada máquina.

O modelo foi implementado e resolvido utilizando IBM ILOG CPLEX *Optimization Studio* 12.6 com interface OPL. Para execução do modelo foi utilizado um computador com processador *Intel Core i5 (2M Cache, 1,7GHz)* e 8Gb de memória RAM.

Devido ao elevado tempo computacional verificado, para obtenção de uma solução inteira bem como da solução ótima, a qual não foi encontrada devido às dimensões do problema, optou-se por utilizar uma heurística de resolução baseado na relaxação das variáveis inteiras.

Assim, na obtenção de uma solução viável para o problema foi utilizada a heurística *Relax-and-fix* (Mercé e Fontan (2003); Kawamura (2009)), a qual se baseia na partição das variáveis inteiras do problema criando P conjuntos distintos, Q_i , $i=1, \dots, P$, sendo que o número P de conjuntos determina o número de iterações da heurística (Moraes, 2012). Ainda conforme Moraes (2012), “em uma iteração n , apenas as variáveis do conjunto Q_n são definidas como inteiras e as demais variáveis inteiras são relaxadas ou fixadas”.

Na aplicação da heurística procedeu-se de forma que em um primeiro momento foi mantida a condição de integridade para as variáveis q_{ils} , e I_{it} pertencentes ao primeiro período das máquinas 1 e 2 e relaxadas as integridades destas mesmas variáveis nos demais períodos. Depois de encontrados os valores correspondentes a estas variáveis no primeiro período, estes valores foram fixados como parâmetros e então as variáveis q_{ils} , e I_{it} das máquinas 1 e 2 do segundo período foram declaradas como inteiras e as dos períodos subsequentes foram relaxadas e assim sucessivamente até completar o último período. A tabela 5 apresenta os resultados da execução do modelo matemático com a heurística *Relax-and-fix*, executada durante 1 hora, considerando os parâmetros apresentados nas tabelas 1 a 4.

Período	Descrição	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Item 8
Período 1	Quantidade produzida Máq. 1	10	0	0	0	0	0	6	5
	Quantidade produzida Máq. 2	0	4	8	4	3	6	0	0
	Quant. enviada à célula de teste	10	4	8	4	3	6	6	5
	Quant. faltante para completar célula	0	2	0	0	2	0	0	0
	Quant. em estoque intermediário	0	0	0	0	0	0	0	0
Período 2	Quantidade produzida Máq. 1	8	6	0	0	0	1	3	4
	Quantidade produzida Máq. 2	0	0	8	4	3	5	2	0
	Quant. enviada à célula de teste	8	6	8	4	3	6	5	4
	Quant. faltante para completar célula	2	0	0	0	2	0	1	1
	Quant. em estoque intermediário	0	0	0	0	0	0	0	0
Período 3	Quantidade produzida Máq. 1	6	0	0	0	5	0	6	5
	Quantidade produzida Máq. 2	2	6	8	4	0	4	0	0
	Quant. enviada à célula de teste	8	6	8	4	5	4	6	5
	Quant. faltante para completar célula	2	0	0	0	0	2	0	0
	Quant. em estoque intermediário	0	0	0	0	0	0	0	0
Período 4	Quantidade produzida Máq. 1	2	4	0	0	0	0	2	4
	Quantidade produzida Máq. 2	0	2	6	3	5	4	0	0
	Quant. enviada à célula de teste	2	6	6	3	5	4	2	4
	Quant. faltante para completar célula	8	0	2	1	0	2	4	1
	Quant. em estoque intermediário	0	0	0	0	0	0	0	0
Demanda Horizonte de Planejamento		28	22	30	15	16	20	19	18
Capacidade da célula de teste por período		10	6	8	4	5	6	6	5

Tabela 5: Resultados da execução do modelo matemático.

