

BÚSQUEDA DE LA FRONTERA EFICIENTE PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CON COBERTURA COHERENTE

Felipe Ignacio Azócar Simonet

Universidad Técnica Federico Santa María
Av. santa María 6400, Vitacura, Santiago. Chile
felipe.azocar@alumnos.usm.cl

Luis Gonzalo Acosta Espejo

Universidad Técnica Federico Santa María
Av. santa María 6400, Vitacura, Santiago. Chile
Luis.acosta@usm.cl

RESUMEN

En el presente trabajo se busca encontrar una aproximación de la frontera eficiente para el problema bi-objetivo de localización con cobertura coherente. Las soluciones eficientes soportadas se obtienen resolviendo el problema combinatorio bi-objetivo a través del método de las ponderaciones y las soluciones eficientes no soportadas se obtienen a través de la relajación lagrangeana. Los resultados que se entregan son para redes de 55, 100 y 150 vértices.

PALABRAS CLAVE. Problema de localización coherente, Frontera eficiente, Relajación lagrangiana.

Área principal ADM, OA, OC

ABSTRACT

In the present document seeks to find an approximation of the efficient frontier for bi-objective location problem with coherent covering. Supported efficient solutions are obtained by solving the bi-objective combinatorial problem by the method of weights and unsupported efficient solutions are obtained through the Lagrangian relaxation. The results are given for networks of 55, 100 and 150 nodes.

KEYWORDS. Coherent covering location problem, efficient frontier, lagrangian relaxation.

Main area ADM, OA, OC

1. Introducción

Una actividad importante al trabajar con problemas multi-objetivo es encontrar la frontera eficiente. Esta frontera eficiente la conforman todas las soluciones no dominadas, esto es, soluciones cuya característica es que la mejora en uno de los objetivos puede ser conseguida únicamente en perjuicio de, por lo menos, uno de los otros objetivos; para profundizar los conceptos sobre problemas multi-objetivo se puede consultar, por ejemplo, Steuer (1986).

El proceso de búsqueda de la frontera eficiente se ve influenciado por el tipo de problema multi-objetivo tratado: problema lineal multi-objetivo o problema combinatorio multi-objetivo. Los métodos desarrollados para los problemas lineal multi-objetivo, no siempre pueden ser directamente aplicados para solucionar problemas combinatorio multi-objetivo. Esto se debe a que la frontera eficiente de los problemas combinatorios multi-objetivo está formada por soluciones eficientes soportadas y soluciones eficientes no soportadas. Las soluciones eficientes soportadas son las que pertenecen a la envolvente convexa (*convex hull*) del conjunto de soluciones eficientes. En la Figura 1, que representa una frontera eficiente para un problema combinatorio bi-objetivo, los puntos A, B, y F son soluciones eficientes soportadas, mientras que los puntos C, D y E son soluciones eficientes no soportadas. Los puntos G y H son soluciones dominadas.

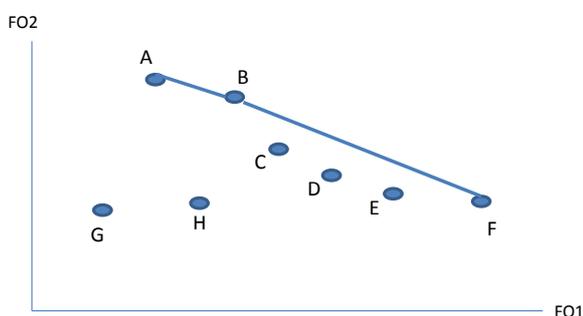


Figura 1. Frontera eficiente para un problema combinatorio bi-objetivo.

Un problema relevante dentro de los problemas de localización es el problema de localización con cobertura coherente, CCLP (por sus siglas en inglés de *Coherent Covering Location Problem*), que además de identificar la localización de las instalaciones busca establecer una relación de coherencia entre las áreas de demanda. Este problema fue presentado por Serra (1996) como un problema de localización jerárquico de dos niveles bi-objetivo. La jerarquía entre instalaciones se define a través de los tipos de servicio que una instalación puede ofrecer, así una instalación del primer nivel ofrece los servicios más básicos, mientras que, la cantidad de servicios ofrecidos aumenta conforme aumenta el nivel de la instalación. La coherencia, en este contexto, se alcanza cuando todas las áreas de demanda cubiertas por una instalación en el primer nivel son cubiertas por una sola instalación del segundo nivel. En el CCLP se define un objetivo por cada tipo de instalación.

