DECISÕES EM INVESTIMENTOS COM A LÓGICA *FUZZY*: UMA APLICAÇÃO SOB RISCO NO MERCADO FINANCEIRO

José Victor Pereira de Souza
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Centro Acadêmico do Agreste – CAA, PPGEP
Rodovia BR 104, S/N, Km 59, Nova Caruaru, Caruaru – PE
E-mail: victor.souza@ufpe.br

Maísa Mendonça Silva
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Centro Acadêmico do Agreste – CAA, PPGEP
Rodovia BR 104, S/N, Km 59, Nova Caruaru, Caruaru – PE
E-mail: maisa.ufpe@yahoo.com.br

RESUMO

A incerteza é algo inerente à vida humana. Pode ser classificada em epistêmica ou aleatória. Quando a tomada de decisão acontece sob condições de risco, a Teoria da Decisão se faz relevante nesse processo. Além disso, se houver imprecisão quanto às informações disponíveis para compor o problema de decisão, a lógica *fuzzy* pode ser um meio interessante para contornar essa situação. Sendo assim, o presente artigo associa a Teoria da Decisão com a lógica *fuzzy* para propor um modelo de decisão no mercado financeiro, mais precisamente no investimento de ativos financeiros. O modelo proposto será aplicado no mercado financeiro brasileiro e alguns testes estatísticos serão realizados para comprovar a sua robustez.

PALAVRAS CHAVE. Teoria da Decisão, Lógica *Fuzzy*, Mercado Financeiro.

Área: ADM - Apoio à Decisão Multicritério

ABSTRACT

Uncertainty is inherent in human life. It can be classified as random or epistemic. When decision making happens under conditions of risk, Decision Theory is relevant in this process. In addition, if there is uncertainty with regard to the information available to deal with the decision problem, the *fuzzy* logic can be an interesting way to work around this situation. Therefore, this article associates the decision theory with *fuzzy* logic to propose a decision model for financial market, more precisely in financial assets investment. The proposed model will be applied in the Brazilian financial market and some statistical tests will be performed to prove its robustness.

KEYWORDS. Decision Theory. *Fuzzy* Logic. Financial Market.

Area: Multicriteria Decision Support

1. Introdução

A necessidade humana de tomar decisões é algo indubitável. O ser humano lida com a tomada de decisões muitas vezes durante a sua vida, buscando satisfazer as suas necessidades e desejos. As decisões podem ser simples ou complexas, dependendo da quantidade de variáveis envolvidas no processo e como elas se relacionam. Em função do nível de estruturação são classificadas como estruturadas (tarefas programadas, procedimentos bem definidos), semi-estruturadas (quando não são totalmente definidas por procedimentos padrões) e não-estruturadas, isto é, quando as decisões são de natureza única, singular (ALMEIDA; COSTA; MIRANDA, 2002).

Quando se vai para a área de Finanças, mais precisamente, a de investimentos, não é diferente, pelo contrário, as tomadas de decisões se fazem sempre presentes, geralmente, envolvidas em ambientes de incerteza, pois como afirma Campello de Souza (2007): “a incerteza é a marca indelével do universo”.

Para Zimmermann (2000), a incerteza surge nos mais diversos contextos e por várias causas: falta de informação, abundância de informação (complexidade), conflito de evidências (provas), ambiguidade na linguagem, medição (avaliação) imprecisa e tradução de crença (opinião). Ainda segundo aquele autor, a incerteza surge, resumidamente, de acordo com a qualidade e quantidade de informações disponíveis (ZIMMERMANN, 2000).

Quando o problema de decisão em investimentos envolve ativos financeiros, isto é, todo tipo de aplicação financeira, existem muitos fatores que influenciam o processo decisório, tais como: o objetivo do investimento (o porquê de investir), a idade do investidor, o prazo da aplicação, o volume de recursos a ser aplicado, o perfil de tolerância ao risco do investidor e o retorno do investimento. Além disso, outro ponto relevante é: em qual ou quais ativos investir, visto que existem vários tipos de investimentos e centenas, senão, milhares, dos chamados “produtos financeiros”.

Dessa forma, levando-se em consideração àqueles fatores, torna-se quase inviável tomar decisões na área de investimentos em ativos financeiros sem utilizar alguma ferramenta e/ou teoria, uma vez que as variáveis que compõem o problema de decisão nessa área são muitas e as suas relações complexas, além de envolver muita incerteza.

Sendo assim, para fins deste trabalho, será utilizada a Teoria da Decisão, visto que ela fornece uma “estrutura e metodologia para a tomada de decisão racional quando os resultados são incertos” (HILLIER; LIEBERMAN, 2006). Além disso, para abstrair melhor a realidade, a qual pode apresentar incerteza quanto a parâmetros, variáveis e/ou resultados, far-se-á uso da lógica *fuzzy*.

Este trabalho tem como objetivo mostrar alguns conceitos relacionados com investimentos em ativos financeiros, além de apresentar a Teoria da Decisão como ferramenta para problemas de decisão com incerteza. Além disso, o objetivo principal deste trabalho é formular um modelo lógico-racional que envolva a decisão de em qual ativo financeiro investir dado que a natureza escolhe, independente da vontade do decisor (no caso, o investidor), uma determinada faixa de intervalo da taxa Selic. Por fim, aplicar o modelo, com dados reais, no mercado financeiro brasileiro. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e uma pesquisa na internet, a qual permitiu a obtenção dos dados das variáveis que comporão o modelo, sendo este artigo classificado como por documentação indireta, no entendimento de Rampazzo (2009), visto que os dados foram obtidos de outros pesquisadores.

