

## **ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE *GOAL PROGRAMMING* E MÍNIMOS QUADRADOS ORDINÁRIOS NO AJUSTE DE MODELOS DE REGRESSÃO**

**Joyce de Almeida Alves**

Universidade Federal de Lavras  
Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000 Lavras/MG  
joyce\_a.alves@yahoo.com.br

**Lucas Rezende Gomide**

Universidade Federal de Lavras  
Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000 Lavras/MG  
lucasgomide@dcf.ufla.br

**Marcos Antônio Isaac Júnior**

Universidade Federal de Lavras  
Campus Universitário, Caixa Postal 3037, CEP 37200-000 Lavras/MG  
maisaacjr@yahoo.com.br

**Eliezer de Almeida Melo**

Agroplan - Consultoria Florestal e Ambiental  
Avenida 20 de Agosto, nº. 2.083, Centro, CEP 75.701-010, Catalão/GO  
elliezmelo@hotmail.com.br

### **RESUMO**

O estudo teve como objetivo comparar o ajuste da função de afilamento (polinômio do quinto grau) considerando dois métodos de ajustamento, o primeiro, via *Goal programming* (GP) e o segundo, pelo método clássico envolvendo a minimização da soma dos quadrados dos resíduos (mínimos quadrados ordinários), na estimativa dos diâmetros a várias alturas ao longo do fuste. A base de dados, composta por 92 árvores e 1.386 observações, foi obtida de plantações clonais de eucalipto. Os resultados mostraram que os valores dos parâmetros estimados foram muito semelhantes entre os dois métodos, entretanto apresentaram desempenhos diferentes na estimação de diâmetros ao longo do fuste. Os métodos GP e regressão foram igualmente precisos na estimativa dos volumes totais.

**PALAVRAS CHAVE.** Mínimos Quadrados Ordinários, Programação Linear, Mínimos Desvios Absolutos.

**Área principal (AG&MA - PO na Agricultura e Meio Ambiente)**

### **ABSTRACT**

The study aimed to compare the fit of a taper equation (fifth-degree polynomial) considering two fitting methods, the first, Goal programming (GP) and the second, using the classical method which minimize the sum of squared residuals (ordinary least squares), for estimating diameter at any point along the stem. The data, with 92 trees and 1386 observations, were obtained from cloned eucalyptus plantations. The results showed that values of the estimated parameters were similar between the two fitting methods. However, their performances were different in the estimation of diameters along the stem. The methods GP and regression were equally precise in the estimation of total volume.

**KEYWORDS.** Ordinary Least Squares. Linear Programming. Least Absolute Deviations.

**Main area (AG&MA - PO na Agricultura e Meio Ambiente)**

## 1. Introdução

Conhecer o estoque volumétrico de uma floresta é importante para o planejamento florestal, uma vez que essa informação é base para a definição de planos de suprimento de madeira, bem como elemento básico para estudos de ciclos de corte e análises econômicas do investimento. A quantificação de variáveis dendrométricas, como o volume de uma árvore, é um procedimento caro e oneroso, sendo obtido por meio da cubagem rigorosa. Esse método consiste na derrubada de árvores e coleta de diâmetros ao longo do fuste, sendo realizada uma amostragem da população. Posteriormente, ajusta-se modelos matemáticos de regressão, os quais permitirão a obtenção da estimativa volumétrica individual para cada árvore. A partir dessas estimativas é possível conhecer o estoque volumétrico do povoamento, trabalhando em conjunto a amostragem pelo inventário florestal.

O volume, por ser uma variável básica no planejamento das operações florestais, muitas vezes pode ser uma informação deficitária, principalmente quando se trabalha com regimes de manejo destinados a produção de madeira sólida para serraria e outros fins. Buscando suprir esta carência, surgem as funções de afilamento, que permitem a obtenção do volume, bem como a estimativa do diâmetro ( $d_i$ ) a qualquer altura no fuste ( $h_i$ ), no que tange o intervalo entre a base da árvore até a altura correspondente ao diâmetro mínimo comercial. Alguns exemplos de trabalhos que utilizaram essa técnica foram Assis et al., (2002), Garber e Maguire (2003), Mendonça et al., (2007), Horle et al., (2010) e Fonweban et al., (2011).