En la Sección 2 se presenta la formulación matemática del CCLP, la Sección 3 se aborda la metodología de para determinar la frontera eficiente, mientras que en la Sección 4 se entregan los resultados computacionales y, finalmente, las conclusiones se entregan en la Sección 5.

2. Problema de localización con cobertura coherente

En la literatura especializada está siendo recurrente reconocer la estructura jerárquica presente en los sistemas que se busca representar a través de modelos matemáticos. Para facilitar este abordaje se denomina de sistema jerárquico a un sistema

formado por dos o más tipos distintos de entidades que, de manera conjunta, proporcionan productos y/o servicios. Tal sistema jerárquico hace distinción entre niveles de servicio y niveles de facilidades: una facilidad puede ofrecer más de un nivel de servicio.

En este contexto, un Problema de Localización Jerárquico consiste en determinar simultáneamente la combinación apropiada de niveles (o tipos) de servicios; el lugar donde esos conjuntos de servicios (las facilidades) deben ser instalados; y realizar la asignación de los puntos de demanda a las facilidades. Este proceso debe ser realizado siguiendo un criterio de optimización. Revisiones recientes sobre los problemas de localización jerárquicos pueden ser encontrados en Sahin et al. (2007) y Farahani et al. (2014).

Las aplicaciones para este tipo de problemas son variadas y pueden encontrarse, por ejemplo, en sistemas de salud donde se busca la localización simultánea de hospitales y centros de salud (ver por ejemplo Moore y ReVelle (1982); Galvão et al. (2002) y Sahin et al. (2007)); sistemas de producción y distribución aquí se trata de localizar fábricas y centros de distribución ver, por ejemplo, Chardaire et al. (1999) y Acosta et al. (2010).

Una clase importante de estos tipos de problemas son los problemas de localización de máxima cobertura (Farahani (2012) entrega una revisión completa y bien organizada de estos tipos de problemas). En el contexto de los problemas jerárquicos, considere un sistema que provee dos niveles de servicios (A y B) y que posee dos niveles de facilidades (A y B). El sistema jerárquico que se busca modelar considera que un nivel de servicio r está disponible solamente en una facilidad de nivel igual o mayor que r . El problema que debe resolverse es el de localizar un dado número de facilidades, para cada uno de los dos niveles definidos, de manera que se maximice por separado la población con acceso al servicio de nivel A y la con acceso al servicio de nivel B. Una población es considerada cubierta por un nivel de servicio si ella se encuentra dentro de la distancia de servicio predefinida y se cumple la restricción de coherencia. Este modelo es una extensión del modelo propuesto por Moore y ReVelle (1982).

A continuación se presenta la nomenclatura utilizada en el modelo matemático del CCLP propuesto por Serra (1996).

I: Conjunto de puntos de demanda.

J: Conjunto de potenciales localizaciones para las facilidades del tipo A.

K: Conjunto de potenciales localizaciones para las facilidades del tipo B.

i : Índice para los puntos de demanda.

j : Índice para las potenciales localizaciones de una facilidad del tipo A.

k : Índice para las potenciales localizaciones de una facilidad del tipo B.

d_{ij} : Distancia más corta entre la demanda i y la facilidad j .

S^{IA} : Distancia crítica para la cobertura de la demanda i por una facilidad del tipo A que ofrece el servicio de nivel A.

S^{IB} : Distancia crítica para la cobertura de la demanda i por una facilidad del tipo B que ofrece el servicio de nivel A.

T^{IB} : Distancia crítica para la cobertura de la demanda i por una facilidad del tipo B que ofrece el servicio de nivel B.

S^{AB} : Distancia máxima permitida entre una facilidad del tipo A y una facilidad del tipo B.

$$MA_i = \{j \in J | d_{ij} \leq S^{IA}\}$$

$$MB_i = \{k \in K | d_{ik} \leq S^{IB}\}$$

$$NB_i = \{k \in K | d_{ik} \leq T^{IB}\}$$

$$O_j = \{k \in K | d_{jk} \leq S^{AB}\}$$

h_i : Población de la demanda i .

p : Número máximo de facilidades del tipo A.

q : Número máximo de facilidades del tipo B.

Además, se consideran las siguientes variables:

$Z_i^A = 1$, si el área i es cubierta por el servicio A, 0 en caso contrario.

$Z_i^B = 1$, si el área i es cubierta por el servicio B, 0 en caso contrario.