2. Teoria da Decisão

Toda e qualquer decisão é tomada sob uma das seguintes condições, as quais são apresentadas em Gomes, Gomes e Almeida (2009):

- **Condições de certeza:** nesse caso, a decisão é tomada com pleno conhecimento de todos os estados da natureza e com total certeza do resultado final, isto é, atribui-se uma probabilidade de ocorrência de 100%.
- **Condições de risco:** quando existe o conhecimento das probabilidades que estão associadas a cada um dos estados da natureza e a quantidades desses é conhecida, diz-se

que a decisão é tomada sob risco.

- **Condições de incerteza ou de ignorância:** aqui não se conhece todos os estados da natureza e, aos que são conhecidos, atribui-se uma probabilidade incerta ou não se tem a probabilidade associada aos eventos.
- **Condições de competição ou conflito:** nesse caso, as estratégias e os estados da natureza são determinados pelos competidores, isto é, dois ou mais decisores que influenciam mutuamente o resultado.

Quando se trata de problema de decisão que envolve análise probabilística há que se determinar qual o tipo de incerteza que permeia o processo decisório: a incerteza aleatória e/ou a incerteza epistêmica.

A incerteza aleatória (conhecida também como Incerteza Objetiva, Tipo I, Tipo A, Estocástica) corresponde à variabilidade inerente aos ambientes probabilísticos, das características estocásticas. Já a incerteza epistêmica (denominada também por Incerteza Subjetiva, Tipo II, Tipo B, Dedutível) advém da ignorância científica, da incerteza na avaliação, da falta e/ou baixa qualidade de informação, da impossibilidade de confirmação ou observação ou de outra deficiência de conhecimento (CAMPOS; NEVES; CAMPELLO DE SOUZA, 2007). Diante disso, pode se conceituar dois tipos de probabilidades: a probabilidade objetiva ou frequentista e a probabilidade subjetiva (SILVA; ALMEIDA FILHO, 2013). A primeira está relacionada com a incerteza aleatória, com a probabilidade clássica ou da frequência relativa. A probabilidade subjetiva guarda forte relação com a incerteza epistêmica, representando o grau de crença lógico de um indivíduo ou sistema intencional, ou seja, o seu conhecimento sobre determinado assunto. Para extrair essa probabilidade do indivíduo ou sistema intencional faz-se necessário a elicitação ou edução daquele conhecimento.

Zimmermann (2000) propõe um esquema para auxiliar no tratamento de incerteza e para definir qual teoria é a mais adequada para lidar com ela, o qual apresenta quatro dimensões: causas da incerteza, informação disponível (*input*), tipo de escala de medida e informação requerida (*output*), como pode ser visto na tabela a seguir:

Tabela 2.1: Modelo para lidar com a incerteza.

1. Causas da incerteza	**3. Tipo de escala de medida**
a) Falta de informação	a) Nominal
b) Abundância de informação	b) Ordinal
c) Conflito de evidências (provas)	c) Intervalar
d) Ambiguidade	d) De razão
e) Medição/Avaliação	
f) Crença (opinião)	
2. Informação disponível (*input*)	**4. Informação requerida (*output*)**
a) Numérica	a) Numérica
b) Intervalar	b) Intervalar
c) Linguística	c) Linguística
d) Simbólica	d) Simbólica

Fonte: Adaptado de Zimmermann (2000).

Dessa maneira, cada teoria que lida com a incerteza pode ser caracterizada por um vetor (perfil) composto por essas quatro dimensões. Sendo assim, cada teoria é adequada a um contexto específico.

O problema que será tratado neste trabalho apresenta, basicamente, o vetor {a; a; d; a}, isto é, a falta de informação é a causa principal da incerteza, a informação disponível (*input*) e a requerida (*output*) é numérica e o tipo de escala de medida é de razão. Optou-se, então, pela Teoria da Decisão, uma vez que ela lida muito bem com aquele vetor.

A Teoria da Decisão de Abraham Wald divulgada em 1950 em seu livro intitulado *Statistical Decisions Functions* é uma das mais estudadas e propagadas quando o assunto envolve decisão e incerteza (CAMPELLO DE SOUZA, 2007).

Em termos gerais, num problema de decisão, o decisor dever escolher uma alternativa (quando a problemática é de escolha) de um conjunto de possíveis alternativas de decisão. Essa escolha é feita diante de incerteza, visto que o resultado será afetado por fatores que não são controlados pelo decisor, que acontecem de forma aleatória. Esses fatores irão compor as situações possíveis, as quais são denominadas de estados da natureza ($\boldsymbol{\theta}$). Para cada combinação de uma alternativa com um estado da natureza tem-se uma consequência, também chamada de bem, prêmio ou *payoff*.

O prêmio é "uma medida quantitativa do valor para o tomador de decisão das consequências do resultado" (HILLIER; LIEBERMAN, 2006). Para mostrar as consequências de cada combinação alternativa/estado da natureza, pode-se utilizar da matriz de decisão, também conhecida como tabela de prêmios.

Essa matriz permite uma melhor visualização do problema de decisão e contribui para encontrar a decisão ótima para o tomador de decisão, segundo algum critério.