A seguir é mostrado como exemplo, o resultado obtido para as variáveis q_{ils} para a primeira máquina no primeiro período onde cada coluna representa um subperíodo s pertencente ao primeiro período.

$$q_{i1s} = \begin{matrix} \text{Item 1} \\ \text{Item 2} \\ \text{Item 3} \\ \text{Item 4} \\ \text{Item 5} \\ \text{Item 6} \\ \text{Item 7} \\ \text{Item 8} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 8; \quad s = 1, \dots, 8 \quad (1)$$

Por meio dos resultados das variáveis q_{ils} , é possível verificar as quantidades produzidas em cada subperíodo bem como a ordem em que essas tarefas serão realizadas. Na matriz (1) apresentada anteriormente, pode-se verificar que 5 unidades do item 8 foram produzidas no primeiro subperíodo onde cada uma destas unidades consumiu um tempo de 4min totalizando assim, 20min. Em seguida há *setup* do item 8 para o item 1 o qual possui duração de 1min. Na sequência foram produzidas 10 unidades do item 1, onde cada uma destas unidades consumiu um tempo de 6min totalizando 60min. Há então, *setup* do item 1 para o item 7 com duração de 3min. Finalmente foram produzidas 6 unidades do item 7 sendo que cada uma destas unidades consumiu um tempo de 6min totalizando assim, 36min. Proceda-se com essa interpretação de forma análoga para todos os demais períodos em todas as máquinas pertencentes ao horizonte de planejamento.

A ilustração apresentada no quadro 1, mostra o sequenciamento da produção nas duas máquinas considerando as quantidades de cada item conforme apresentado na tabela 5, e o sequenciamento das tarefas segundo os resultados das variáveis q_{ils} (quantidade do item i

produzido na máquina l no subperíodo s). Os dados se referem ao produto das quantidades fabricadas em cada subperíodo pelo tempo de produção ($q_{ils} \cdot p_{il}$) de cada item, bem como o tempo de *setup* entre itens. O tempo em que a máquina fica ociosa até o início do próximo período é representada por “Oc” nesta ilustração.

Máquina 1	Período 1 - 120min		Período 2 - 120min	
	Item(i)/ <i>setup</i> (st)	i: 8 st i: 1 st i: 7	i: 7 st i: 6 st i: 1 st i: 2 st i: 8 Oc.	
	Tempo (min)	20 1 60 3 36	18 2 6 1 48 2 24 1 16 2	
	Período 3 - 120min		Período 4 - 60min	
Item(i)/ <i>setup</i> (st)	st i: 1 st i: 7 st i: 5 st i: 8 Oc.	i: 8 st i: 2 st i: 7 st i: 1		
Tempo (min)	1 36 3 36 2 20 1 20 1	16 1 16 1 12 2 12		
Máquina 2	Período 1 - 120min		Período 2 - 120min	
	Item(i)/ <i>setup</i> (st)	i: 6 st i: 3 st i: 2 st i: 4 st i: 5 Oc.	st i: 3 st i: 5 st i: 4 st i: 6 st i: 7 Oc.	
	Tempo (min)	36 1 32 4 16 1 8 3 18 1	1 32 4 18 1 8 3 30 2 20 1	
	Período 3 - 120min		Período 4 - 100min	
Item(i)/ <i>setup</i> (st)	st i: 3 st i: 1 st i: 6 st i: 2 st i: 4 Oc.	i: 4 st i: 6 st i: 2 st i: 5 st i: 3 Oc.		
Tempo (min)	2 32 4 16 3 24 2 24 1 8 4	6 3 24 2 8 1 30 1 24 1		

Quadro 1: Sequenciamento de tarefas em cada máquina.

Como resultado por meio do *Relax-and-fix* para esta aplicação no ambiente industrial foi obtida função objetivo no valor de 1.360,00, onde, deste total tem-se: custo de *setup* de 70,00, custo de produção 1.122,00, custo com teste de carga 168,00, não havendo custo de armazenagem já que nenhum item foi estocado. Obteve-se também o valor do limitante inferior de 1.242,10, onde foi calculado o *gap*, conforme expressão (2), entre a solução encontrada pelo *Relax-and-fix* e este limitante obtendo-se o índice de 9,49%.

$$gap = \frac{(Função\ objetivo\ da\ heurística - Limitante\ inferior)}{Limitante\ inferior} \cdot 100 \quad (2)$$

Mais testes com a estratégias de relaxamento de variáveis estão sendo realizados pelos autores com objetivo de estudar de que forma as partições do problema inicial bem como a ordem de resolução dos subproblemas gerados interferem na solução e respectiva melhoria no *gap* calculado. Modelagens considerando mais instâncias ainda estão em fase de testes, as quais poderão ser futuramente publicadas.