$x_j = 1$, si una facilidad del tipo A es localizada en j , 0 en caso contrario.

$y_k = 1$, si una facilidad del tipo B es localizada en k , 0 en caso contrario.

El modelo matemático es el siguiente:

$$\text{Max } \sum_{i \in I} h_i Z_i^A \quad (1)$$

$$\text{Max } \sum_{i \in I} h_i Z_i^B \quad (2)$$

Sujeto a:

$$Z_i^A \leq \sum_{j \in MA_i} x_j + \sum_{k \in MB_i} y_k \quad \forall i \in I \quad (3)$$

$$Z_i^B \leq \sum_{k \in NB_i} y_k \quad \forall i \in I \quad (4)$$

$$x_j \leq \sum_{k \in O_j} y_k \quad \forall j \in J \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} x_j \leq p \quad (6)$$

$$\sum_{k \in K} y_k \leq q \quad (7)$$

$$Z_i^A, Z_i^B, x_j, y_k \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (8)$$

Los objetivos (1) y (2) son maximizar la cobertura por ambos tipos de facilidades. Las restricciones (3) establecen que un punto de demanda no puede ser considerado cubierto por un servicio de nivel A si es que no existe una facilidad de nivel A dentro de S^{IA} o una facilidad de nivel B dentro una distancia S^{IB} . Observe que, a pesar que las distancias críticas S^{IA} y S^{IB} hacen referencia al mismo nivel de servicio A, estas distancias pueden ser diferentes debido a que son ofrecidos por facilidades de niveles diferentes. Esto puede representar, por ejemplo, el hecho de que las instalaciones más completas son más atractivas y la población está dispuesta a recorrer mayores distancias para llegar a ellas. Las restricción (4) permiten que un punto de demanda sea cubierto por un servicio de nivel B si existe por lo menos una facilidad de nivel B dentro de una distancia T^{IB} . Las restricción (5) obligan a que se cumpla la coherencia al forzar a que las facilidades del tipo A tengan una facilidad del tipo B dentro de una distancia crítica S^{AB} . Las restricciones (6) y (7) establecen la cantidad máxima de instalaciones del tipo A y B a localizar. Las restricción (8) definen la naturaleza de las variables de decisión.

3. Metodología de resolución

Para la resolución del problema antes presentado, se procede a calcular la frontera eficiente a través de la búsqueda de soluciones eficientes soportadas y no soportadas. La estrategia es inspirada en la metodología descrita en Alminyana et al. (1998) para generar la frontera eficiente para el problema de las pq -medianas bi-objetivo y en Espejo y Galvão (2004) para el Problema de Localización Jerárquico de Máxima Cobertura bi-objetivo sin la restricción de coherencia.

Sea el problema de programación lineal bi-objetivo (P): $\text{Max } \{g_1(x), g_2(x) \mid Ax \leq b; x \geq 0 \text{ y entero}\}$, donde $g_1, g_2: R^n \rightarrow R$, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ y $x \in Z_+^n$. El proceso de generación de la frontera eficiente comprende las etapas:

Etapla 1: Definir el problema paramétrico para (P)

Usando el vector de pesos $(\alpha, (1-\alpha))$, $\alpha \geq 0$, se define el problema paramétrico para (P), esto es, $(P(\alpha): \max \{\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2 \mid Ax \leq b; x \geq 0 \text{ y entero}\})$.

Etapla 2: Resolver el problema $P(\alpha)$

El problema $P(\alpha)$ se resuelve usando una heurística lagrangeana. En cada iteración de la heurística se obtiene un límite superior, a partir del cual es posible obtener una

solución viable (primal) para (P).

La búsqueda de las soluciones eficientes soportadas se realiza en la Etapa 1, donde se resuelve el modelo CCLP utilizando el método de las ponderaciones, en este caso, el modelo es $Max (\alpha \sum_{i \in I} h_i Z_i^A + (1 - \alpha) \sum_{i \in I} h_i Z_i^B)$ sujeto a (3)-(8). Donde α es un valor entre 0 y 1. Para encontrar las soluciones soportadas se resolvieron 10.000 problemas paramétricos, para valores de α comenzando desde 0 y realizando incrementos de 10^{-4} .

Para encontrar las soluciones no soportadas, en la Etapa 2, se define la relajación lagrangeana del problema paramétrico. En este caso se relajan las restricciones de coherencia (5), utilizando el multiplicador $\lambda_j \geq 0, \forall j \in J$:

$$Max \left(\alpha \sum_{i \in I} h_i Z_i^A + (1 - \alpha) \sum_{i \in I} h_i Z_i^B + \sum_{j \in J} \lambda_j \left(\sum_{k \in O_j} y_k - x_j \right) \right)$$

sujeto a (3),(4),(6)-(8).

El dual lagrangeano se resuelve con el método de los subgradientes.

4. Resumen de los resultados computacionales

El procedimiento descrito en la Sección 3 se implementó en AMPL. Para rodar los problemas se utilizó un computador Intel Core i3 de 2.10 GHz y 10 GB de memoria RAM. Los resultados son para las redes de 55 vértices de Swain (1971) y las redes de 100 y 150 vértices de Galvão y ReVelle (1996).

Luego de rodar para 55 nodos, se rueda para 100 nodos y 150 nodos. Los resultados se pueden observar en el siguiente gráfico y tablas:

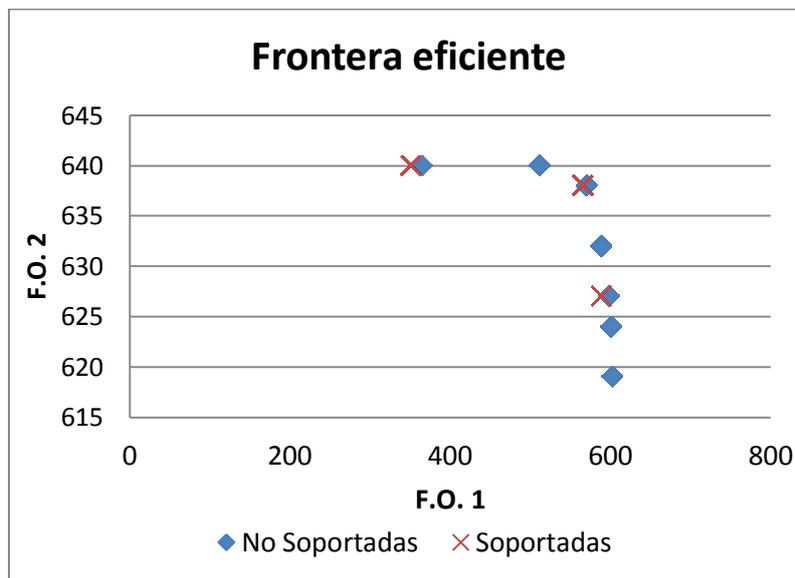


Figura 2. Muestra la frontera eficiente para un modelo de 55 nodos y con $p = q = 5, s^{IA} = 3, s^{IB} = 8, t^{IB} = 15$ y $s^{AB} = 10$.

Nodos	q	p	Cobertura para soluciones soportadas				Soluciones Soportadas	Soluciones No Soportadas
			F.O.1		F.O.2			
			Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo		
55	1	1	395	395	486	486	1	2
		2	395	395	486	486	1	2
		3	395	395	486	486	1	2
		4	395	395	486	486	1	2
	2	1	634	696	843	847	2	4
		2	634	696	843	847	2	4
		3	634	696	843	847	2	4
		4	634	696	843	847	2	4
		5	634	696	843	847	2	4
	3	1	471	504	525	548	3	5
		2	471	505	519	548	4	5
		3	471	509	519	548	4	6
		4	471	509	519	548	4	5
		5	471	509	519	548	4	4

Tabla 1. Entrega información del modelo con 55 nodos y con $s^{IA} = 6$, $s^{IB} = 8$, $t^{IB} = 10$ y $s^{AB} = 4$.

Nodos	q	p	Cobertura para soluciones soportadas				Soluciones Soportadas	Soluciones No Soportadas
			F.O.1		F.O.2			
			Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo		
100	1	1	395	395	486	486	1	1
		2	395	395	486	486	1	1
		3	395	395	486	486	1	1
		4	395	395	486	486	1	1
	2	1	634	696	843	847	2	2
		2	634	696	843	847	2	2
		3	634	696	843	847	2	2
		4	634	696	843	847	2	2
		5	634	696	843	847	2	2
	3	1	930	930	1170	1170	1	1
		2	930	930	1170	1170	1	1
		3	930	930	1170	1170	1	1
		4	930	930	1170	1170	1	1
		5	930	930	1170	1170	1	1

Tabla 2. Entrega información del modelo con 100 nodos y con $s^{IA} = 40$, $s^{IB} = 50$, $t^{IB} = 60$ y $s^{AB} = 20$.

