

## UMA ABORDAGEM MULTIOBJETIVO PARA O PLANEJAMENTO DE PRODUTOS LATICÍNIOS

Felipe F. Cruz<sup>α</sup>, Thiago H. de M. Mendes<sup>α</sup>, André R. da Cruz<sup>β</sup>

Universidade Federal de Viçosa, campus Rio Paranaíba,  
Rodovia MG-230 Km 7, Rio Paranaíba - MG, Brasil  
{felipe.f.cruz, thiago.h.mendes, andre.cruz}@ufv.br

<sup>α</sup> Graduando em Sistemas de Informação

<sup>β</sup> Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas

### RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem multiobjetivo para a gestão estratégica de uma empresa produtora de derivados do leite. Deseja-se investigar a quantidade de cada produto a ser produzido, de forma a maximizar o valor monetário de venda. Ao mesmo tempo, deseja-se minimizar o custo total com os investimentos necessários para a produção. Esta relação conflitosa resultou em um problema multiobjetivo em que há uma função objetivo linear e uma outra quadrática, sujeito a um conjunto de restrições que modelam as regras da produção. Como a estrutura do problema possui garantidamente uma fronteira de Pareto ótima convexa, a estratégia utilizada para se obter uma amostra do conjunto Pareto foi a  $P_\lambda$  com o uso de tabela Hash para armazenar soluções distintas. No total foram encontrados 89 soluções que foram divididas entre dois conjuntos, um contendo estratégias lucrativas e outro com as danosas financeiramente. Com o conjunto final de soluções não dominadas lucrativas, o decisor pode selecionar a estratégia que mais interessante, de acordo com o potencial de investimento a empresa possui.

**PALAVRAS CHAVE.** Produtos Laticínios, Planejamento da Produção, Programação Multi-objetivo Linear, Mix de Produtos.

**Áreas Principais:** ADM – Apoio à Decisão Multicritério, AG&MA – PO na Agricultura e Meio Ambiente, IND – PO na Indústria.

### ABSTRACT

This paper presents a multiobjective approach for the strategic management of a company that produces dairy products. It is desired to investigate the amount of each product to be produced in order to maximize the monetary value of sales. At the same time, it is desired to minimize the total cost with the necessary investments for the production. This conflicting relationship resulted in a multiobjective problem in which there is a linear and another quadratic objective function, subject to a set of constraints that models the rules of the production. As the problem structure guaranteed an optimal convex Pareto front, the strategy used to obtain a sample of the Pareto set was  $P_\lambda$ , using hash table to store different solutions. A total of 89 solutions were found and divided between two sets, one containing profitable strategies and other with the financially damaging. With the final set of nondominated profitable solutions, the decision maker can select the more interesting strategy, according to the investment potential that the company has.

**KEYWORDS.** Dairy Products, Production Planning, Multiobjective Linear Programming, Product Mix.

**Main areas:** Multicriteria Decision Support, OR in Agriculture and Environment, OR in Industry.

## 1 Introdução

Segundo (TRINDADE; SILVA, 2008), o Brasil é o sexto maior produtor de leite do mundo. O país cresce a uma taxa anual de 0,04, superior à de todos os países que ocupam os primeiros lugares, respondendo por 0,66 do volume total de leite produzido nos países que compõem o Mercosul. A importância relativa do produto no contexto do agronegócio nacional, pode ser avaliada pelo faturamento de alguns produtos da indústria brasileira de alimentos, na última década, registrando 248% de aumento contra 78% de todos os segmentos.

Devido à sua importância, é comum o emprego de técnicas de pesquisa operacional para melhorar a eficiência dos diversos processos executados na cadeia de produção do leite e derivados. Nos parágrafos abaixo segue alguns exemplos encontrados na literatura.

Os autores em (JÚNIOR; SILVA, 2005) desenvolveram um sistema de apoio à decisão para determinar o planejamento da produção de produtos lácteos. O sistema utiliza a programação linear para definir o mix semanal de produtos ao maximizar a margem de contribuição considerando restrições produtivas, operacionais e mercadológicas.

Em (MIRANDA; MARTINS; FARIA, 2007), os autores estudaram a aplicação de um modelo de programação linear para maximização de resultados em uma indústria de laticínios, utilizando a margem de contribuição. O sistema avalia a melhor combinação de produtos a serem fabricados em um ambiente com múltiplas restrições. O modelo de otimização linear propôs encontrar o melhor mix de produtos que maximize o lucro.

A dissertação de mestrado (FAORO, 2009) apresentou um modelo de programação não linear multiobjetivo para auxiliar a produção leiteira em uma fazenda. As funções objetivo neste trabalho consideram desempenho econômico, o custo produtivo, a produção de gases de efeito estufa e a perda de solos por processos erosivos. Assim, são considerados o aumento da atividade leiteira, o emprego de maiores níveis de adubação, alimentação concentrada e suplementos volumosos, além da possibilidade de escolha de diferentes pastagens.

No artigo (OLISZESKI; COLMENERO; KOVALESKI, 2009), os autores relatam desafios de aplicar a pesquisa operacional em agroindústrias de pequeno e médio porte. Com isso, pretendem proporcionar uma ferramenta de auxílio para as pequenas e médias empresas do setor, para que estas mantenham-se no mercado e aumentem o poder de competição frente as empresas maiores.

No artigo (GAMEIRO; ROCCO; CAIXEITA-FILHO, 2011), os autores criaram um modelo matemático para otimizar e avaliar uma unidade produtora de leite com intuito de maximizar a soma do lucro mensal de uma unidade produtora. Durante um período de 60 meses, foram analisados através do modelo matemático a quantidade de animais e hectares a serem cultivadas.