Hillier e Lieberman (2006) trazem três possibilidades de critérios:

- **Regras Minimax ou critério do prêmio mínimo máximo:** provém da teoria dos jogos. Representa uma atitude conservadora por parte do decisor, pois este acredita que a natureza escolherá o pior estado para ele, escolhendo, então, a alternativa que apresenta o melhor resultado para aquele estado. Esse critério é mais usado quando não se tem informação *a priori* alguma sobre os estados da natureza.
- **Critério da Probabilidade Máxima:** nesse caso, o decisor escolhe a melhor alternativa para ele para o estado da natureza que apresenta a maior probabilidade. Contudo, fazendo isso, o decisor ignora informações relevantes, pois considera apenas o estado da natureza mais provável.
- **Regra de Decisão de Bayes:** esse critério utiliza melhor as estimativas das probabilidades dos respectivos estados da natureza. Nesse caso, o decisor escolhe a alternativa que apresenta o maior valor esperado do prêmio.

As estimativas das probabilidades de cada estado da natureza podem ser obtidas objetiva ou subjetivamente. No primeiro caso, pode vir de uma base de dados (histórico). No segundo, de um especialista.

Dependendo do conhecimento que se tem dos estados da natureza, o problema de decisão pode ocorrer sob risco ou sob incerteza. No primeiro caso, tem-se uma distribuição de probabilidade sobre o comportamento do estado da natureza, de maneira que é possível formular o problema com base em valores esperados para as consequências. No segundo caso, não há disponíveis as probabilidades sobre os estados da natureza, apesar de eles serem conhecidos (ALMEIDA, 2013).

3. Teoria *Fuzzy*

A lógica tradicional de conjuntos matemáticos, a qual é chamada também de booleana, lógica binária, lógica clássica ou lógica nítida/rígida (*crisp logic*) traz em sua essência uma ideia dicotômica de pertinência de elementos em determinado conjunto, isto é, para qualquer elemento x de um universo S, ou ele pertence ao conjunto X ou ele não pertence, ou seja: $x \in X$ ou $x \notin X$.

Dessa maneira, percebe-se que a lógica tradicional inclui ou exclui totalmente um elemento num conjunto, não permitindo, assim, outras possibilidades, pois ou ele está num conjunto ou não está. Por exemplo: uma animal pode ser ou não um mamífero, um aluno vai ser ou não reprovado, uma lâmpada está ou não acessa, etc. No entanto, há situações em que as informações disponíveis não são suficientes nem completas, tornando-se um tanto vagas e ambíguas. Isso acontece, principalmente, em expressões linguísticas utilizadas no dia-a-dia. São exemplos dessas expressões ou termo linguísticos: "o dia está quente", "a luz está forte", "você está gorda", "ele está quase chegando", "o dólar está baixo", "a inflação está alta", dentre outras dezenas que são ditas e ouvidas todos os dias. O que seria "o dia está quente"? Que temperatura representa essa expressão? 35º C? Mais, ou menos?

Nesses casos, a lógica tradicional não representa bem essas expressões. Sendo assim, uma outra lógica surgiria, mas precisamente em 1965, quando Zadeh (1965) publica o artigo *Fuzzy Sets*, para permitir "aproximar a precisão característica da matemática à inerente imprecisão do mundo real" (BRAGA; BARRETO; MACHADO, 1995). Essa nova lógica, a lógica *fuzzy* ou Nebulosa, pode ser considerada uma extensão da lógica tradicional de conjuntos, uma vez que determinado elemento pode pertencer, em diversos graus, a um ou mais conjuntos ou pertencer totalmente (100%) ou não a determinado conjunto. Dessa forma, ela permite representar melhor as subjetividades humanas, como afirma Lima (2003):

> Um aspecto interessante da teoria nebulosa é a possibilidade de se incluir em um modelo matemático conceitos intuitivos que na maioria das vezes são altamente imprecisos e consequentemente de difícil tratamento. A capacidade de capturar com clareza e concisão as várias nuanças dos conceitos psicológicos utilizados pelos seres humanos em seu raciocínio usual, sem necessidade de enquadrá-lo em estados nítidos torna a lógica nebulosa uma importante ferramenta na modelagem de sistemas imprecisos. (LIMA, 2003).

Partindo dessa lógica, um conjunto pode possuir elementos que não pertencem, na sua totalidade, a ele. Esse tipo de conjunto que aborda vários elementos que não apresentam limites bem definidos de pertinência é chamado de conjunto *fuzzy*.

Para entender melhor o conjunto *fuzzy*, torna-se interessante trazer alguns conceitos do tradicional (*crisp*), o qual é baseado na lógica clássica de conjunto.

Um conjunto *crisp* (rígido, nítido) se define de tal maneira que divide o universo de possibilidades em somente dois grupos: os que pertencem ao conjunto e os que não pertencem, daí a denominação *crisp* (GUARÍN; ESCOBAR, 2003).

Quando o conjunto é finito, *X*, por exemplo, utiliza-se a seguinte notação:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}. \tag{1}$$

Um conjunto *crisp* também pode ser representado por uma função que represente todos os seus membros:

$$X = \{x \mid f(x)\}. \tag{2}$$

Ele também pode ser definido por sua função característica através de:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in X \\ 0 \; se \; x \notin X \end{cases}. \tag{3}$$

Nos conjuntos *fuzzy*, diferentemente dos conjuntos *crisp*, aparece uma função que indica o quanto determinado elemento pertence ao conjunto, a qual é denominada de função de pertinência (μ_A). Em outras palavras, essa função representa o grau de pertinência do elemento ao conjunto, o qual varia entre 0 (zero) e 1 (um), onde o primeiro valor indica ausência do elemento no conjunto e, o segundo, pertinência total.