Os resultados apresentam uma boa estratégia para ser aplicada na empresa no que se refere ao sequenciamento e programação da produção. Observa-se que na empresa estudada, tal procedimento é realizado considerando apenas o planejamento manual por parte da gerência de produção, e a implantação de um modelo de otimização tende a trazer significativos avanços no planejamento das tarefas de modo a cumprir as demandas estabelecidas minimizando custos operacionais.

4. Conclusões

O principal objetivo neste trabalho foi o fato de estabelecer um modelo matemático que fosse capaz de atender ao atual cenário da linha de produção em um caso específico de uma indústria de itens eletrônicos. Testes realizados com os dados reais da empresa, mostraram que o modelo matemático está formulado adequadamente, atendendo às necessidades da programação de produção e trazendo resultados satisfatórios.

O modelo matemático apresentado neste artigo apresentou-se bem adaptado para a resolução do problema de otimização dos recursos e tempo. Bons resultados foram obtidos quando comparados àqueles atingidos pelos métodos atualmente utilizados nessa empresa.

Devido ao tempo computacional exaustivo para obtenção da solução exata, optou-se por utilizar uma heurística de resolução, conforme citado anteriormente.

Resultados promissores que heurísticas de resolução podem trazer, conduziram os autores a estudarem outros métodos que possam trazer boas soluções em um tempo computacional razoável. Alguns testes com heurísticas baseadas principalmente em estratégias de relaxamento de variáveis inteiras, destacando-se a *Relax-and-fix*, estão sendo realizados atualmente pelos autores para este modelo e poderão ser objeto de publicações futuras

Referências

- Beraldi, P., Ghiani, G., Grieco, A., Guerriero, E.** Rolling-horizon and fix-and-relax heuristics for the parallel machine lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs. *Computers and Operations Research*, 35, pp. 3644-3656, 2008.
- Bitran, G.R., Yanasse, H.H.** Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, 28-10, pp. 1174-1186, 1982.
- Clark, A., Clark, S.** Rolling-horizon lot-sizing when set-up times are sequence dependent. *International Journal of Production Research*, 38, pp. 2287-2307, 2000.
- Dastidar, S.G., Nagi, R.** Scheduling injection molding operations with multiple resource constraints and sequence dependent setup times and costs. *Computers and Operations Research*, 32, pp. 2987-3005, 2005.
- Ferreira, D., Clark, A. R., Almada-Lobo, B., Morabito, R.** Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. *International Journal of Production Economics* 136 (2), 255-265, 2012.
- Fleischmann, B.; Meyr, H.** The general lot sizing and scheduling problem. *OR Spektrum*, v. 19 n. 1, p. 11-21, 1997.
- Józefowska, J. Zimniak, A.** Optimization tool for short-term production planning and scheduling. *International Journal of Production Economics*, 112, pp. 109-120, 2008.
- Kang, S., Malik, K., Thomas, L.J.** Lot sizing and scheduling on parallel machines with sequence-dependent setup costs. *Management Science*, 45-2, pp. 273-289, 1999.
- Karimi, B., Fatemi Ghomi S.M.T., Wilson, J.M.** The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega* 31, 365-378, 2003.
- Kawamura, S. M.** Aplicação da Heurística *Relax-and-Fix* no Problema de Dimensionamento e Sequenciamento de Lotes de Produção em Máquinas Distintas em Paralelo. *Anais do XLII SBPO*. Bento Gonçalves, 2009.
- Mercé, C. e Fontam, G.** Mip-based heuristics for capacitated lotsizing problems. *International Journal of Production Economics*, 85, 97-111, 2003.
- Moraes, L. C. C.; Santos M. O.** Heurísticas *Relax-and-fix* para o Problema de Dimensionamento de Lotes com Janelas de Tempo de Execução. *Anais do Congresso Latino Iberoamericano de Investigación Operativa*. Rio de Janeiro, 2012.
- Meyr, H.** Simultaneous lot sizing and scheduling on parallel machines. *European Journal of Operational Research*, 139, pp. 227-292, 2002.
- Meyr H., Matthias, M.** A decomposition approach for the General Lotsizing and Scheduling Problem for Parallel production Lines. *European Journal of Operational Research*, 229, pp. 718-731, 2013.
- Pinedo, M.** . Scheduling: theory, algorithms, and systems. Springer Verlag. R Development Core Team., R: A Language and Environment for Statistical Computing. R *Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Áustria, 2008.
- Schrage, L.** Order allocation for stock cutting in the paper industry. *Operations Research*, 50, pp. 324-332, 2002.