Ao longo dos anos diversas funções de afilamento foram desenvolvidas. Algumas de complexidade simples, como as de Kozak, Munro e Smith (1969), Ormerod (1973) e Schöepfer (1996). Além dessas, as polinomiais de potências fracionárias e inteiras (HRADETZKY 1976), as polinomiais segmentadas (MAX; BURKHART, 1976; DEMAERSCHALK E KOZAK, 1977) e as funções de expoente-variável (KOZAK, 1988) também foram utilizadas para descrever o perfil das árvores.

Apesar do uso das funções na estimativa dos diâmetros, existe uma forte dependência da qualidade do ajuste de regressão, para garantir uma confiabilidade da informação gerada. Nesse sentido, uma série de considerações são requisitadas para o uso das equações ajustadas. Um dos métodos mais utilizados para encontrar os valores dos parâmetros da equação na análise de regressão linear é o método de mínimos quadrados ordinários (MMQ). Esse método baseia-se na ideia de minimizar a soma de quadrados dos resíduos. Sua aplicação exige que os resíduos tenham distribuição aproximadamente normal, sejam independentes e identicamente distribuídos. A violação desses pressupostos leva à ineficiência do estimador de mínimos quadrados e a inferências incorretas. Além disso, o MMQ é sensível à presença de *outliers*, sendo usado exclusivamente para modelos lineares de regressão. Existem ainda modelos não lineares e que utilizam algoritmos como o de Levenberg-Marquardt, Gauss-Newton, dentre outros.

Alternativamente, os parâmetros de uma equação linear também podem ser obtidos via *goal programming*, considerando a minimização dos desvios absolutos (LI, 1998; ÇEREZCI e GÖKPMAR, 2005). A abordagem de *goal programming* para minimizar os desvios absolutos é uma alternativa tão precisa quanto a regressão pelo método dos mínimos quadrados ordinários (SILVA et al., 2006), apresentando uma superioridade na presença de *outliers* (AHMAD et al. 2005; OSPINA e OSPINA, 2010). O método foi desenvolvido e introduzido por Charnes e Cooper (1961) com o propósito de resolução de problemas envolvendo múltiplos objetivos. Segundo Ignizio (1985), *goal programming* é um método eficiente para modelar, solucionar e analisar modelos matemáticos que envolvem objetivos múltiplos, sendo muitas vezes conflitantes. Field (1973) introduziu o método na área florestal, apresentando suas potencialidades de aplicação a problemas de manejo florestal. Além disso, é possível encontrar trabalhos que utilizaram a técnica para outros fins como observado em Oliveira et al., (2002), Diáz-Balteiro e Romero (2003), Gómez et al., (2006) e Mello et al., (2008).

Nesse sentido, o estudo teve como objetivo comparar o ajuste da função de afilamento (polinômio do quinto grau) considerando dois métodos de ajustamento, o primeiro, via *goal programming* e o segundo, pelo método clássico envolvendo a minimização da soma dos

quadrados dos resíduos, na estimativa dos diâmetros a várias alturas ao longo do fuste.

## 2. Material e métodos

### 2.1 Base de dados

Os dados utilizados neste estudo são provenientes de um plantio clonal de eucalipto, localizado nos municípios de Catalão e Ouvidor, sudeste de Goiás, Brasil. Esse plantio é de responsabilidade da empresa Copebrás, pertencente ao grupo Anglo American. Foram selecionadas 92 árvores considerando a distribuição diamétrica, os diferentes materiais genéticos, a variação de idade (2,8 - 7 anos) e o potencial produtivo de cada local (Índices de sítio de 29, 33 e 37 m).