Seja $X = \{x\}$ uma coleção de objetos (pontos, elementos), então um conjunto *fuzzy A* de *X* é definido como o conjunto de pares ordenados

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, x \in X, \tag{4}$$

onde $\mu_A(x)$ é o grau de pertinência de x em A e μ_A é a função de pertinência.

Essa função se baseia na premissa de que o pensamento humano não estabelece limites rígidos entre uma ou outra categoria (conjunto), mas, sim, que vai passando gradualmente o nível de aceitação de um conjunto para outro (ZADEH, 1973). Por exemplo: nenhum ser humano define, de forma abrupta, qual a temperatura que um objeto passa de "frio" para "quente", pois, geralmente, estabelece níveis intermediários, tais como: "morno", "tépido", "tíbio", "friozinho", "quentinho", etc.

Existem algumas características especiais dos conjuntos *fuzzy* que merecem ser mencionadas:

- Existem conjuntos *fuzzy*, denominados de **conjuntos *fuzzy* normal**, que apresentam ao menos um valor $x \in X$ tal que $\mu_x = 1$, isto é, o maior valor que pode alcançar a função de pertinência é 1. Em caso contrário, o conjunto *fuzzy* será chamado **subnormal**.
- O maior valor da função de pertinência é conhecido como a **altura** do conjunto *fuzzy*.

- **Nível alfa (α):** O nível alfa de um conjunto *fuzzy A* inclui os elementos que tem valor para a função de pertinência (μ_A) igual ou superior à alfa (α). O nível α de um conjunto *fuzzy* é um conjunto *crisp*, o qual é representando da seguinte forma:
$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \tag{5}$$
- **Conjunto suporte:** é um conjunto *fuzzy A* de um conjunto convencional *X*, identificado como *supp*(A) ou *S*(A), cujos elementos todos têm um nível de pertinência não negativo e diferente de zero (0) em *A*, isto é:
$$supp(A) = \{\, x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}. \tag{6}$$

Números *fuzzy*

Existem vários tipos de conjuntos *fuzzy*. Dentre esses tipos, os que possuem um significado especial são os números *fuzzy*, os quais estão definidos sobre o conjunto $\Re$ dos números reais (Klir; Yuan, 1995).

Para que um conjunto *fuzzy A* possa ser classificado como número *fuzzy* ele deve apresentar as seguintes características: ser normal; o nível alfa A_α tem de ser um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0,1]$, isto é, o conjunto *fuzzy* deve ser convexo (possuir como função de pertinência $\mu_A(x)$ valores estritamente crescentes ou decrescentes para valores crescentes de *x*); o *supp*(A) deve estar limitado.

São muitos os tipos de números *fuzzy* existentes, os quais são, geralmente, denominados em razão do formato de suas respectivas funções de pertinência e representam conceitos ou eventos diversos. Segundo Pereira (2002), os números *fuzzy* mais comuns são o triangular, o trapezoidal e o pi (π). Para fins deste trabalho, serão descritos apenas os dois primeiros.

Um número *fuzzy A* será triangular se sua função de pertinência for da seguinte forma:
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x < a_1, \\ \dfrac{x - a_1}{a_M - a_1} se \; a_1 \leq x \leq a_M, \\ \dfrac{x - a_2}{a_M - a_2} se \; a_M \leq x \leq a_2, \\ 0 \; se \; x > a_2, \end{cases} \tag{7}$$
onde o intervalo $[a_1, a_2]$ limita o número triangular *fuzzy*, o ponto $(a_M, 1)$ é o pico desse número e o segmento de reta formado pelos pontos $(a_M, 0)$ e $(a_M, 1)$ é a sua altura, como pode ser visto na figura a seguir:

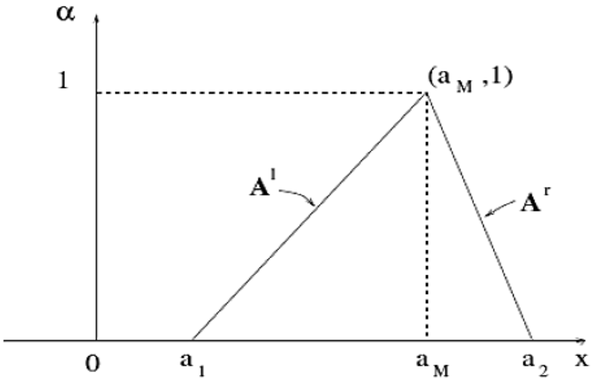

Figura 3.1: Número triangular *fuzzy*.
Fonte: BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. (2007).

Percebe-se que esse número é definido por duas funções lineares, uma que descreve o lado esquerdo (A^l) do número triangular *fuzzy* (sendo monótona crescente) e a outra que descreve o lado direito, A^r, (sendo monótona decrescente). Uma representação matemática simples do número triangular *fuzzy* mostrado na figura 3.1 pode ser dada através da chamada *representação por ponto*, isto é, $A = (a_1, a_m, a_2)$.

Um número *fuzzy A* será tido como trapezoidal caso a sua função de pertinência seja:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x < a_1, \\ \frac{x-a_1}{b_1-a_1} se \; a_1 \leq x \leq b_1, \\ 1 \quad se \; b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{x-a_2}{b_2-a_2} se \; b_2 \leq x \leq a_2, \\ 0 \; se \; x > a_2. \end{cases} \tag{8}$$

Um número trapezoidal *fuzzy* A pode ser representado, de forma simplificada, da seguinte maneira:

$$A = (a_1, b_1, b_2, a_2). \tag{9}$$

Se $b_1 = b_2 = a_M$ o número trapezoidal *fuzzy* se reduz a um número triangular *fuzzy*, ficando $A = (a_1, a_M, a_M, a_2) = (a_1, a_m, a_2)$.

A figura 3.2 representa um típico número trapezoidal *fuzzy*. Maiores detalhes sobre esse número podem encontrados em Bansal (2011).

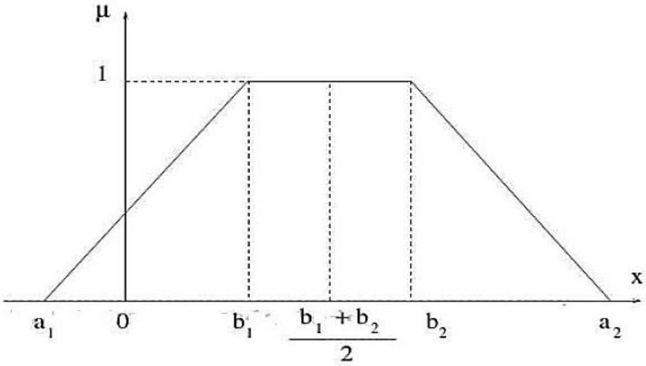

Figura 3.2: Número trapezoidal *fuzzy*.
Fonte: BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. (2007).

Os números *fuzzy* podem assumir diversos formatos, uma vez que qualquer função que apresente, principalmente, os princípios da normalidade e o da convexidade pode caracterizar um número *fuzzy*.

4. Finanças

Finanças é definida por Gitman (2004) como a arte e a ciência da gestão de dinheiro. Em outras palavras, é a ciência que estuda a movimentação financeira entre agentes econômicos. Ela preocupa-se com “os processos, as instituições, os mercados e os instrumentos associados à transferência de dinheiro entre indivíduos, empresas e órgão governamentais.” (GITMAN, 2004). Nos dias atuais, praticamente todos os indivíduos e as organizações obtêm receitas, levantam fundos, gastam recursos financeiros ou investem em ativos. Sendo o Capitalismo o sistema econômico operante atualmente em quase todos os países do mundo, percebe-se a relevância do entendimento de alguns conceitos, definições e abordagens envolvendo a área Finanças.

Mercado Financeiro

O mercado financeiro é a união do mercado monetário com o mercado de títulos. Apresenta como segmentação, além desses mercados, o mercado de crédito e o cambial. Todo mercado é caracterizado por dois tipos de agentes econômicos: os que demandam algum produto e os que o possuem, abdicando dele por algum preço.

No mercado financeiro, acontecem as trocas de produtos, os quais são conhecidos como ativos financeiros. O termo ativo, o qual vem da Contabilidade, se emprega tanto para empresas como para o mercado financeiro. Ativos são bens concretos (máquinas, veículos, imóveis, etc.) quanto intangíveis, tais como direitos de valores que formam o patrimônio de uma empresa (contas a receber, por exemplo).

Um ativo financeiro compreende todo tipo de aplicação financeira. São exemplos de ativos financeiros:

- Títulos de renda fixa públicos e privados;
- Caderneta de poupança;
- Ações;
- Metais (sendo ouro o mais conhecido);
- Moedas estrangeiras;
- Fundos de investimentos.

Existem centenas de ativos financeiros, os quais são geralmente ofertados pelos bancos comerciais e pela Bolsa de Valores Brasileira (BM&FBOVESPA). Para fins deste trabalho, serão considerados os seguintes ativos, os quais apresentam rentabilidade variável e um alto grau de incerteza quanto ao seu rendimento: dólar americano, ouro e ações.

O dólar americano é uma das moedas estrangeiras mais populares do mundo e é popularmente considerado como uma alternativa de preservação de valor em momentos de incerteza econômica do país.

Um dos metais mais desejados do mundo, o ouro, é uma forma de poupança e investimento. Atualmente, tanto a BM&FBOVESPA quanto o Banco do Brasil, além de algumas empresas, negociam esse metal precioso.

Quanto às ações, elas são emitidas pelas Sociedades Anônimas (S.A.) de acordo com aprovação prévia da Comissão de Valores Mobiliários (CVM), a qual é a responsável por disciplinar a emissão e a fiscalização de negociações de ações. As ações representam frações do capital social das empresas e são definidas caracteristicamente como ativos de risco (ASSAF NETO, 2009).

5. Proposição e Aplicação do Modelo

O modelo que será proposto assume que o decisor é um especulador financeiro e que apresenta neutralidade quanto ao risco. Para fins deste trabalho, ele terá as opções de investir nos seguintes ativos financeiros: dólar americano, ouro e ações. Quanto às ações, não será tratada aqui alguma específica, mas sim, a média da rentabilidade das principais ações negociadas na BM&FBOVESPA, através do índice IBOVESPA, o qual indica o desempenho médio das cotações no mercado de ações.

Os dados necessários para a aplicação do modelo foram coletados no início do mês de março do ano corrente, através dos sites do Banco Central Brasileiro – BCB (www.bcb.gov.br) e da Bolsa de Valores Brasileira (www.bmfbovespa.com.br). Foram coletados os seguintes dados: taxa Selic mensal (% a. m.), as cotações mensais do dólar americano e do ouro e o índice IBOVESPA mensal, do período de julho de 1994 a fevereiro deste ano. Esse intervalo de tempo foi escolhido pelo fato de o Brasil apresentar uma única moeda, o real, e por trazer uma grande quantidade de dados (ao todo 236), o que permite melhores inferências dos resultados.