O trabalho (KAWANO, 2012) buscou avaliar o potencial de ganho em eficiência energética na indústria de laticínios. A partir do problema tratado, analisou-se a aplicação de ferramentas da engenharia econômica e da otimização. Foi desenvolvido três estudos de caso para analisar subproblemas, envolvendo a viabilidade técnico-econômica da substituição de motores elétricos de um laticínio, maximização da margem de contribuição de 6 produtos, e o aproveitamento do calor residual da caldeira para aquecimento de água utilizado nos diversos processos.

A tese de doutorado (MENEHINI, 2013) desenvolveu um modelo de programação linear para a maximização da margem de contribuição total e precificação do leite cru através da determinação do mix ótimo de produtos lácteos. O modelo criado foi simulado em diversos cenários diários em épocas de alta e baixa disponibilidade de matéria-prima. As soluções ótimas foram comparadas com resultados reais de um laticínio do sudeste do Brasil. Além disto, foram realizadas análises de sensibilidade dos componentes nutritivos de dois tipos de leite cru com diferentes composições para determinar os preços-sombras.

Este trabalho apresenta uma abordagem multiobjetivo para determinar o planejamento da produção de um laticínio. Deseja-se definir a quantidade de cada um dos 7 produtos, derivados do leite cru, a ser produzida de modo a maximizar o retorno com as vendas, minimizando concomitantemente os custos de investimentos. As variáveis de decisão são reais, a função objetivo de custo é linear e a de custos com investimentos é quadrática. As restrições dizem respeito às capacidades e regras de produção. Este problema de otimização multiobjetivo é solucionado através da técnica  $P_\lambda$  (TAKAHASHI, 2007), no qual diferentes amostras do conjunto Pareto ótimo são obtidas em um processo de Monte Carlo (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001) com o auxílio de uma tabela hash (CORMEN et al., 2001).

As soluções ótimas do conjunto não dominado são analisadas e particionadas em dois subconjuntos, um que possui exclusivamente soluções lucrativas e um outro que possui somente soluções danosas. Este conjunto com estratégias lucrativas é o resultado final deste trabalho que deve ser entregue ao tomador de decisões. Este é o responsável por selecionar a solução com melhor relação de compromisso entre custo de investimento e retorno com as vendas.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta uma definição breve e formal de otimização multiobjetivo e do método  $P_\lambda$  com tabela hash; a seção 3 define o problema e apresenta o modelo de otimização multiobjetivo deste trabalho; a seção 4 apresenta os resultados computacionais; e por fim, a seção 5 apresenta as conclusões e os possíveis trabalhos futuros.

## 2 Otimização Multiobjetivo

### 2.1 Problema de Otimização Multiobjetivo

Sem perda de generalidade, considere o problema de maximização multiobjetivo com  $n$  variáveis,  $m$  objetivos e  $p$  restrições, apresentado na Equação 1. A variável  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^\top \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor coluna de decisão. O espaço de soluções factíveis  $X$ , com  $n$  dimensões, é composto pelas soluções que satisfazem todas as restrições do problema, sendo elas de limites de valores ou funcionais. O vetor coluna de  $m$  objetivos de  $\mathbf{x}$ ,  $F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ \dots \ f_m(\mathbf{x})]^\top \in \mathbb{R}^m$ , é o conjunto de critérios conflituosos que se deseja otimizar concomitantemente. O conjunto de restrições do problema é representado pela multiplicação matricial de  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  por  $\mathbf{x}$ , que deve ser igual ao vetor coluna de termos independentes  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ . Considere que as devidas variáveis de desvio (folga ou sobra) já foram incluídas no modelo. Cada linha de  $A$  e  $\mathbf{b}$  possui os termos de cada uma das  $p$  restrições. O resultado desejado do processo de otimização multiobjetivo é o conjunto de soluções eficientes ou Pareto-ótimo,  $X^* \subseteq X$ , que consiste de todas as soluções factíveis para o qual o vetor de objetivos não pode ser melhorado em qualquer dimensão sem degradar algum outro. Em outras palavras,  $X^*$  possui todas as soluções viáveis para o qual existe uma relação de compromisso entre os critérios de avaliação (STEUER, 1986; TAKAHASHI, 2007).

$$\begin{aligned}
 X^* &= \max_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ \dots \ f_m(\mathbf{x})]^\top = C\mathbf{x} \\
 \text{sujeito a:} & \\
 &A\mathbf{x} = \mathbf{b}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Sejam  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  duas soluções factíveis. É verdade que  $\mathbf{u}$  domina (fortemente)  $\mathbf{v}$ , se somente se, para todo inteiro  $j \in \{1, \dots, m\}$  é válido que  $F_j(\mathbf{u}) \geq F_j(\mathbf{v})$  e existe pelo menos um  $j$  no mesmo conjunto tal que  $F_j(\mathbf{u}) > F_j(\mathbf{v})$ . Se for o caso da não existência de desigualdade, diz-se que existe uma dominância fraca. O conjunto Pareto-ótimo  $X^*$  é composto por todas as soluções não dominadas  $\mathbf{x}^*$  no que diz respeito ao conjunto de soluções factíveis  $X$ . A imagem de  $X^*$  é usualmente denominado Fronteira de Pareto (STEUER, 1986; TAKAHASHI, 2007).