A cubagem rigorosa, realizada em 2012, consistiu na medição dos diâmetros nas alturas de 0,1 m; 0,5 m; 1 m; 1,3 m (DAP); 2 m e a partir dessa altura, de dois em dois metros, até o diâmetro mínimo de 4 cm, totalizando 1.386 observações. Além disso, mediu-se a altura total (Ht) de cada árvore (Figura 1).

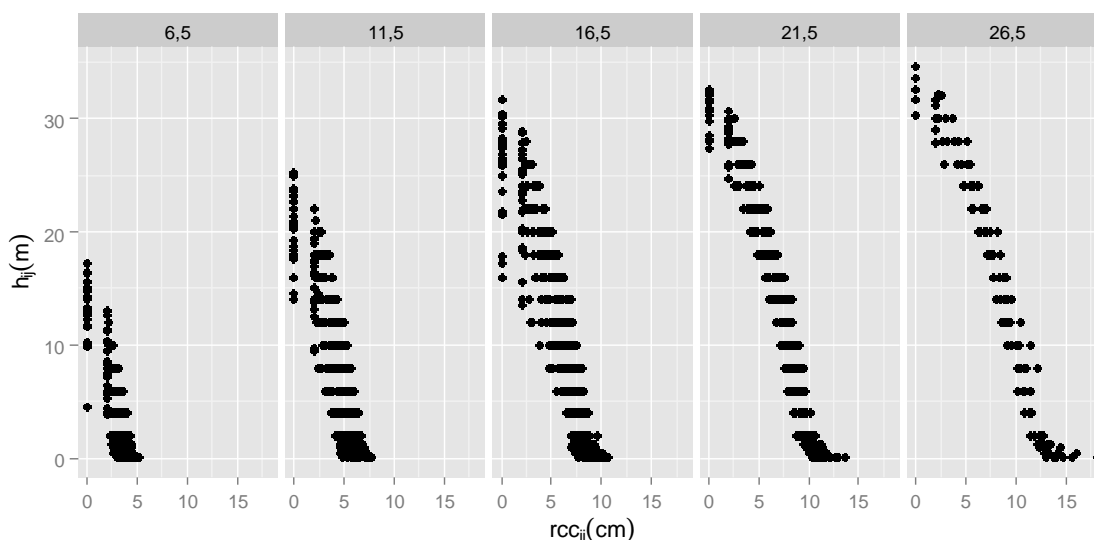


Figura 1 Perfis das árvores amostradas por classe de diâmetro. Em que: 6,5; 11,5; 16,5; 21,5 e 26,5 = valores centrais de classe da distribuição diamétrica (cm);  $h_{ij}$  = altura árvore  $i$  na posição  $j$ ;  $rcc_{ij}$  = raios com casca para a árvore  $i$  na posição  $j$ .

Após a tabulação dos dados foi realizada uma análise exploratória dos mesmos para verificar a existência de dados discrepantes e apresentar as estatísticas descritivas das variáveis.

### 2.2 Função de afilamento

A função linear (1) utilizada neste estudo foi o polinômio de quinto grau, conforme proposto por Schöpfer (1996), sendo que  $dcc_{ij}$ =diâmetro com casca referente a  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima posição do fuste (cm);  $DAP_i$ = diâmetro à altura do peito da  $i$ -ésima árvore;  $h_{ij}$ =altura referente a  $i$ -ésima árvore na  $j$ -ésima posição do fuste (m) e  $H_{t_i}$ = altura total da  $i$ -ésima árvore (m).

$$\frac{dcc_{ij}}{DAP_i} = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{h_{ij}}{H_{t_i}} \right) + \beta_2 \left( \frac{h_{ij}}{H_{t_i}} \right)^2 + \beta_3 \left( \frac{h_{ij}}{H_{t_i}} \right)^3 + \beta_4 \left( \frac{h_{ij}}{H_{t_i}} \right)^4 + \beta_5 \left( \frac{h_{ij}}{H_{t_i}} \right)^5 + \epsilon_i \quad (1)$$