A seguir, eles serão apresentados juntamente como os elementos da Teoria da Decisão sob risco, para que, no fim, possa se conhecer, através de uma abordagem *fuzzy*, qual ação deve ser adotada: investir em dólar americano, em ouro ou em ações (IBOVESPA).

Estados da Natureza

O conjunto dos estados da natureza é composto por todas as possíveis representações das configurações de fatores externos ao decisor e que estão fora do seu controle. A natureza escolhe o seu estado independentemente da vontade daquele. Cada estado da natureza é indicado por θ e o seu conjunto por Θ. Logo se tem que $\Theta = \{\theta\}$. A taxa Selic (taxa básica de juro utilizada como referência pela política monetária) mensalizada será utilizada para representar os estados da natureza, os quais serão três:

Θ = Taxa Selic (% a. m.) = $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2\}$, onde:

$$\begin{cases} \theta_0 \rightarrow 0{,}49 \leq \ taxa\ Selic \ < 1{,}02 \\ \theta_1 \rightarrow 1{,}02 \leq \ taxa\ Selic \ < 1{,}54 \\ \theta_2 \rightarrow 1{,}54 \leq \ taxa\ Selic \ < 6{,}90. \end{cases}$$

Os intervalos da taxa Selic foram escolhidos dessa forma para permitir uma probabilidade praticamente equitativa entre os estados da natureza, como pode ser visto a seguir:

Tabela 5.1: Conhecimento advindo de dados.

Conhecimento *a priori*	
$\pi(\theta_0)$	0,3220
$\pi(\theta_1)$	0,3432
$\pi(\theta_1)$	0,3347

A taxa Selic é um índice que está fora do controle do decisor, no caso, do investidor, pois é fixada pelo Banco Central, através de reuniões periódicas do Comitê de Política Monetária (COPOM), e que apresenta uma correlação significante com os ativos tratados aqui, mais precisamente com o ouro (Tabela 5.2), o qual apresenta uma correlação negativa forte, isto é, $r_s = -0{,}8994$. O ouro e as ações (IBOVESPA) por não se aproximarem de uma distribuição normal, utilizou, então, um teste não-paramétrico de associação entre duas variáveis: Teste de Correlação de Postos de Spearman. No caso do dólar americano, como a sua distribuição se aproximou de uma normal, optou-se por utilizar o coeficiente de correlação amostral, o qual é uma estatística mais robusta quando a normalidade da distribuição pode ser assumida.

Tabela 5.2: Teste de Correlação de Postos de Spearman.

Ativos Financeiros	r_s
Ouro	-0,8994
Ações (IBOVESPA)	-0,5759

Tabela 5.3: Coeficiente de correlação amostral.

Ativo Financeiro	r_s
Dólar americano	-0,4337

Conjunto de Ações

O conjunto de ações ($\mathcal{A}$) contém uma lista do que o indivíduo pode decidir fazer. Aqui o decisor tem o total controle sob as variáveis/ações (a), pois é ele quem vai escolher qual atitude tomar, ou seja, qual ação que vai realizar, assumindo os riscos inerentes a ela e se responsabilizando pelas futuras consequências. Logo, ele terá o poder de influenciar os resultados finais juntamente com os estados da natureza. Então $\mathcal{A} = \{a\}$.

As ações a serem tomadas pelo decisor neste trabalho giram em torno de em qual ativo financeiro investir, onde:

$\mathcal{A}$ = Escolha de um ativo financeiro para se investir = $\{a_0, a_1, a_2\}$:

$$\begin{cases} a_0 \rightarrow Investir\ em\ dólar\ americano \\ a_1 \rightarrow Investir\ em\ ações\ (IBOVESPA) \\ a_2 \rightarrow Investir\ em\ ouro. \end{cases}$$

Matriz de Decisão

Para cada estado da natureza e ação haverá uma consequência, a qual será a variação do retorno do investimento, o qual pode ser negativo, nulo ou positivo. Para representar essa variação, os números serão triangular *fuzzy* e trapezoidal *fuzzy*, os quais mostram a possibilidade para essas variações, com diversos graus de pertinência.

Para obter números *fuzzy*, dentre outras formas, pode-se utilizar de um especialista ou de uma distribuição de probabilidade (PEREIRA, 2002). Neste trabalho, foi utilizada a segunda forma, a qual pode ser encontrada em Pereira (2002). Basicamente, obtém-se a média (M), o desvio-padrão (σ) e a moda (m_0) da distribuição de probabilidade. O intervalo dessa distribuição será representado por $[i_1, i_4]$, onde o seu valor mínimo e o máximo são denotados por, respectivamente, i_1 e i_4. Com esses dados, já é possível obter um número triangular *fuzzy* A, o qual fica definido como: $A = (i_1, m_0, i_4)$.

O número trapezoidal *fuzzy* B, obtido da distribuição, fica definido como:

$$B = (i_1, m_0 - d_E, m_0 - d_D, i_4). \quad (10)$$

Sejam d_E e d_D a medida da dispersão da densidade de probabilidade à esquerda e à direita, respectivamente, da moda m_0, estes valores são obtidos da seguinte forma:

1. Se $m_0 > M$, então $d_E = \sigma + m_0 - M$ e $d_D = \sigma$. (11)
2. Se $m_0 < M$, então $d_E = \sigma$ e $d_D = \sigma - m_0 + M$. (12)

Maiores detalhes de como obter números *fuzzy* a partir da densidade de probabilidade e, vice-versa, podem ser encontrados, respectivamente, em Bárdossy e Durkstein (1995) e Dubois e Prade (1993).