Nodos	q	p	Cobertura para soluciones soportadas				Soluciones Soportadas	Soluciones No Soportadas
			F.O.1		F.O.2			
			Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo		
150	1	1	1097	1097	1180	1180	1	1
		2	1097	1097	1180	1180	1	1
		3	1097	1097	1180	1180	1	1
		4	1097	1097	1180	1180	1	1
	2	1	2001	2064	2217	2229	2	2
		2	2001	2064	2217	2229	2	2
		3	2001	2064	2217	2229	2	2
		4	2001	2064	2217	2229	2	2
		5	2001	2064	2217	2229	2	2
	3	1	2749	2944	3097	3228	2	2
		2	2749	2944	3097	3228	2	2
		3	2749	2944	3097	3228	2	2
		4	2749	2944	3097	3228	2	2
		5	2749	2944	3097	3228	2	2

Tabla 3. Entrega información del modelo con 150 nodos y con $s^{IA} = 9$, $s^{IB} = 24$, $t^{IB} = 45$ y $s^{AB} = 30$.

En las tablas anteriores se puede observar la cantidad de soluciones soportadas, no soportadas y la cobertura mínima y máxima de cada tipo de servicio (proveniente de la F.O.1 y F.O.2), esta información para diferentes cantidades de p y q . La cobertura mínima y máxima sirve para conocer cuál es el posible rango a cubrir por los servicios del tipo A y B , es decir, cual es la población mínima que se cubrirá con cierta configuración y la máxima a cubrir con dicha configuración. Se puede notar que para la red de 150 nodos, bajo la configuración dada, la cantidad de facilidades del tipo A no influye en la cobertura de población, pero si puede influir en entregar un servicio más rápido.

5. Conclusiones

En este artículo se busca solucionar un problema bi-objetivo combinatorio, el CCLP. Los resultados computacionales para 45 instancias del problema con redes de hasta 150 vértices muestran que la propuesta es una opción viable para determinar una aproximación de la frontera eficiente, pues se consiguen identificar tanto soluciones eficientes soportadas como soluciones eficientes no soportadas.

Referencias bibliográficas

- Acosta, L.G., Ortega, R., Muñoz, R., González-Platteau, R.** (2010), Biocombustibles en Chile. III. Localización simultánea de centros de acopio y plantas productoras, *Agrociencia*, 44 (7) 861-872.
- Alminyana, A., Borrás, F. y Pastor, J. T.**, (1998), A new directed branching heuristic for the pq-median problem, *Location Science*, 6, 1-23.
- Chardaire, P., Lutton, J.L y Sutter, A.** (1999), Upper and lower bounds for the two-level simple plant location problema, *Annals of Operations Research*, 86, 117 – 140.
- Espejo, L.G., Galvão, R.D.**, (2004), Uma aproximação da fronteira eficiente para um problema de localização hierárquico de máxima cobertura, *Pesquisa Operacional*, 24, 303-321.
- Farahani, R., Asgari, N., Heidari, N., Hosseini, M., Goh, M.**, (2012), Covering problems in facility location: A review, *Computers & Industrial Engineering*, 62, 368-407.

Farahani, R. Hrkmatfar, M.Fahimnia, B. Kazemzadeh, N. (2014), Hierarchical facility location problem: Models, classifications, techniques, and applications, *Computers & Industrial Engineering*, 68, 104-117

Galvão, R.D., Espejo, L.G.A y Boffey, T.B., (2002), A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the Municipality of Rio de Janeiro, *European Journal of Operational Research*, 138, 495-517.

Galvão, R.D. y ReVelle, C.S. (1996), A Lagrangean heuristic for the maximal covering location problem, *European Journal of Operational Research*, 88, 114-123.

Moore, G.C. y ReVelle, C.S. (1982), The hierarchical service location problem, *Management Science*, 28, 775-780.

Sahin, G., Süral, H., Meral, S.,(2007), Location analysis for regionalization of Turkish Red Crescent blood services, *Computers and Operations Research*, 34, 692-704.

Serra, D. (1996), The coherent covering location problem, *The Journal of the Regional Science Association International*, 75, 79-101.

Steuer, R.E. *Multiple criteria optimization: theory, computation, and applications.* Wiley, New York. 1986.

Swain, R. *A decomposition algorithm for a class of facility location problems,* Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY, 1971.