Para o ajuste dessa função por regressão foi utilizado o método de mínimos quadrados ordinários (MMQ), o qual se baseia na minimização da soma dos quadrados dos desvios. Considerando-se a representação matricial da função linear (3) pode-se obter as estimativas dos parâmetros pela equação (4).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{51} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{52} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} & x_{53} \\ 1 & x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & x_{54} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & x_{4n} & x_{5n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{Y}) \quad (4)$$

n = número de observações=1.386

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$$

As pressuposições existentes para modelos lineares foram verificadas, ou seja, se os erros são independentes, se apresentam variância constante e se são normalmente distribuídos. Essas pressuposições foram averiguadas por meio da análise gráfica de resíduos, pelo gráfico quantil-quantil e pelo gráfico da raiz quadrada dos resíduos padronizados absolutos em função dos valores ajustados. A independência dos resíduos foi verificada pelo teste de Durbin-Watson, utilizando a função *durbinWatsonTest* (FOX, 2008) do pacote *car* (FOX e WEISBERG, 2011) e a presença de observações influentes pelo gráfico da distância de Cook. As análises foram realizadas no software R<sup>®</sup> versão 2.15.2 (R CORE TEAM, 2012).

Para estimar os parâmetros da função via *Goal programming* (GP), a função objetivo foi representada pela equação (5), sendo dimensionada para minimizar a soma dos desvios absolutos e nesse modelo de programação foram incluídas restrições referentes a i-ésima observação (6). O modelo via *goal programming* foi processado no software LINGO (*Language for Interactive General Optimizer*) versão 9.0.

Função Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n (d_i^+ + d_i^-) \quad (5)$$

Sujeito a:

$$X_1 + \left(\frac{h_i}{Ht_i}\right) X_2 + \left(\frac{h_i}{Ht_i}\right)^2 X_3 + \left(\frac{h_i}{Ht_i}\right)^3 X_4 + \left(\frac{h_i}{Ht_i}\right)^4 X_5 + \left(\frac{h_i}{Ht_i}\right)^5 X_6 - d_i^+ + d_i^- = \frac{dcc_{ij}}{DAP_i}, \forall_i \quad (6)$$

$X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6$  irrestritos

$i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Em que:  $d_i^+$  = Desvio superior referente a i-ésima meta em diâmetro;  $d_i^-$  = Desvio inferior referente a i-ésima meta em diâmetro;  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  e  $X_6$  = Variáveis de decisão do modelo, representando os parâmetros da função de afilamento  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$ ; n = número

total de observações obtidas para cada posição medida.

### 2.3 Avaliação dos resultados

As funções geradas pelos dois métodos foram avaliadas por meio da análise gráfica de resíduos, soma dos resíduos absolutos (SRA), soma dos quadrados dos resíduos (SQR) e pela média dos erros percentuais absolutos (*Mean Absolute Percentage Errors* - MAPE).

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 \quad (7)$$

$$SRA = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| \quad (8)$$

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{|\varepsilon_i|}{y_i} \times 100 \right]}{n} \quad (9)$$

As seguintes estatísticas, aplicadas por Parresol, Hotvedt e Cao (1987), foram calculadas considerando cada altura de medição ( $h_{ij}$ ) para avaliar o desempenho das duas metodologias em estimar diâmetros ao longo do fuste: Desvio ( $\bar{D}$ ), Desvio padrão das diferenças (SD), Soma dos quadrados dos resíduos relativos (SSRR) e porcentagem dos resíduos (RP).

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (dcc_i - \widehat{dcc}_i)}{n} \quad (10)$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( (dcc_i - \widehat{dcc}_i) - (\bar{D}) \right)^2}{n-1}} \quad (11)$$

$$SSRR = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dcc_i - \widehat{dcc}_i}{dcc_i} \right)^2 \quad (12)$$

$$RP = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{dcc_i - \widehat{dcc}_i}{dcc_i} \right) \times 100}{n} \quad (13)$$

Um ranking foi elaborado para comparar as duas metodologias. Para cada estatística calculada, foi atribuído valor 1 para o método que apresentou maior acurácia e 2 para o outro. A partir do somatório dessas notas foi possível identificar o melhor método para estimar o diâmetro em cada posição de medição.