Com base nos dados coletados e com a técnica mostrada anteriormente, obteve-se a matriz de decisão a seguir:

Tabela 5.4: Matriz de decisão.

a_i	Número *fuzzy*	θ_0	θ_1	θ_2
a_0	Triang.	(-9,42; -0,70; 16,83)	(-11,85; 2,74; 28,87)	(-16,60; 0,60; 64,08)
	Trapez.	(-9,42; -4,89; 3,55; 16,83)	(-11,85; -5,28; 8,35; 28,87)	(-16,60; -7,72; 8,91; 64,08)
a_1	Triang.	(-11,86; 1,79; 15,55)	(-39,55; -1,71; 17,77)	(-23,83; 6,89; 28,02)
	Trapez.	(-11,86; -5,50; 7,67; 15,55)	(-39,55; -11,17; 10,05; 17,77)	(-23,83; -6,12; 17,55; 28,02)
a_2	Triang.	(-12,90; -3,90; 15,00)	(-13,31; 0; 22,50)	(-16,40; -3,51; 70,00)
	Trapez.	(-12,90; -9,21; 6,31; 15,00)	(-13,31; -6,84; 7,54; 22,50)	(-16,40; -12,79; 9,19; 70,00)

À luz de Rommelfanger (2003) é possível encontrar o valor esperado *fuzzy* ($\tilde{E}$) para cada alternativa com a fórmula a seguir:

$$\tilde{E}\ (a_i) = \tilde{U}_{i0} \otimes \pi(\theta_0) \oplus \dots \oplus \tilde{U}_{in} \otimes \pi(\theta_n), \quad (13)$$

onde $\tilde{U}_{in}$ é a consequência *fuzzy* caso o decisor escolha a alternativa a_i e, a natureza, o estado θ_n. Os operadores matemáticos $\otimes$ e $\oplus$ significam, nessa ordem, multiplicação e soma com números *fuzzy*. Com a fórmula anterior e com as tabelas 5.1 e 5.4, obtém-se a próxima tabela com o valor esperado *fuzzy* para as alternativas:

Tabela 5.5: Valor *fuzzy* esperado das alternativas.

a_i	Número *fuzzy*	Valor *fuzzy* esperado ($\tilde{E}$)
a_0	Triangular	(-12,66; 0,92; 36,78)
	Trapezoidal	(-12,66; -5,97; 6,99; 36,78)
a_1	Triangular	(-25,37; 2,30; 20,49)
	Trapezoidal	(-25,37; -7,66; 11,79; 20,49)
a_2	Triangular	(-14,21; -2,43; 35,99)
	Trapezoidal	(-14,21; -9,59; 7,69; 35,99)

Para se chegar, então, a melhor ação para o decisor, supondo que o critério escolhido seja a Regra de Decisão de Bayes, basta ranquear as alternativas em ordem decrescente do valor *fuzzy* esperado($\tilde{E}$). Para fazer isso, há mais de trinta métodos (ABBASBANDY, 2009). Os principais podem ser encontrados resumidamente em Brunelli e Mezei (2013). Para este trabalho, será utilizado o método proposto por Adamo (1980), por satisfazer todas as propriedades propostas por Wang e Kerre (2001), e o de Centro de Máxima (KLIR; YUAN, 1995). O primeiro faz uma avaliação simples de números *fuzzy* baseado no ponto mais à direita para um determinado nível α (α-*cut*):

$$AD_\alpha(A) = a_\alpha^+. \quad (14)$$

O segundo método calcula o centro de máxima de um número *fuzzy* como um valor médio dos pontos extremos do seu intervalo modal:

$$CoM\ (A) = \frac{a_1^- + a_1^+}{2}. \quad (15)$$

Na próxima tabela é apresentado o ranqueamento das alternativas, de acordo com esses dois métodos e com o número *fuzzy* escolhido para representar a distribuição de possibilidade da rentabilidade das alternativas. Cabe salientar que o nível α escolhido foi de 0,5, assim como Brunelli e Mezei (2013) fizeram no seu trabalho. Pelo método de Centro de Máxima, tanto com números *fuzzy* triangulares como com os trapezoidais, a melhor alternativa é investir em ações (IBOVESPA). Pelo método de Adamo, a melhor alternativa varia de acordo com o formato da função de pertinência. Quando o formato é triangular, a melhor alternativa é investir em dólar americano, seguida pelo investimento em ouro. No formato trapezoidal, essas alternativas invertem suas posições, como mostrado na tabela 5.6. Isso pode ser justificado por elas apresentarem valores bem próximos.

Tabela 5.6: Ranqueamento das alternativas.

Método	Índice	Número *fuzzy*	Alternativas	Valor	Ordem
Adamo	$AD_{0,5}(A)$	Triangular	a_0	18,57	1ª
			a_1	11,38	3ª
			a_2	16,81	2ª
		Trapezoidal	a_0	21,47	2ª
			a_1	16,13	3ª
			a_2	22,06	1ª
Centro de Máxima	$CoM\ (A)$	Triangular	a_0	0,92	2ª
			a_1	2,30	1ª
			a_2	-2,43	3ª
		Trapezoidal	a_0	0,51	2ª
			a_1	2,07	1ª
			a_2	-0,95	3ª

5. Conclusão

Como comentado por Wang e Kerre (2001), é impossível afirmar qual o melhor método para ranquear números *fuzzy*, pois vai depender da preferência do pesquisador e do contexto do problema (BRUNELLI; MEZEI, 2013).

De maneira alguma, se propôs aqui a substituição do conhecimento já adquirido sobre investimentos em ativos financeiros. Pelo contrário, o que se quis foi apresentar mais uma ferramenta conjuntamente com a lógica *fuzzy* e, aplicá-la num caso real, para auxiliar no processo de decisão, visto que esse processo pode acarretar consequências de grandes repercussões e gerar receios para o decisor.

Para trabalhos futuros, ficam como sugestões: a ampliação do modelo aqui proposto com a introdução de mais variáveis para que se obtenha uma melhor abstração da realidade, o desenvolvimento de um *software* que possibilite a modelagem e aplicação do modelo aqui proposto, de forma que propicie a diminuição do esforço operacional e a utilização de outros métodos para ranqueamento de números *fuzzy*.

Referências

Abbasbandy, S. (2009), Ranking of *fuzzy* numbers, some recent and new formulas, *Proceedings of IFSA-EUSFLAT 2009*, 642–646.

Adamo, J. M. (1980), *Fuzzy* decision trees, *Fuzzy Sets and Systems*, 4, 3, 207–219.

Almeida, A. T., *Processo de decisão nas organizações: construindo modelos de decisão multicritério*, Atlas, São Paulo, 2013, 231 p.

Almeida, A. T., Costa, A. P. C. S. e Miranda, C. M. G., Informação e gestão, em Almeida, A. T. e Ramos, F. D. S., *Gestão da informação na competitividade das organizações*, 2ª. ed., Editora Universitária da UFPE, Recife, 3-12, 2002.

Assaf Neto, A., *Matemática financeira e suas aplicações*, 11. ed., Atlas, São Paulo, 2009.

Bansal, A. (2011), Trapezoidal *fuzzy* numbers (a,b,c,d): Arithmetic behavior, *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 39-44.

Bárdossy, A. e Duckstein, L., *Fuzzy rule-based modeling with applications to geophysical, biological and engineering systems*, CRC Press, Flórida, EUA, 1995, 256 p.

Bojadziev, G. e Bojadziev, M., *Fuzzy logic for business, finance, and management*, 2. ed., World Scientific Publishing, Singapure, vol. 23, 2007, 252 p.

Braga, M. J. F.; Barreto, J. M. e Machado, M. A. S. *Conceitos da matemática nebulosa na análise de risco*, Artes & Rabiskus, Rio de Janeiro, 1995, 95 p.

Brunelli, M. e Mezei, J. (2013), How different are ranking methods for *fuzzy* numbers? A numerical study, *International Journal of Approximate Reasoning*, volume 54, Issue 5, 627-639.

Campello de Souza, F. M., *Decisões racionais em situações de incerteza*, 2. ed., Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007, 366 p.

Campos, F.; Neves, A. e Campello de Souza, F. M. (2007), Decision maker under subjective uncertainty, *Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision Making.*

Dubois, D. e Prade, H. (1993), *Fuzzy* sets and probability: misunderstandings, bridges and gaps, *Proceedings of the 2 ed. IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE' 93)*, 1059-1068.

Gitman, L. J., *Princípios de Administração Financeira*, 10. ed., Pearson Addison Wesley, São Paulo, 2004.

Gomes, L. F. A. M., Gomes, C. F. S. e Almeida, A. T., *Tomada de decisão gerencial: enfoque multicritério*, 3ª. ed., Atlas, São Paulo, 2009.

Guarín, E. B e Escobar, J. E. (2003), Un enfoque *fuzzy* para la prospectiva delphi, *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, v. 14, 1-23.

Hillier, F. S. e LIEBERMAN, G. J., *Introdução à Pesquisa Operacional*, 8ª ed., Mcgraw-hill, Porto Alegre, 2006.

Klir, G. J. e Yuan, B, *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Lima, C. J. T. de. (2003), *Processo de tomada de decisão em projetos de exploração e produção de petróleo no Brasil: uma abordagem utilizando conjuntos nebulosos.* Dissertação de mestrado em Planejamento Energético, Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE/UFRJ).

Pereira, S. C. A. (2002), *Tratamento de incertezas em modelagem de bacias*. Tese de Doutorado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, 327 p.

Rampazzo, L., *Metodologia científica: para alunos dos cursos de graduação e pós-Graduação*, 4. ed., Loyola, São Paulo, 2009.

Rommelfanger, H. J. *Fuzzy* Decision Theory: Intelligent ways for solving real-world decision problems and for saving information costs. In: Della Riccia, G., Dubois, D., Kruse, R., Lens, H. – J. (eds.) *Planning based on decision theory*. CISM Courses and Lectures, vol. 472,. Springer, Wien-New York, 135-154, 2003.

Silva, L. G. O. e Almeida Filho, A. T. (2013), Modelo para agregação de um grupo de especialistas baseado na Teoria de Dempster-Shafer, *Atas do XLV SBPO*, 1260-1269.

Wang, Z. e Kerre, E. E. (2001) Reasonable properties for the ordering of *fuzzy* quantities (I), *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 118, nº 3, 375-385.

Zadeh, L. A. (1965), *Fuzzy* sets, *Information and Control*, 8, 338-353.

Zadeh, L. A. (1973), Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Transactions on SMC*, vol. 3, nº 1, 28-44.

Zimmermann, H. -J. (2000), An application-oriented view of modeling uncertainty, *European Jornal of Operational Research*, vol. 122, nº 2, 190-198.