### 2.2 Método da Soma Ponderada

Seja  $\Lambda := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$  o conjunto de todos os vetores de pesos com valores estritamente positivos. Para um vetor coluna  $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$  fixo, o problema de otimização

ponderado, denominado  $P_\lambda$ , correspondente ao problema apresentado na Equação 1 é dado pela Equação 2 (STEUER, 1986; TAKAHASHI, 2007).

$$\begin{aligned} x^* &= \max_{\mathbf{x} \in X} \lambda'F(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & \\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2)$$

Como o problema tratado neste trabalho é composto somente por variáveis reais, cujas funções objetivo e restrições são todas convexas, então a solução ótima  $x^*$  da Equação 2 é garantidamente uma solução Pareto-ótima da Equação 1 (STEUER, 1986; TAKAHASHI, 2007).

Para um vetor fixo de pesos, este modelo encontra uma única solução em cada otimização. A ideia é executar a otimização diversas vezes com vetores aleatórios de pesos, de modo a se gerar diferentes soluções globalmente não dominadas. Assim, para se gerar uma amostra do conjunto Pareto-ótimo, o Algoritmo 1 foi elaborado.

---

**Algoritmo 1** Obtenção de Soluções Pareto-ótimas via Método da Soma Ponderada

---

**Entrada:**  $n, X, F, A, \mathbf{b}, NumOtimizacoes$

**Saída:** *Solucoes*

```

Solucoes ← TABELAHASHVAZIA()
para  $i = 1$  to  $NumOtimizacoes$  faça
  se  $i \leq m$  então
     $\lambda \leftarrow VETORCANONICO(m, i)$ 
  senão
     $\lambda \leftarrow VETORPESOSALEATORIOS(m)$ 
  fim se
   $f \leftarrow \lambda'F$ 
   $sol \leftarrow SOLVER(f, X, A, \mathbf{b})$ 
   $chave \leftarrow GERACHAVE(sol.x)$ 
  se não  $EXISTESOLUCAO(Solucoes, chave)$  então
     $Solucoes[chave] \leftarrow sol$ 
  fim se
fim para
retorne Solucoes

```

---

O Algoritmo 1 recebe como entrada as informações do problema, que são a dimensão do espaço de variáveis  $n$ , o número de objetivos  $m$ , o espaço de variáveis  $X$ , o vetor de objetivos  $F$ , a matriz e o vetor de termos independentes das restrições  $A$  e  $\mathbf{b}$ , e o número de otimizações a realizar,  $NumOtimizacoes$ , com diferentes vetores de pesos. O algoritmo retorna uma base de dados de soluções, *Solucoes*, que é uma tabela hash (CORMEN et al., 2001) no qual a chave é uma string gerada com o vetor de variáveis, solução do processo de otimização, e o valor é a estrutura que possui todas as informações da solução retornada. A chave são os valores de cada variável de decisão convertido para uma cadeia de caracteres concatenada, no qual cada dimensão é truncada em valores inteiros. Isto é feito para que duas ou mais soluções parecidas não entrem na base de soluções. Desde modo, haverá no conjunto não dominado soluções diversificadas.

No algoritmo, é realizado um processo de Monte Carlo (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001) para se extrair diferentes amostras do conjunto Pareto-ótimo. Nas primeiras  $m$  interações, são realizadas otimizações mono-objetivo considerando cada critério separadamente, pois o vetor de pesos é um vetor canônico, ou seja, possui como entrada o valor 0 em todas as  $m$  dimensões, exceto na posição  $i$ , que recebe o valor 1. Nas iterações seguintes, gera-se um vetor de pesos aleatórios  $\lambda$  e uma combinação linear convexa dos coeficientes das funções objetivo é armazenada em  $f$ . Assim,

Tabela 1: Preços dos produtos laticínios por unidade de medida em unidades monetárias.

Produto	Unidade	Valor por Unidade de Medida (u.m.)
Leite Integral	L	2,30
Leite Desnatado	L	2,35
Queijo Mussarela	Kg	13,00
Queijo Ricota	Kg	11,30
Manteiga	Kg	26,10
Soro	L	1,20
Matéria Gorda	L	3,20

o problema multiobjetivo transformado em mono-objetivo é solucionado no solver Gurobi (Gurobi, Optimization Inc., 2012), que retorna todas as informações da solução ótima encontrada em *sol*. Se a chave da solução obtida ainda não foi encontrada, então a mesma é armazenada na tabela hash. Ao final, tem-se exclusivamente um conjunto de soluções garantidamente Pareto-ótimas.

### 3 Definição do Problema e Modelagem Matemática

Uma empresa fictícia de laticínios da região do Alto Paranaíba, em Minas Gerais, possui uma linha com 7 produtos derivados do leite. Estes produtos são leite longa vida integral, leite longa vida desnatado, queijo mussarela, queijo ricota, manteiga, soro, e matéria gorda. Deseja-se saber neste problema, qual é a quantidade de cada produto a ser produzida, anualmente, de modo a maximizar o valor de retorno com as vendas e minimizando os custos com investimentos. Obviamente, devem ser respeitadas as restrições de limites e de regras de produção.

Deste modo, sejam as variáveis de decisão não negativas:

- $x_1$ : quantidade de leite longa vida integral, em litros.
- $x_2$ : quantidade de leite longa vida desnatado, em litros.
- $x_3$ : quantidade de queijo mussarela, em quilogramas.
- $x_4$ : quantidade de queijo ricota, em quilogramas.
- $x_5$ : quantidade de manteiga, em quilogramas.
- $x_6$ : quantidade de soro, em litros.
- $x_7$ : quantidade de matéria gorda, em quilogramas.

Cada produto possui um preço fixo, em unidades monetárias, determinado pelas regras de mercado. Tais preços, por unidade de medida, são apresentados na Tabela 1. Deste modo, a função objetivo que modela o retorno com a venda da produção,  $R(\mathbf{x})$ , é apresentada na Equação 3.

$$R(\mathbf{x}) = 2,3x_1 + 2,35x_2 + 13x_3 + 11,3x_4 + 26,1x_5 + 1,2x_6 + 3,2x_7 \quad (3)$$

Obviamente, existe um custo relacionado com o planejamento da produção. Em outras palavras, uma quantia em unidades monetárias deve ser investida para que seja produzida as quantidades de cada um dos setes produtos, representadas pelas variáveis de decisão. Existem dois tipos de custos considerados neste trabalho, sendo eles os investimentos para a produção e publicidade dos produtos.

Para o investimento com a produção dos produtos são considerados aqui custo com a compra de leite cru, o custo com embalagens, custo com imposto, custo com energia, e demais

Tabela 2: Custos lineares por unidade produzida em unidades monetárias.

Produto	Proporção Leite Cru	Preço Leite Cru	Custo Leite Cru	Embalagem	Custo Imposto	Custo Energia	Demais Custos	Total
Leite Integral	1,02	0,8	0,816	0,0050	0,01	0,02	0,10	0,9510
Leite Desnatado	1,02	0,8	0,816	0,0050	0,01	0,02	0,10	0,9510
Queijo Mussarela	10,20	0,8	8,16	0,0010	0,03	0,13	0,11	8,4310
Queijo Ricota	0,80	0,8	0,64	0,0020	0,03	0,07	0,11	0,8520
Manteiga	0	0,8	0	0,0030	0,04	0,05	0,10	0,1930
Soro	0	0,8	0	0,0001	0,02	0,08	0,02	0,1201
Matéria Gorda	0	0,8	0	0	0,02	0,06	0,01	0,0900

Tabela 3: Autoria Própria (Dados Fictícios)

Produto	Investimento por Unidade Quadrática em Propaganda
Leite Integral	0,003
Leite Desnatado	0,003
Queijo Mussarela	0,001
Queijo Ricota	0,001
Manteiga	0,001
Soro	0
Matéria Gorda	0

custos (transporte, mão-de-obra, outras matérias-prima, etc.). A Tabela 2 apresenta os custos por unidade de medida produzida em relação à estes fatores. Por exemplo, para definir o custo unitário com leite cru, é necessário multiplicar a proporção de leite cru usada na fabricação de uma unidade de medida do produto. Deste modo, tem-se na terceira coluna da tabela o preço unitário de leite cru investido para cada unidade de produto a ser produzido. Nas colunas seguintes tem-se, respectivamente, os custos por unidade produzida com embalagem, imposto, energia e demais custos. Assim, somando tais valores para cada produto tem-se os custos com investimento de produção unitário, apresentados na última coluna.

Os investidores, proprietários do laticínio, desejam investir em publicidade para melhorar a visibilidade dos produtos no mercado. Dentre as mercadorias fabricadas, somente o soro e a matéria gorda não terão investimentos com propaganda. A política adotada pelos decisores foi de que para cada quadrado de unidade de medida produzida, será investido uma quantidade, em unidades monetárias, em publicidade. A Tabela 3 apresenta os valores a serem investidos por unidade ao quadrado produzida.

Desta forma, a função objetivo que modela o custo com investimento é apresentado na Equação 4. Observe que esta é uma função quadrática convexa que pode ser solucionado por um algoritmo baseado em pontos interiores adequado (COLEMAN; LI, 1996).

$$I(\mathbf{x}) = 0,003x_1^2 + 0,003x_2^2 + 0,001x_3^2 + 0,001x_4^2 + 0,001x_5^2 + 0,951x_1 + 0,951x_2 + 8,431x_3 + 0,852x_4 + 0,193x_5 + 0,1201x_6 + 0,09x_7 \quad (4)$$

As restrições deste problema são baseadas nas regras de produção, que define a quantidade dos produtos de acordo com as devidas proporções, e também nas capacidades de produção da fábrica (MIRANDA; MARTINS; FARIA, 2007).

As primeira restrição deste problema de otimização multiobjetivo diz respeito ao armazenamento do leite cru na fábrica. A capacidade de estocagem anual é de 2.000.000 litros. Utilizando as proporções de leite utilizadas em cada produto na Tabela 2 a primeira restrição é apresentada na Equação 5.

$$1,02x_1 + 1,02x_2 + 10,2x_3 + 0,8x_4 \leq 2.000.000 \quad (5)$$

O soro é um produto gerado como um subproduto da fabricação do queijo mussarela. Deste modo, a quantidade de soro produzida obedece a restrição apresentada na Equação 6

$$x_6 = 8x_3 \quad (6)$$

A matéria gorda também é um subproduto gerado na fabricação do leite integral, leite desnatado, queijo mussarela e queijo ricota. A quantidade de matéria gorda é de acordo com a restrição apresentada pela Equação 7.

$$x_7 = 0,0061x_1 + 0,0326x_2 + 0,051x_3 + 0,0048x_4 \quad (7)$$

A produção do queijo ricota está limitada à quantidade do soro de leite que é produzido pelo laticínio. Desta maneira, a quantidade de ricota deve obedecer a regra imposta pela restrição mostrada na Equação 8.

$$25x_4 \leq 8x_3 \quad (8)$$

Para a manteiga, a produção deve respeitar a regra de proporção que envolve o leite integral, o leite desnatado, o queijo mussarela e o queijo ricota. Esta regra é apresentada pela Equação 9.

$$0,85x_5 \leq 0,0061x_1 + 0,0326x_2 + 0,051x_3 + 0,0048x_4 \quad (9)$$

As últimas restrições deste problema de otimização, dizem respeito as limitações impostas pela previsão máxima de venda no mercado, considerando a demanda. Estas restrições de limitação são apresentadas na Equação 10.

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1.400.000 \\ x_2 &\leq 300.000 \\ x_3 &\leq 70.000 \\ x_4 &\leq 20.000 \\ x_5 &\leq 70.000 \\ x_6 &\leq 400.000 + 25x_4 \\ x_7 &\leq 3.000 + 0,85x_5 \end{aligned} \quad (10)$$

Dados as informações apresentadas, o modelo de otimização multiobjetivo final é apresentado pela Equação 11. Os resultados da otimização do mesmo pelo Algoritmo 1 é apresentado na próxima seção, juntamente com as devidas análises.

$$\max F(\mathbf{x}) = [R(\mathbf{x}); -I(\mathbf{x})]'$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1,02x_1 + 1,02x_2 + 10,2x_3 + 0,8x_4 &\leq 2.000.000 \\ -8x_3 + x_6 &= 0 \\ -0,0061x_1 - 0,0326x_2 - 0,051x_3 - 0,0048x_4 + x_7 &= 0 \\ -8x_3 + 25x_4 &\leq 0 \\ -0,0061x_1 - 0,0326x_2 - 0,051x_3 - 0,0048x_4 + 0,85x_5 &\leq 0 \\ x_1 &\leq 1.400.000 \quad (11) \\ x_2 &\leq 300.000 \\ x_3 &\leq 70.000 \\ x_4 &\leq 20.000 \\ x_5 &\leq 70.000 \\ -25x_4 + x_6 &\leq 400.000 \\ -0,85x_5 + x_7 &\leq 3.000 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, 7\} \end{aligned}$$

#### 4 Resultados Computacionais

Após executar o Algoritmo 1 no qual o número de otimizações utilizado foi igual a 100, foi encontrado uma amostra do conjunto Pareto ótimo com 89 soluções distintas. Deste conjunto, 58 soluções são lucrativas, de modo que para uma solução  $\mathbf{x}^*$  lucrativa, tem-se  $R(\mathbf{x}^*) > I(\mathbf{x}^*)$ . As soluções danosas restantes foram descartadas, pois não são interessantes para o tomador de decisão.

A Tabela 4 apresenta todas as 58 soluções não dominadas ótimas, no sentido multiobjetivo. As sete primeiras colunas apresentam a quantidade de cada produto a ser produzida. A última coluna apresenta o valor de lucro que cada solução Pareto ótima produzirá, ou seja, a diferença entre o retorno com as vendas e o investimento aplicado. Deste modo, pode-se selecionar a solução que mais se adequa de acordo com as capacidades e desejos financeiros dos decisores do laticínio.

A Figura 1 apresenta a imagem da subconjunto Pareto ótimo e lucrativo encontrado. O eixo horizontal e vertical representam, respectivamente, o investimento e o retorno com as vendas, ambas em unidades monetárias. Para os investimentos das soluções ótimas ilustradas, tais retornos são os melhores possíveis. Isto está de acordo com a modelagem multiobjetivo, no qual busca as melhores soluções que possuem uma relação de compromisso entre os critérios otimizados.

Algumas observações podem ser feitas de acordo com as soluções encontradas. A solução com menor lucratividade é a primeira em negrito. Ela é a solução para o qual o investimento foi minimizado exclusivamente. Por ser muito baixa, ela certamente não deve ser interessante para o tomador de decisão do laticínio. As duas soluções com maior lucratividade, em negrito na tabela, possui um retorno por volta de  $7,65 \cdot 10^4$  unidades monetárias.

A média do lucro das soluções Pareto ótimas encontradas possui uma média amostral de  $5,336 \cdot 10^4$  e desvio padrão amostral de  $2,1931e \cdot 10^4$  unidades monetárias. A Figura 2 apresenta a distribuição do lucro, em unidades monetárias, das soluções não dominadas lucrativas encontradas. Pode-se observar que a maioria das soluções se concentram no intervalo próximo do lucro máximo obtido. Por outro lado, existem um número considerável de soluções com lucros menores e que podem ser adotadas, caso o poder de investimento da empresa não seja muito alto.

Outras considerações para o decisor podem ser feitas através da análise de sensibilidade das soluções. Porém, devido à questão de espaço, isto não é feito neste trabalho.

#### 5 Conclusões

Este trabalho apresentou uma abordagem multiobjetivo que visa determinar a quantidade de produtos de um laticínio a ser produzida de modo maximizar o valor das vendas e minimizar o custo com investimentos. O modelo de variáveis reais, que possui uma função objetivo linear



Tabela 4: Soluções lucrativas não dominadas para a produção de produtos laticínios.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$R(x) - I(x)$
2,23e - 09	8,01e - 12	3,01e - 12	4,68e - 13	8,20e - 12	2,41e - 11	1,40e - 11	<b>3,32e - 09</b>
7,01e - 08	1,80e + 1	1,69e - 10	4,04e - 11	6,91e - 01	1,35e - 09	5,88e - 01	4,40e + 1
4,30e - 10	3,19e + 1	1,43e - 12	4,08e - 13	1,22e + 0	1,14e - 11	1,04e + 0	7,65e + 1
1,06e + 2	2,03e + 2	3,67e + 3	1,17e + 3	2,35e + 2	2,94e + 4	2,00e + 2	5,28e + 4
1,09e + 2	2,07e + 2	3,76e + 3	1,20e + 3	2,41e + 2	3,01e + 4	2,05e + 2	5,38e + 4
1,08e + 1	7,31e + 1	7,65e + 2	2,45e + 2	5,02e + 1	6,12e + 3	4,26e + 1	1,35e + 4
1,10e + 2	2,09e + 2	3,80e + 3	1,21e + 3	2,43e + 2	3,04e + 4	2,07e + 2	5,41e + 4
1,19e + 2	2,20e + 2	4,05e + 3	1,30e + 3	2,60e + 2	3,24e + 4	2,21e + 2	5,66e + 4
1,21e + 2	2,23e + 2	4,12e + 3	1,32e + 3	2,64e + 2	3,30e + 4	2,24e + 2	5,72e + 4
1,22e + 2	2,24e + 2	4,14e + 3	1,33e + 3	2,65e + 2	3,31e + 4	2,26e + 2	5,74e + 4
1,34e + 2	2,41e + 2	4,51e + 3	1,44e + 3	2,89e + 2	3,61e + 4	2,46e + 2	6,07e + 4
1,35e + 2	2,42e + 2	4,54e + 3	1,45e + 3	2,91e + 2	3,63e + 4	2,47e + 2	6,09e + 4
1,37e + 2	2,45e + 2	4,61e + 3	1,48e + 3	2,95e + 2	3,69e + 4	2,51e + 2	6,15e + 4
1,39e + 2	2,48e + 2	4,68e + 3	1,50e + 3	3,00e + 2	3,74e + 4	2,55e + 2	6,20e + 4
1,42e + 2	2,51e + 2	4,75e + 3	1,52e + 3	3,05e + 2	3,80e + 4	2,59e + 2	6,27e + 4
1,53e + 2	2,67e + 2	5,09e + 3	1,63e + 3	3,26e + 2	4,08e + 4	2,77e + 2	6,52e + 4
1,57e + 2	2,72e + 2	5,21e + 3	1,67e + 3	3,33e + 2	4,17e + 4	2,83e + 2	6,60e + 4
1,62e + 2	2,79e + 2	5,37e + 3	1,72e + 3	3,44e + 2	4,30e + 4	2,92e + 2	6,71e + 4
1,67e + 2	2,85e + 2	5,52e + 3	1,77e + 3	3,53e + 2	4,41e + 4	3,00e + 2	6,80e + 4
1,78e + 2	3,01e + 2	5,86e + 3	1,87e + 3	3,75e + 2	4,68e + 4	3,19e + 2	7,00e + 4
1,81e + 2	3,05e + 2	5,96e + 3	1,91e + 3	3,81e + 2	4,76e + 4	3,24e + 2	7,05e + 4
1,85e + 2	3,10e + 2	6,05e + 3	1,94e + 3	3,87e + 2	4,84e + 4	3,29e + 2	7,10e + 4
1,89e + 2	3,15e + 2	6,19e + 3	1,98e + 3	3,96e + 2	4,95e + 4	3,37e + 2	7,16e + 4
2,18e + 2	3,55e + 2	7,08e + 3	2,27e + 3	4,53e + 2	5,67e + 4	3,85e + 2	7,49e + 4
2,19e + 2	3,56e + 2	7,09e + 3	2,27e + 3	4,54e + 2	5,67e + 4	3,86e + 2	7,50e + 4
2,41e + 2	3,86e + 2	7,77e + 3	2,49e + 3	4,97e + 2	6,21e + 4	4,22e + 2	7,62e + 4
2,48e + 2	3,96e + 2	7,98e + 3	2,55e + 3	5,10e + 2	6,39e + 4	4,34e + 2	7,64e + 4
2,48e + 2	3,96e + 2	7,99e + 3	2,56e + 3	5,11e + 2	6,39e + 4	4,34e + 2	7,64e + 4
2,49e + 2	3,97e + 2	8,02e + 3	2,57e + 3	5,13e + 2	6,42e + 4	4,36e + 2	7,64e + 4
2,58e + 2	4,10e + 2	8,30e + 3	2,65e + 3	5,30e + 2	6,64e + 4	4,51e + 2	<b>7,65e + 4</b>
2,60e + 2	4,12e + 2	8,35e + 3	2,67e + 3	5,34e + 2	6,68e + 4	4,54e + 2	<b>7,65e + 4</b>
2,66e + 1	9,46e + 1	1,25e + 3	3,98e + 2	8,08e + 1	9,96e + 3	6,87e + 1	2,13e + 4
2,82e + 2	4,42e + 2	9,01e + 3	2,88e + 3	5,76e + 2	7,21e + 4	4,89e + 2	7,59e + 4
2,84e + 2	4,45e + 2	9,08e + 3	2,90e + 3	5,80e + 2	7,26e + 4	4,93e + 2	7,58e + 4
3,10e + 2	4,80e + 2	9,87e + 3	3,16e + 3	6,31e + 2	7,90e + 4	5,36e + 2	7,37e + 4
3,21e + 2	4,96e + 2	1,02e + 4	3,27e + 3	6,53e + 2	8,17e + 4	5,55e + 2	7,23e + 4
3,38e + 2	5,18e + 2	1,07e + 4	3,43e + 3	6,84e + 2	8,57e + 4	5,82e + 2	6,99e + 4
3,50e + 2	5,34e + 2	1,11e + 4	3,55e + 3	7,08e + 2	8,87e + 4	6,02e + 2	6,77e + 4
3,51e + 2	5,36e + 2	1,11e + 4	3,56e + 3	7,10e + 2	8,89e + 4	6,03e + 2	6,76e + 4
3,55e + 1	1,07e + 2	1,52e + 3	4,86e + 2	9,82e + 1	1,21e + 4	8,34e + 1	2,55e + 4
3,63e + 2	5,52e + 2	1,15e + 4	3,67e + 3	7,33e + 2	9,18e + 4	6,23e + 2	6,51e + 4
3,81e + 2	5,76e + 2	1,20e + 4	3,85e + 3	7,68e + 2	9,62e + 4	6,53e + 2	6,09e + 4
4,08e + 2	6,13e + 2	1,28e + 4	4,11e + 3	8,20e + 2	1,03e + 5	6,97e + 2	5,32e + 4
4,15e + 2	6,23e + 2	1,31e + 4	4,18e + 3	8,34e + 2	1,04e + 5	7,09e + 2	5,10e + 4
4,25e + 2	6,36e + 2	1,34e + 4	4,28e + 3	8,54e + 2	1,07e + 5	7,26e + 2	4,76e + 4
4,37e + 2	6,52e + 2	1,37e + 4	4,39e + 3	8,77e + 2	1,10e + 5	7,45e + 2	4,34e + 4
4,41e + 2	6,58e + 2	1,39e + 4	4,44e + 3	8,85e + 2	1,11e + 5	7,52e + 2	4,18e + 4
4,97e + 2	7,35e + 2	1,56e + 4	4,98e + 3	9,94e + 2	1,25e + 5	8,45e + 2	1,72e + 4
5,67e + 1	1,36e + 2	2,16e + 3	6,92e + 2	1,39e + 2	1,73e + 4	1,18e + 2	3,48e + 4
5,94e + 1	1,39e + 2	2,25e + 3	7,18e + 2	1,45e + 2	1,80e + 4	1,23e + 2	3,59e + 4
6,14e + 1	1,42e + 2	2,31e + 3	7,38e + 2	1,48e + 2	1,84e + 4	1,26e + 2	3,67e + 4
6,77e + 1	1,50e + 2	2,50e + 3	7,99e + 2	1,61e + 2	2,00e + 4	1,36e + 2	3,92e + 4
7,00e + 0	6,79e + 1	6,50e + 2	2,08e + 2	4,28e + 1	5,20e + 3	3,64e + 1	1,16e + 4
7,75e + 1	1,64e + 2	2,79e + 3	8,94e + 2	1,80e + 2	2,24e + 4	1,53e + 2	4,30e + 4
7,56e + 0	6,87e + 1	6,67e + 2	2,13e + 2	4,39e + 1	5,33e + 3	3,73e + 1	1,19e + 4
8,18e + 1	1,70e + 2	2,93e + 3	9,36e + 2	1,88e + 2	2,34e + 4	1,60e + 2	4,46e + 4
8,70e + 1	1,77e + 2	3,08e + 3	9,87e + 2	1,98e + 2	2,47e + 4	1,68e + 2	4,64e + 4
9,58e + 1	1,89e + 2	3,35e + 3	1,07e + 3	2,15e + 2	2,68e + 4	1,83e + 2	4,94e + 4

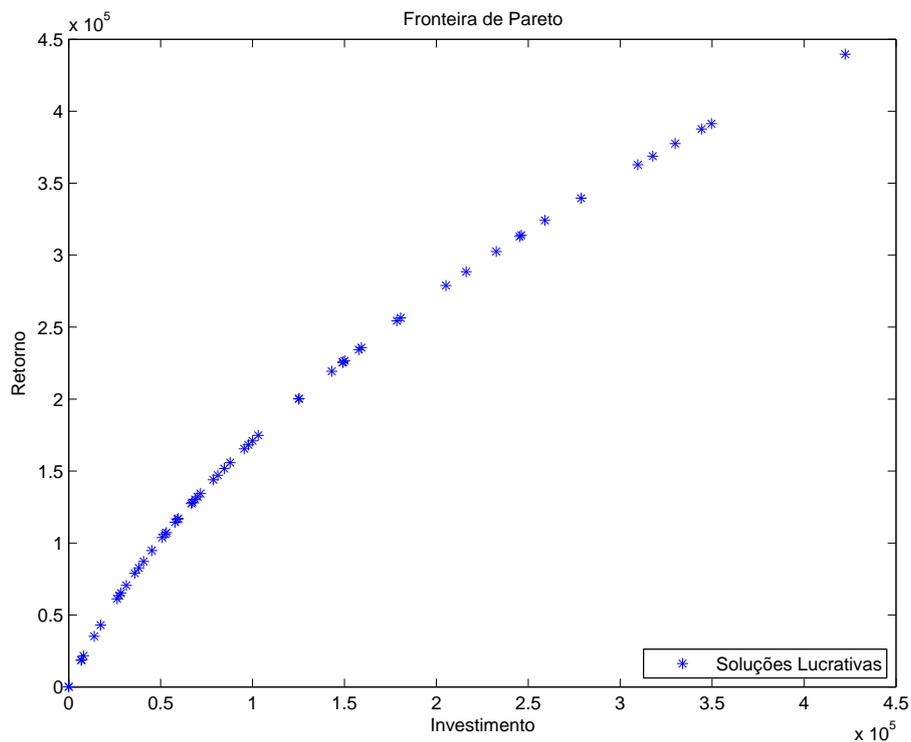


Figura 1: Fronteira de Pareto para as soluções lucrativas do modelo apresentado na Equação 11.

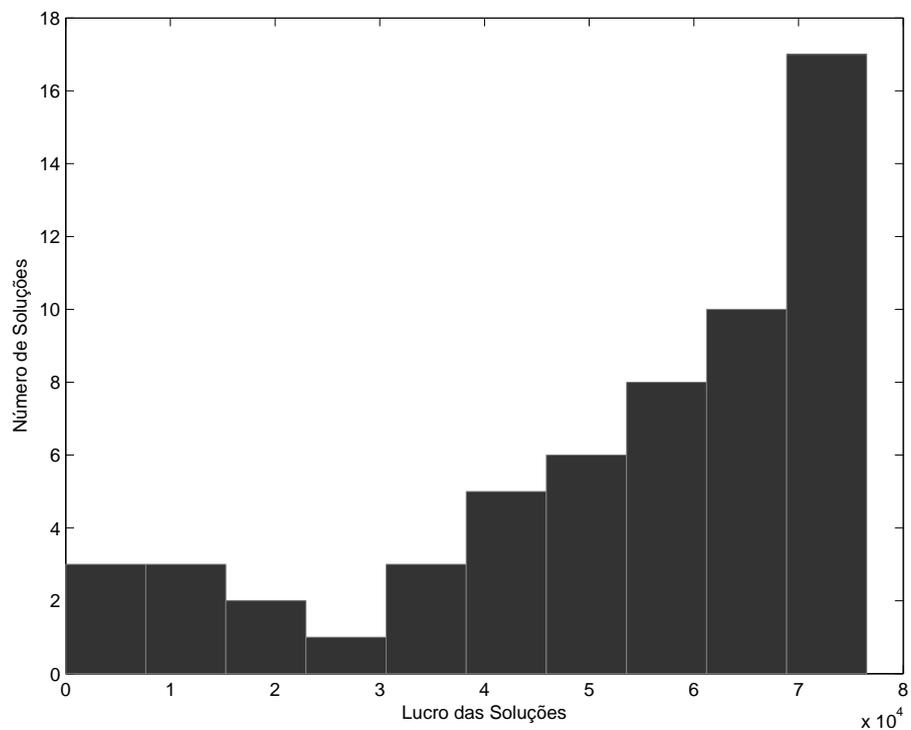


Figura 2: Distribuição do lucro das soluções apresentadas na Figura 1.

e a outra quadrática com restrições puramente lineares, foi solucionado via método  $P_\lambda$  em um processo de Monte Carlo, no qual as soluções não dominadas e diferenciadas por uma chave foram armazenadas em uma tabela hash.

Da amostra do conjunto Pareto ótimo encontrada, foram excluídas as soluções que geram prejuízo, ficando somente aquelas lucrativas. Uma análise destas soluções foram feitas através de gráficos e estatísticas. Deste modo, foi possível observar o comportamento das soluções de acordo com o valor investido e o retornado.

O conjunto com soluções ótimas, no sentido multiobjetivo, produto final deste trabalho, deve ser analisado pelo tomador de decisão para que escolha a solução que melhor se adequa à capacidade de investimento do laticínio, gerando assim o lucro maior possível.

## Referências

COLEMAN, T. F.; LI, Y. A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 6, n. 4, p. 1040–1058, 1996.

CORMEN, T. H. et al. *Introduction to algorithms*. [S.l.]: MIT press, 2001.

DOUCET, A.; FREITAS, N. D.; GORDON, N. *An introduction to sequential Monte Carlo methods*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2001.

FAORO, D. *Modelo de programação multiobjetivo de um sistema de produção leiteira – Considerando objetivos de sustentabilidade*. Dissertação de mestrado — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: <<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/215>>.

GAMEIRO, A. H.; ROCCO, C. D.; CAIXEITA-FILHO, J. V. Modelo matemático para otimização e avaliação de unidade produtora de leite caracterizada pela integração lavoura-pecuária: consideração de parâmetros econômicos, logísticos e ambientais. *Anais do XLIX Congresso da Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia do Campo (SOBER)*, p. 1–16, 2011.

Gurobi, Optimization Inc. “*Gurobi Optimizer Reference Manual*”. 2012. Disponível em: <<http://www.gurobi.com>>.

JÚNIOR, J. F. A.; SILVA, C. A. B. Um sistema de apoio à decisão baseado em planilha eletrônica para o planejamento da produção na indústria de laticínios. *Revista Brasileira de Agroinformática*, v. 7, n. 2, p. 17–31, 2005.

KAWANO, B. R. *Otimização na indústria de laticínios: oportunidades de eficiência energética e econômica*. Dissertação de mestrado — Faculdade de Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas, 2012. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000905536>>.

MENEZHINI, R. C. M. *Ferramenta para maximização do lucro de laticínios pelo planejamento do mix ótimo de produtos lácteos e precificação dos componentes do leite cru*. Tese de doutorado — Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”. Universidade de São Paulo, 2013. Disponível em: <<http://www.esalq.usp.br/pg/teses/3749797.pdf>>.

MIRANDA, G. J.; MARTINS, V. F.; FARIA, A. F. O uso da programação linear num contexto de laticínios com várias restrições na capacidade produtiva. *Custos e @gronegócios online*, v. 3, p. 40–58, maio 2007. ISSN 1808–2882.

OLISZESKI, C. A. N.; COLMENERO, J. C.; KOVALESKI, J. L. Desafios da inserção da pesquisa operacional em agroindústrias de pequeno porte. *Revista ADMpg Gestão Estratégica*, v. 2, n. 2, p. 113–118, 2009.

STEUER, R. E. *Multiple criteria optimization: Theory, computation, and application*. [S.l.]: Wiley & Sons, 1986.

TAKAHASHI, R. H. C. Otimização escalar e vetorial. *Notas de Aula*, 2007. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/taka/Download/OTEV-Vol3.pdf>>.

TRINDADE, A. M. S.; SILVA, R. W. S. M. Sistema de criação de bovinos de leite para a região sudoeste do rio grande do sul. *Sistemas de Produção*, Embrapa Pecuária Sul, n. 3, 2008. ISSN 1679–3641.