Além dessas medidas, foram construídos gráficos de volume observado versus volume gerado pela integral da função de afilamento. Quanto mais próximos os pontos estão da linha gerada que impõe  $x=y$ , mais precisas são as estimativas de volume.

$$V_i = \frac{\pi}{40000} \int_{h_1}^{h_2} (dicc_{ij})^2 \delta h \quad (14)$$

### 3. Resultados e discussão

As variáveis diâmetro à altura do peito ( $DAP_i$ ), altura total ( $Ht_i$ ) e diâmetros nas várias posições ( $dcc_{ij}$ ) apresentaram coeficientes de variação de 35,45%, 27,11% e 48,28%, respectivamente, indicando que  $DAP_i$  e  $dcc_{ij}$  são mais heterogêneas. A Figura 2 apresenta os boxplots de cada variável. Nota-se que as distribuições são assimétricas para  $dcc_{ij}$  e  $Ht_i$  e simétrica para  $DAP_i$ . Possíveis *outliers* foram observados apenas para  $dcc_{ij}$ .

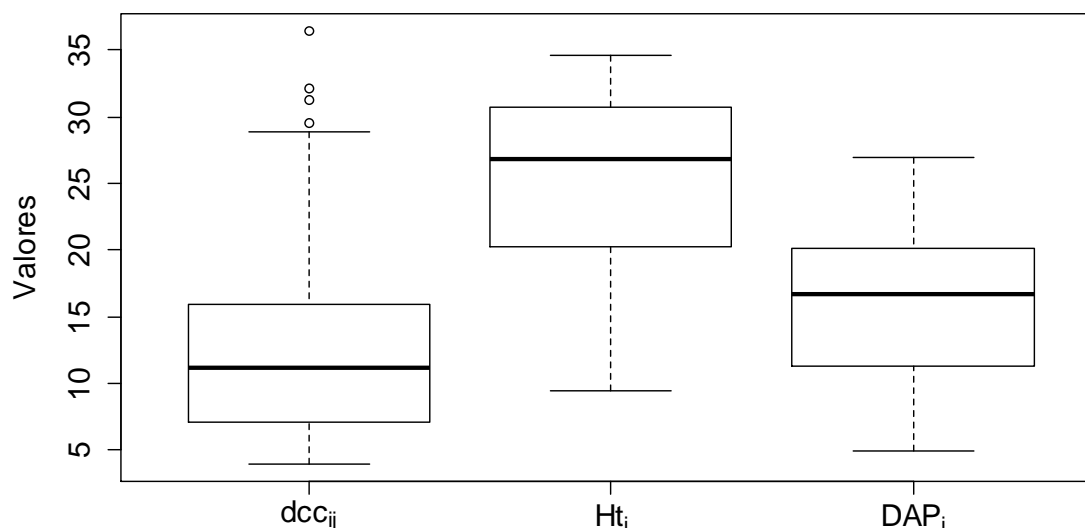


Figura 2 Gráfico Boxplot para cada variável medida em campo.

Todos os parâmetros estimados pela regressão foram significativos. Seus valores foram semelhantes aos gerados por *Goal programming* (Tabela 1), condizendo com os resultados encontrados por Silva et al. (2006). De maneira geral, os valores das medidas de avaliação dos dois métodos apresentaram poucas diferenças entre si, indicando que GP é tão preciso quanto a Regressão. A SRA e a MAPE foram menores para GP e a SQR foi menor para a regressão, esse resultado já era esperado, já que GP foi baseado na minimização dos resíduos absolutos e a regressão na minimização da soma de quadrados dos resíduos (Tabela 2).

Os resíduos nos dois casos se apresentaram bem distribuídos, sem indícios de heterocedasticidade (variância não constante) e não normalidade. Entretanto, apresentaram evidências de possíveis *outliers* e subestimativas na base da árvore. Na técnica de GP, para valores de  $dcc_{ij}/DAP_i$  maiores que 1 (base da árvore) observou-se mais pontos acima de 0,1 (linha projetada em cinza) em relação a regressão, indicando que o problema de subestimativa foi maior (Figura 3).

Tabela 1 Valores dos parâmetros obtidos para a função de afilamento por regressão e *goal programming* (GP).

Parâmetro	Regressão				GP*
	Valor	Erro Padrão	Valor-t	Pr(> t )	Valor
$\beta_0$	1,132984	0,004153	272,84	<0,0001	1,109837
$\beta_1$	-2,546960	0,113588	-22,42	<0,0001	-2,206445
$\beta_2$	10,495293	0,780658	13,44	<0,0001	8,909803
$\beta_3$	-25,037627	2,077997	-12,05	<0,0001	-21,67053
$\beta_4$	26,312793	2,343226	11,23	<0,0001	23,03071
$\beta_5$	-10,356956	0,938940	-11,03	<0,0001	-9,173373

\*Valor da Função Objetivo= 44,09; Número de restrições= 1.386.

Tabela 2 Soma dos resíduos absolutos (SRA), soma dos quadrados dos resíduos (SQR) e média dos erros percentuais absolutos (MAPE) para regressão e *goal programming*.

Medida	Regressão	Goal programming
SRA	44,72	44,09
SQR	3,14	3,23
MAPE	5,03%	4,97%

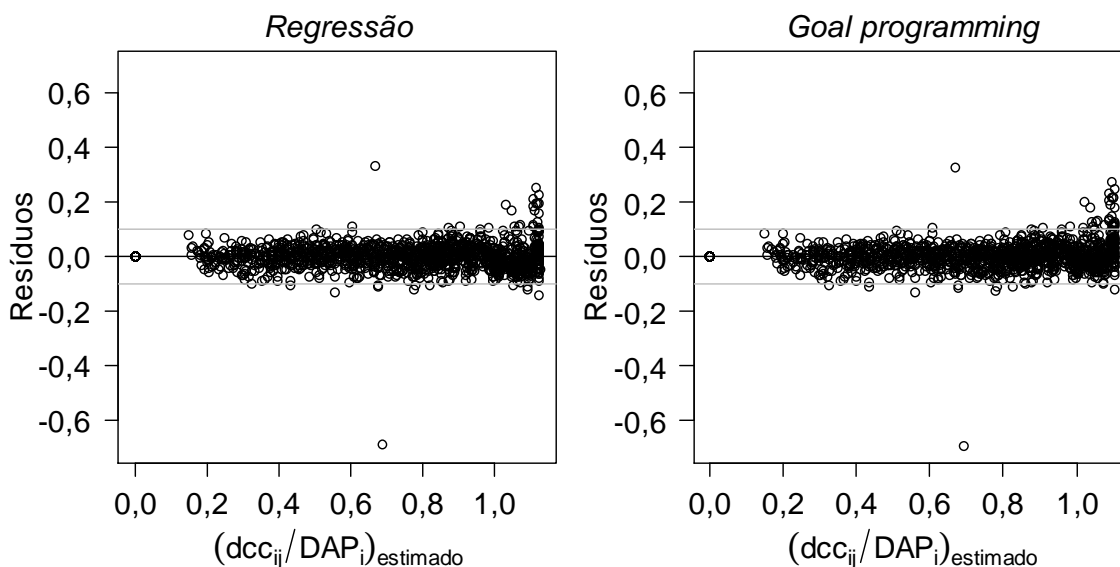


Figura 3 Gráficos de resíduos para as funções ajustadas por regressão e *goal programming*.

A normalidade dos resíduos (Figura 4a) e homogeneidade da variância (Figura 4b) também foi confirmada pelos gráficos de diagnóstico. