

Um algoritmo adaptativo para gerar soluções Pareto-ótimas via branch-and-bound no espaço de objetivos

Marcos M. Raimundo

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein, 400 – 13.083-852 – Campinas – SP – Brasil
marcos@dca.fee.unicamp.br

Fernando J. Von Zuben

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas
Av. Albert Einstein, 400 – 13.083-852 – Campinas – SP – Brasil
vonzuben@dca.fee.unicamp.br

RESUMO

Este trabalho apresenta um novo algoritmo para problemas de otimização multiobjetivo, empregando uma metodologia *branch-and-bound* no espaço de objetivos. Além do embasamento teórico das decisões de descarte de regiões não-promissoras, a técnica proposta requer apenas um parâmetro a ser definido pelo usuário. O algoritmo é denominado bbEFSE e suas principais propriedades são: (1) trata não-convexidade da fronteira de Pareto; (2) define automaticamente a amostragem de qualquer formato de fronteira; (3) é extensível a muitos objetivos; e (4) não adiciona restrições de igualdade e/ou restrições não-lineares. Nas comparações realizadas com outras propostas disponíveis na literatura, junto a instâncias multiobjetivo do problema da mochila, o bbEFSE apresentou o melhor compromisso entre tempo de execução e hipervolume da solução final.

PALAVRAS-CHAVE. Otimização multiobjetivo, Branch-and-bound, Problema da mochila.

Área Principal: Apoio à Decisão Multicritério.

ABSTRACT

This paper presents a new algorithm to deal with multi-objective optimization problems, founded on a branch-and-bound methodology in the objective space. Besides the theoretical-based support for bound decisions of nonpromising regions, the proposed technique requires solely a single user-defined parameter. The algorithm is denoted bbEFSE and exhibits the following main properties: (1) deals with a nonconvex Pareto front; (2) automatically defines the sampling of Pareto fronts of any shape; (3) is extensible to many objectives; (4) does not add equality and/or nonlinear constraints. When compared with other proposals from the literature, in multiobjective instances of the knapsack problem, bbEFSE produced the best tradeoff between runtime and hypervolume of the final solution.

KEYWORDS. Multi-objective optimization, Branch-and-bound, Knapsack problem.

Main Area: Multicriteria Decision Support.

1. Introdução

É muito comum no cotidiano se deparar com situações em que fazer o melhor em um aspecto implica em ter um resultado pior em outro, caracterizando, assim, objetivos conflitantes. Um exemplo encontrado na natureza é o compromisso entre uso de energia e capacidade cognitiva do cérebro (Jin et al., 2009). Quando se formula matematicamente um problema prático de otimização, esse tipo de situação é igualmente comum. E existem duas abordagens de solução: uma em que as preferências são definidas a priori, de modo que são conhecidos os parâmetros matemáticos de tomada de decisão, e outra em que as preferências são definidas a posteriori, de modo que o objetivo da ferramenta é fornecer uma diversidade de soluções/opções para suportar uma tomada de decisão futura.

Estas questões são abordadas na literatura no contexto de técnicas de programação matemática. Em Cohon (1978), foi proposto um algoritmo adaptativo que encontra um conjunto de soluções eficientes através de combinações convexas das funções-objetivo. Em Das & Dennis (1998), foi proposto um algoritmo que inicialmente encontra uma solução para cada objetivo tomado isoladamente, define um plano suportado por essas soluções, no espaço de objetivos, e busca um número fixo de soluções normais a este plano. Em Messac et al. (2003), foi adotada a mesma proposta de Das & Dennis (1998), mas a normalidade é relaxada por meio de desigualdades e, em seguida, induzida pelo processo de otimização. Em Kim & Weck (2006), foi criado um algoritmo adaptativo que obtém soluções colineares à reta formada por um ponto de referência e pontos promissores. Em Belotti et al. (2013), Jozefowiez et al. (2012) e Zhang & Lyngby (2008), as técnicas de branch-and-bound para problemas de otimização linear-inteira são estendidas para problemas multiobjetivo. Em Dhaenens et al. (2010), é desenvolvido um algoritmo em três fases, em que as duas primeiras fases encontram um conjunto de soluções representativo, sendo que a partir desse conjunto geram subdivisões no espaço de objetivos para encontrar soluções eficientes.

Essas propostas apresentam limitações. Em Cohon (1978), não é possível encontrar soluções que envolvem fronteiras de Pareto não-convexas. Já em Das & Dennis (1998) e Messac et al. (2003), pelo fato dessas técnicas não serem adaptativas, o número de soluções a serem encontradas deve ser definido previamente e mantido fixo. Em Kim & Weck (2006), a dificuldade consiste no fato da colinearidade ser induzida por restrições não-lineares, o que inviabiliza o seu uso em programação linear-inteira. Em Jozefowiez et al. (2012), Belotti et al. (2013) e Zhang & Lyngby (2008), as técnicas são restritas a problemas de otimização linear-inteira. A proposta de Dhaenens et al. (2010), assim como neste artigo, trabalha com a exploração e divisão do espaço dos objetivos, entretanto ao contrário da proposta deste trabalho, explora os espaços de forma redundante, podendo encontrar uma mesma solução eficiente mais de uma vez, uma outra característica de Dhaenens et al. (2010) é o uso de ϵ -restrição recursiva ao invés escalarização por pesos.

Visando superar essas limitações, é proposto neste trabalho um algoritmo adaptativo inspirado em Cohon (1978) e fundamentado em otimização linear. Esta nova proposta, denominada bbEFSE (do inglês, *branch-and-bound Efficient Frontier Set Estimation*) tem como vantagens a capacidade de tratar fronteiras de Pareto não-convexas, além de evitar a adição de restrições de igualdade e restrições não-lineares. Um caso de estudo clássico em otimização multi-objetivo ilustra esses aspectos da proposta.

2. Conceitos de Programação Multiobjetivo

A programação multiobjetivo envolve um problema de programação matemática cuja principal característica é a existência de múltiplas funções-objetivo, associadas a objetivos potencialmente conflitantes, que devem ser otimizadas simultaneamente. As soluções candidatas pertencem a regiões factíveis de um espaço de decisão e cada ponto no espaço de decisão corresponde a um ponto no espaço de objetivos. Neste caso, o termo solução ótima deixa de fazer sentido, pois passam a existir compromissos distintos entre os objetivos. Quando uma solução é tal que, ao tentar obter uma melhora de um objetivo, outro irá necessariamente piorar, esta solução é chamada solução eficiente (Definição 3) (também conhecida como Pareto-ótima, ou não-inferior). As soluções eficientes são não dominadas entre si (Definição 7) e dada alguma solução não-eficiente, sempre existe pelo menos uma solução eficiente que estabelece dominância (Definição 11) sobre ela.

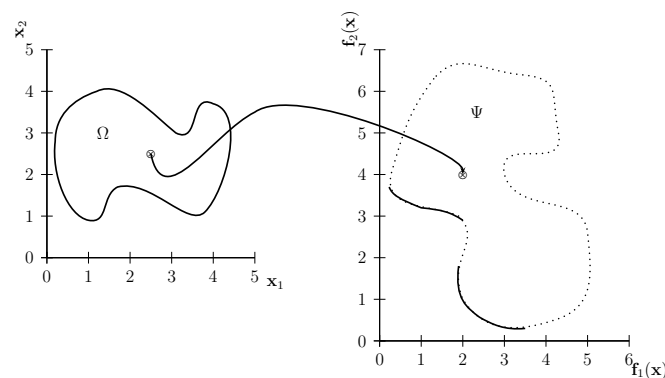


Figura 1: Representação dos espaços de decisão e objetivos para um caso com duas variáveis de decisão e dois objetivos a serem minimizados.

Definição 1. Um problema multi-objetivo é definido como segue (Marler & Arora, 2004):

$$\begin{aligned}
 &\underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\} \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{x} \in \Omega, \Omega \in \mathbb{R}^n \\
 & && \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \Psi \in \mathbb{R}^m \\
 & && f_i(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde Ω é conhecido como espaço de decisão e $\Psi \subset \mathbb{R}^m$ é conhecido como espaço de objetivos. A Figura 1 representa a associação existente entre esses dois espaços (restritos a duas dimensões para efeito de visualização). Cada ponto do espaço de decisão tem um ponto correspondente no espaço de objetivos, o qual é obtido ao se avaliar cada função-objetivo. No espaço de objetivos, as duas linhas escuras correspondem à fronteira de Pareto, que é o conjunto de todas as soluções eficientes.

Seguem algumas definições baseadas em Marler & Arora (2004), as quais são consideradas fundamentais para contextualizar o problema de otimização multiobjetivo.

Definição 2. Solução Factível Uma solução $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ no espaço de objetivos é dita ser factível se ela corresponde a um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que pertence à região factível do espaço de decisão.

Definição 3. Eficiência/Pareto-Otimalidade Uma solução $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é eficiente (Pareto-ótima) se não existe qualquer outra solução $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*), \forall i \in$

$\{1, 2, \dots, m\}$ e $f_i(\mathbf{x}) \neq f_i(\mathbf{x}^*)$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definição 4. Fronteira Eficiente/Fronteira de Pareto A Fronteira Eficiente (Fronteira de Pareto) $\partial^* \Psi$ é o conjunto de todas as soluções eficientes.

Definição 5. ϵ -Vizinhança Um vetor $\bar{\mathbf{x}}$ pertence à ϵ -Vizinhança de \mathbf{x} , denominada $B_\epsilon(\mathbf{x})$, se e somente se $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \epsilon$.

Definição 6. Fronteira de Soluções Factíveis Uma solução \mathbf{y} pertence à fronteira de soluções factíveis $\partial \Psi$ se e somente se, dada uma ϵ -Vizinhança $B_\epsilon(\mathbf{y})$, com ϵ tão pequeno quanto se queira, existem $\mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in B_\epsilon(\mathbf{y})$, tal que $\mathbf{z}' \in \Psi$ e $\mathbf{z}'' \notin \Psi$.

Definição 7. Não-Dominância Um ponto $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^m$ é não dominado por $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, se existe $\bar{z}_i < z_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Definição 8. Dominância Um ponto $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ é dominado por $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, se $y_i \leq \bar{y}_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $\mathbf{y} \neq \bar{\mathbf{y}}$.

Definição 9. Solução de Mínimo Individual A solução de mínimo individual \mathbf{r}^{*k} é uma solução eficiente quando é considerado somente um objetivo. A sua obtenção é dividida em duas fases: na primeira fase, se encontra o mínimo para o k -ésimo objetivo, desconsiderando os demais, enquanto que na segunda fase é encontrada uma solução eficiente para os demais objetivos sem alterar o valor encontrado para o k -ésimo objetivo.

- Primeira Fase: Obter o mínimo do k -ésimo objetivo:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \Psi, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Psi \subset \mathbb{R}^m$$

- Segunda fase: Obter uma solução eficiente para os demais objetivos sem alterar o valor encontrado para o k -ésimo objetivo:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && \sum_{i=1, i \neq k}^m \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && \mathbf{x} \in \Omega'. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Omega' \equiv \Omega \cap \{\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_k(\bar{\mathbf{x}})\}.$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \Psi, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Psi \subset \mathbb{R}^m$$

Definição 10. Solução utópica A solução utópica \mathbf{z}^{utopia} é um vetor no espaço de objetivos em que cada componente z_i^{utopia} é dada pela i -ésima componente do valor de mínimo individual (Definição 9) do i -ésimo objetivo \mathbf{r}_i^{*i} .

$$\mathbf{z}^{utopia} = \{\mathbf{r}_1^{*1}; \mathbf{r}_2^{*2}; \dots; \mathbf{r}_m^{*m}\} \quad (4)$$

Definição 11. Solução Nadir A solução de nadir \mathbf{z}^{nadir} é um vetor no espaço de objetivos em que cada componente z_i^{nadir} é dada pela i -ésima componente do valor de mínimo individual (Definição 9) do negativo do i -ésimo objetivo $\bar{\mathbf{r}}_i^{*i}$.

$$\mathbf{z}^{nadir} = \{\bar{\mathbf{r}}_1^{*1}; \bar{\mathbf{r}}_2^{*2}; \dots; \bar{\mathbf{r}}_m^{*m}\} \quad (5)$$

2.1. Técnicas de escalarização

O grande desafio em otimização multiobjetivo é trabalhar todos os múltiplos objetivos simultaneamente. Para tratar isso, uma das possibilidades é transformar o problema

multiobjetivo em mono-objetivo. Isto é chamado de escalarização. Dado um conjunto de parâmetros P que representam preferências a priori, o problema é convertido para mono-objetivo e este processo age de forma a obter uma solução \bar{x} (Marler & Arora, 2004).

Duas definições importantes a respeito de técnicas de escalarização em programação multiobjetivo são (Marler & Arora, 2004):

Definição 12. Necessidade na Pareto Otimalidade: Uma técnica é necessária para a Pareto otimalidade se qualquer solução desta técnica é Pareto-ótima.

Definição 13. Suficiência na Pareto Otimalidade: Uma técnica é suficiente para a Pareto otimalidade se toda solução Pareto-ótima pode ser encontrada através desta técnica.

2.2. Indicador de cobertura - Hipervolume

A métrica de hipervolume (Fleischer, 2003) consiste em, dado um ponto de referência que seja dominado por todo o conjunto de soluções eficientes, preferencialmente o ponto de Nadir, calcula-se o hipervolume formado entre este ponto e todas as soluções obtidas. Pode-se definir também como a somatória dos volumes adicionais de todas as soluções. O volume adicional consiste em: Considerando um conjunto de soluções $R = \{r^1, r^2, \dots, r^{k-1}\}$ com volumes já contabilizados \mathcal{V}^{soma} , o volume adicional de uma solução r^k é dado por: $\mathcal{V}(r^k | R) = \mathcal{V}(r^k) - (\mathcal{V}^{soma} \cap \mathcal{V}(r^k))$

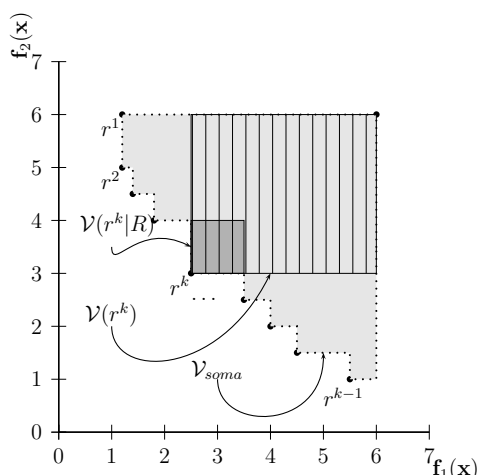


Figura 2: Representação da Métrica de Hipervolume

Esta métrica é bastante interessante pois qualquer solução dominada não é contabilizada pelo hipervolume. Além disso, quando duas soluções são muito próximas, apesar de não-dominadas, a contribuição da segunda solução para o hipervolume acrescentará pouco na soma total. Na Figura 2, o hipervolume em cinza indica \mathcal{V}^{soma} , o volume em grade indica $\mathcal{V}(r^k)$ e o volume em cinza escuro indica $\mathcal{V}(r^k | R)$.

3. O algoritmo adaptativo bbEFSE

Nesta seção, será apresentada a principal contribuição deste trabalho, com a descrição formal do algoritmo bbEFSE (do inglês, *branch-and-bound Efficient Frontier Set Estimation*), o qual se baseia na dinâmica adaptativa do NISE (Cohon, 1978). Basicamente, parte-se de uma solução e suas soluções vizinhas para gerar novas soluções vizinhas. As diferenças entre bbEFSE e NISE estão na estrutura da vizinhança, na forma de se obter soluções e no mecanismo de geração de novas vizinhanças.

Este algoritmo se propõe a abranger todo o espaço dos objetivos. Para tanto, este espaço de objetivos é subdividido recursivamente, ramificando e cortando regiões de busca não-promissoras.

Para auxiliar na compreensão da metodologia, assim como no uso e nome das variáveis, aconselha-se acompanhar a ilustração na Figura 3.

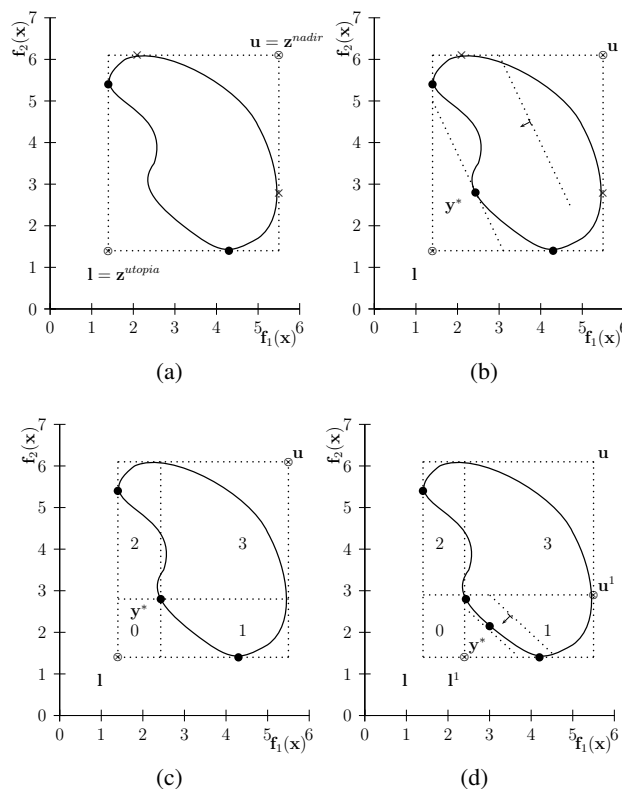


Figura 3: Exemplo de sequência de passos do algoritmo bbNISE

3.1. Inicialização

Ao invés de operar com soluções vizinhas, no bbEFSE são trabalhadas regiões delimitadas por l (limite inferior) e u (limite superior). A primeira região (l, u) é delimitada pelo ponto de Nadir e pelo ponto de utopia (z^{utopia}, z^{nadir}), conforme é ilustrado na Figura 3-a. Essa região inicial é inserida em uma fila.

3.2. Critérios de Parada

Este algoritmo adota critérios de parada em algumas situações:

- Condições de Descarte - Toda região recém desenfileirada é avaliada para saber se é uma região promissora. Para ser promissora, não podem valer as condições a seguir:
 - Hipervolume desprezível - O hipervolume formado entre u e l é menor que um valor η .
 - Região dominada - Quando o limite inferior u é dominado por alguma outra solução já encontrada.
- Condições de Exploração - Ausência de uma nova solução eficiente na região recém desenfileirada.

3.3. Iteração

Para a geração de uma nova solução, é usada a Escalarização Peso-Restrita, que consiste em fazer uma combinação convexa dos objetivos, restrita à região (\mathbf{l}, \mathbf{u}) , conforme é ilustrado na Figura 3-b para a primeira iteração e Figura 3-d para uma iteração seguinte na região 1. Visando simplificar a descrição, os pesos usados são tomados como sendo iguais, produzindo $w_i = \frac{1}{m} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, e a margem de erro é dada por η .

Definição 14. A definição de escalarização peso-restrita é como segue:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && \mathbf{w}^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
 & \text{sujeito a} && \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{l}_i \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\
 & && \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_i \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \\
 & && \mathbf{x} \in \Omega \\
 & && \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \Psi, \Omega \subset \mathbb{R}^n, \Psi \subset \mathbb{R}^m \\
 & && \mathbf{w} \geq 0 \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^m w_i = 1
 \end{aligned} \tag{6}$$

Caso esta otimização do problema da Definição 14 retorne a solução \mathbf{y}^* (Condições de Exploração), este será o ponto central para dividir a região (\mathbf{u}, \mathbf{l}) em 2^m novas regiões, como é mostrado na Figura 3-c. Procede-se da seguinte forma:

Dado um valor $k \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$, a região $(\mathbf{u}^k, \mathbf{l}^k)$ correspondente é definida como segue:

$$\mathbf{l}_i^k = \begin{cases} \mathbf{y}_i^* & \text{se } \frac{k}{2^{i-1}} \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{l}_i & \text{se } \frac{k}{2^{i-1}} \bmod 2 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbf{u}_i^k = \begin{cases} \mathbf{u}_i & \text{se } \frac{k}{2^{i-1}} \bmod 2 = 0 \\ \mathbf{y}_i^* & \text{se } \frac{k}{2^{i-1}} \bmod 2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

As regiões $k = 0, (\mathbf{l}^0 = \mathbf{l}, \mathbf{u}^0 = \mathbf{y}^*)$ e $k = m - 1, (\mathbf{l}^{m-1} = \mathbf{y}^*, \mathbf{u}^{m-1} = \mathbf{u})$ são descartadas pois a primeira é infactível (caso contrário tomaria lugar das soluções tidas como eficientes), e a segunda é inteiramente dominada por uma solução eficiente. Em seguida, caso o critério de parada não seja satisfeito, as novas regiões são enfileiradas.

3.4. Propriedades Teóricas

Nesta subseção, serão apresentadas algumas propriedades teóricas da técnica. O Teorema 1 é responsável por mostrar que todas as soluções encontradas são de fronteira, sendo fortes candidatas a serem eficientes. E o Teorema 2 é responsável por mostrar que todas as soluções dentro de uma margem de precisão podem ser encontradas.

Teorema 1. Solução de Fronteira

Se \mathbf{x}^* é solução da escalarização peso-restrita (Definição 14) então $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ é um ponto de fronteira de Ψ . Nesta prova, é usada $(\mathbf{l}^p, \mathbf{u}^p)$ como a região de otimização atual, e $(\mathbf{l}^{p-1}, \mathbf{u}^{p-1})$ como a região que gerou $(\mathbf{l}^p, \mathbf{u}^p)$, a partir das subdivisões centradas em \mathbf{y}^{*p-1} .

Prova por Contradição: Se $f(\mathbf{x}^*)$ não é ponto de fronteira, então existe uma vizinhança $B_\epsilon(f(\mathbf{x}^*)) \subset \Psi, \epsilon > 0$.

Caso 1: Se $f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{l}^p$.

Como existe i tal que $\mathbf{l}_i^p < f_i(\mathbf{x}^*)$, então considera-se uma direção de decréscimo $\mathbf{d} = \mathbf{l}^p - f(\mathbf{x}^*)$. Logo, $\mathbf{d}_i < 0 \forall i$ e $\|\mathbf{d}\| > 0$ e escolhendo um decréscimo arbitrariamente pequeno $\alpha > 0 : \|\alpha\mathbf{d}\| \leq \epsilon$. Com isso, existe um valor $(f(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}) \in B_\epsilon(f(\mathbf{x}^*))$ que domina a solução encontrada, ou seja, $\exists j : f_j(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_j < f_j(\mathbf{x}^*)$ e $f_i(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_i \leq f_i(\mathbf{x}^*) \forall i \neq j$, o que é uma contradição.

Caso 2: Se $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{l}^p$.

Se restrições são do tipo $f_i(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y}_i^{*p-1}$, então $\mathbf{l}^p < \mathbf{y}_i^{*p-1}$. Se $f_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y}_i^{*p-1}$, então $\mathbf{l}^p = \mathbf{y}_i^{*p-1}$.

Por definição, $f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{l}^{p-1}$. (Condição necessária para que o algoritmo não entre em laço infinito). Logo, $\mathbf{y}^{*p-1} \geq \mathbf{l}^p = f(\mathbf{x}^*)$.

Assim, $\mathbf{l}_i^{p-1} \leq f(\mathbf{x}^*)$ e $f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{l}^{p-1}$ e, então, considera-se uma direção de decréscimo $\mathbf{d} = \mathbf{l}^{p-1} - f(\mathbf{x}^*)$. Logo, $\mathbf{d}_i \leq 0 \forall i$ e $\|\mathbf{d}\| > 0$ e escolhendo um decréscimo arbitrariamente pequeno $\alpha > 0 : \|\alpha\mathbf{d}\| \leq \epsilon$, existe um valor $(f(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}) \in B_\epsilon(f(\mathbf{x}^*))$ que domina a solução encontrada na região menor, ou seja, $\exists j : f_j(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_j < f_j(\mathbf{x}^*)$ e $f_i(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_i \leq f_i(\mathbf{x}^*) \forall i \neq j$. Com isso, tem-se que:

$$\exists j : f_j(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_j < f_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{l}_j^p \leq \mathbf{y}_j^{*p-1} \text{ e } f_i(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d}_i \leq f_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{l}_i^p \leq \mathbf{y}_i^{*p-1}, \forall i \neq j$$

Portanto, $(f(\mathbf{x}^*) + \alpha\mathbf{d})$ pertence à região delimitada por $(\mathbf{l}^{p-1}, \mathbf{u}^{p-1})$ e domina \mathbf{y}^{*p-1} , o que é uma contradição, pois \mathbf{y}^{*p-1} não é dominado por nenhuma solução na região delimitada $(\mathbf{l}^{p-1}, \mathbf{u}^{p-1})$.

Assim, como o **Caso 1** e o **Caso 2** chegam a uma contradição, temos que $f(\mathbf{x}^*)$ é ponto de fronteira. ■

Teorema 2. Suficiência Fraca na Pareto Otimalidade

Dada uma solução eficiente qualquer $\bar{\mathbf{y}}$, o algoritmo encontra uma solução $\underline{\mathbf{y}}$ tal que o hipervolume formado por ambas é menor que a margem de erro η .

Prova: Se $\bar{\mathbf{y}}$ é encontrado, então o hipervolume é nulo.

Se não é encontrado, é porque a região (\mathbf{l}, \mathbf{u}) que contém $\bar{\mathbf{y}}$ foi eliminada.

Se foi eliminada pelo critério de hipervolume desprezível, então existe $\underline{\mathbf{y}}$ tal que este é um dos vértices do poliedro formado por (\mathbf{l}, \mathbf{u}) . Logo, o valor do hipervolume formado por $\bar{\mathbf{y}}$ e $\underline{\mathbf{y}}$ é inferior a η .

Se foi eliminada pelo critério de região dominada, essa solução não é eficiente. ■

4. Experimento Proposto

A validação do algoritmo proposto bbEFSE será feita através de comparação com outros algoritmos para o problema da mochila, o qual apresenta grande relevância prática e caracteriza-se por ser um problema de programação linear-inteira, levando a fronteiras de Pareto discretas e não convexas (Bazgan et al., 2009). Além desses problemas se mostrarem bastante desafiadores para metodologias de otimização multiobjetivo, encontram-se disponíveis na literatura técnicas de geração de instâncias para essa classe de problemas de otimização combinatória (Bazgan et al., 2009).

4.1. Problema da Mochila

Dada uma restrição de espaço, deve-se escolher dentre q itens de diversos tamanhos e valores distintos para preencher a mochila. O objetivo é maximizar o valor dos itens selecionados, sem violar a restrição de espaço. No caso multiobjetivo, para cada item i há m valores $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m$ associados ao tamanho t_i do item i .

Segue a formulação do problema, considerando que todas as variáveis de decisão, representadas pelo vetor \mathbf{x} , são binárias. A interpretação do vetor indica que itens dentre os disponíveis devem ser escolhidos ($x_i = 1$) e que itens devem ficar de fora da mochila ($x_i = 0$).

$$\begin{aligned}
 &\underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} && \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \{f_{(1)}(\mathbf{x}), f_{(2)}(\mathbf{x}), \dots, f_{(m)}(\mathbf{x})\} \\
 &\text{sujeito a} && \mathbf{f}_{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q v_i^k x_i, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\} \\
 &&& \sum_{i=0}^q t_i x_i \leq T \\
 &&& x_i \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

A geração de instâncias será feita através do procedimento sugerido por Bazgan et al. (2009). Todos os parâmetros do problema da mochila são gerados aleatoriamente dentro de um certo intervalo, forçando um comportamento conflitante entre os múltiplos objetivos:

- Cada tamanho t_i e primeiro valor v_i^1 são gerados no intervalo $[0, 1000]$, e o segundo valor v_i^2 é gerado no intervalo $[\max(v_i^1 - 100, 1), \min(v_i^1 + 100, 1000)]$. E assim por diante, para cada um dos q itens.

Então, o tamanho total da mochila T será dado pela fórmula $500qc$, onde o valor 500 se refere à média aproximada dos tamanhos dos itens, q é o número de itens da mochila e $c \in [0, 1]$ é variável e representa o fator de cobertura, em que 0 indica que não é possível colocar itens na mochila e 1 indica que a mochila é capaz de armazenar todos os itens.

4.2. Formulação do experimento

Foram geradas 35 instâncias segundo o procedimento descrito, variando o número de itens da mochila q entre os valores $[10, 50, 100, 150, 200]$ e o fator de cobertura c entre os valores $[0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8]$.

Como já citado, as técnicas NC (Messac et al., 2003) e NBI (Das & Dennis, 1998) não são adaptativas, logo é necessário fornecer um número de soluções desejadas ν . Já o algoritmo NISE (Cohon, 1978) e a nova proposta deste trabalho bbEFSE são adaptativos, sendo necessário apenas fornecer o limiar de ganho de hipervolume η .

Então, foram executados os algoritmos adaptativos (NISE,bbEFSE), para todas as instâncias, considerando os seguintes valores para η : $[0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001]$; já para os algoritmos não-adaptativos (NBI,NC) foram executados considerando os seguintes valores para ν : $[10, 50, 100, 500, 1000]$. Só não serão apresentados os resultados para NBI com $\nu = 1000$, devido ao custo computacional excessivo. Então, são comparados dois-a-dois cada tupla técnica/parâmetro através do teste-T com margem de confiança

0.001 para os valores de hipervolume e tempo de execução, na mesma plataforma computacional.

Como ao encontrar qualquer solução o hipervolume se aproxima do seu valor máximo 1, os valores de hipervolume ficam concentrado próximos de 1, sendo então reescalados para o intervalo $[0, 1]$, considerando a pior e a melhor performance entre todas as técnicas/parâmetros para cada instância.

4.3. Resultados

Na Tabela 1, há as comparações por teste-T (valor-p = 0,001) onde + indica que o algoritmo da linha tem performance estatisticamente superior ao algoritmo da coluna no hipervolume. Para o mesmo conjunto de instâncias, é exibida a Tabela 2, cabendo o mesmo tipo de interpretação, voltado para o tempo de execução (+ indica tempo de execução significativamente menor).

Na Figura 4, é apresentado um compromisso entre dois critérios de desempenho para todos os resultados obtidos. Cada algoritmo é apresentado com o seu número de "vitórias"(valores estatisticamente superiores) para tempo de execução e hipervolume. Os algoritmos que dominam os demais em performance estão na fronteira de pontos mais afastados da origem.

Esses resultados evidenciam o maior diferencial, em termos de desempenho, da proposta deste trabalho. O algoritmo bbEFSE, por povoar a região central da fronteira de Pareto (veja Figura 4), apresenta uma boa opção de compromisso entre tempo de execução e hipervolume. Já o NISE se mostrou mais competente em termos de tempo de execução e o NC em hipervolume. Este gráfico apresenta ao usuário a possibilidade de escolha da técnica mais apropriada para suas necessidades.

		bbEFSE					NISE					NC				NBI						
		$\eta = 0.01$	$\eta = 0.005$	$\eta = 0.001$	$\eta = 0.0005$	$\eta = 0.0001$	$\eta = 0.01$	$\eta = 0.005$	$\eta = 0.001$	$\eta = 0.0005$	$\eta = 0.0001$	$\nu = 10$	$\nu = 50$	$\nu = 100$	$\nu = 500$	$\nu = 1000$	$\nu = 10$	$\nu = 50$	$\nu = 100$	$\nu = 500$		
bbEFSE	$\eta = 0.01$																					
	$\eta = 0.005$	+																	+	+	+	+
	$\eta = 0.001$	+	+				+												+	+	+	+
	$\eta = 0.0005$	+	+	+			+					+							+	+	+	+
	$\eta = 0.0001$	+	+	+	+		+	+				+	+						+	+	+	+
NISE	$\eta = 0.01$																		+	+	+	+
	$\eta = 0.005$						+												+	+	+	+
	$\eta = 0.001$						+	+											+	+	+	+
	$\eta = 0.0005$						+	+	+										+	+	+	+
	$\eta = 0.0001$						+	+	+	+									+	+	+	+
NC	$\nu = 10$																		+	+	+	+
	$\nu = 50$	+	+				+	+				+							+	+	+	+
	$\nu = 100$	+	+	+	+		+	+				+	+						+	+	+	+
	$\nu = 500$	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+					+	+	+	+
	$\nu = 1000$	+	+	+	+	+	+	+				+	+	+	+				+	+	+	+
NBI	$\nu = 10$																					
	$\nu = 50$																		+			
	$\nu = 100$																		+	+		
	$\nu = 500$																		+	+	+	

Tabela 1: Vitórias pelo teste-T de hipervolume

5. Conclusão

Este trabalho propôs um novo algoritmo adaptativo para problemas de otimização multiobjetivo, denominado bbEFSE, o qual apresentou um bom compromisso entre tempo de execução e hipervolume, quando comparado a algoritmos já disponíveis na literatura e considerando instâncias multiobjetivo do problema da mochila.

		bbEFSE					NISE					NC					NBI				
		$\eta = 0.01$	$\eta = 0.005$	$\eta = 0.001$	$\eta = 0.0005$	$\eta = 0.0001$	$\eta = 0.01$	$\eta = 0.005$	$\eta = 0.001$	$\eta = 0.0005$	$\eta = 0.0001$	$\nu = 10$	$\nu = 50$	$\nu = 100$	$\nu = 500$	$\nu = 1000$	$\nu = 10$	$\nu = 50$	$\nu = 100$	$\nu = 500$	
bbEFSE	$\eta = 0.01$		+	+	+	+															
	$\eta = 0.005$			+	+	+															
	$\eta = 0.001$				+	+															
	$\eta = 0.0005$					+								+	+	+	+	+	+	+	+
	$\eta = 0.0001$						+									+	+	+	+	+	+
NISE	$\eta = 0.01$	+	+	+	+	+															
	$\eta = 0.005$		+	+	+	+															
	$\eta = 0.001$			+	+	+															
	$\eta = 0.0005$				+	+															
	$\eta = 0.0001$					+															
NC	$\nu = 10$						+														
	$\nu = 50$							+													
	$\nu = 100$								+												
	$\nu = 500$									+											
	$\nu = 1000$										+										
NBI	$\nu = 10$															+	+				
	$\nu = 50$																+				
	$\nu = 100$																		+	+	
	$\nu = 500$																				+

Tabela 2: Vitórias pelo teste-T de tempo de execução

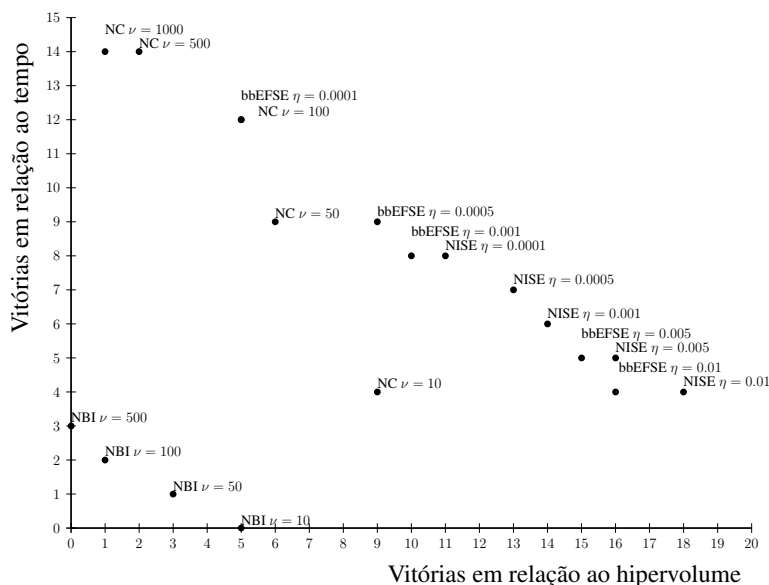


Figura 4: Gráfico de análise multiobjetivo considerando o número de vitórias para tempo de execução na vertical, e hipervolume na horizontal

O algoritmo aplica uma metodologia *branch-and-bound* no espaço de objetivos, identificando regiões que certamente não contêm soluções não-dominadas frente às já identificadas. Esta propriedade do algoritmo foi demonstrada teoricamente e sustenta o bom custo-benefício apresentado pelo algoritmo junto aos casos de estudo. Além disso, o algoritmo requer apenas a definição de um parâmetro referente ao critério de parada: as regiões ainda a serem exploradas devem ter um hipervolume superior a um limiar, que controla diretamente a granularidade da amostragem da fronteira de Pareto.

Embora não tenham sido considerados nos experimentos apresentados, os quais se restringiram a problemas com dois objetivos, o bbEFSE é diretamente extensível a qualquer número de objetivos, pois trabalha apenas restringindo regiões que podem ser delimitadas pelas mesmas técnicas que levam ao cálculo de hipervolume, as quais são extensíveis a

múltiplas dimensões.

Como perspectivas futuras, pretende-se aplicar a proposta para muitos objetivos e verificar a sua escalabilidade computacional, assim como hibridizar a proposta, por exemplo, inserindo o algoritmo NISE no lugar da escalarização peso-restrita em cada região ainda a ser explorada.

Agradecimentos

Os autores agradecem Capes e CNPq pelo suporte financeiro ao desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

- Bazgan, C., Hugot, H., & Vanderpooten, D.** (2009). Solving efficiently the 0–1 multi-objective knapsack problem. *Computers & Operations Research*, 36(1):260–279.
- Belotti, P., Soylu, B., & Wiecek, M. M.** (2013). A branch-and-bound algorithm for biobjective mixed-integer programs. *Optimization Online*.
- Cohon, J. L.** (1978). *Multiobjective programming and planning*, volume 140 of *Mathematics in Science and Engineering*. Elsevier.
- Das, I. & Dennis, J.** (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):631–657.
- Dhaenens, C., Lemesre, J., & Talbi, E.** (2010). K-ppm: A new exact method to solve multi-objective combinatorial optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 200(1):45 – 53.
- Fleischer, M.** (2003). The measure of pareto optima. applications to multi-objective metaheuristics. pages 519–533.
- Jin, Y., Gruna, R., & Sendhoff, B.** (2009). Pareto analysis of evolutionary and learning systems. *Frontiers of Computer Science in China*, 3(1):4–17.
- Jozefowicz, N., Laporte, G., & Semet, F.** (2012). A generic branch-and-cut algorithm for multiobjective optimization problems: Application to the multilabel traveling salesman problem. *INFORMS Journal on Computing*, 24(4):554–564.
- Kim, I. & Weck, O. D.** (2006). Adaptive weighted sum method for multiobjective optimization: a new method for Pareto front generation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31(2):105–116.
- Marler, R. & Arora, J.** (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, 26(6):369–395.
- Messac, A., Ismail-Yahaya, A., & Mattson, C. A.** (2003). The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. *Structural and multidisciplinary Optimization*, 25(2):86–98.
- Zhang, W. & Lyngby, K.** (2008). Parallel multi-objective branch and bound. Master's thesis.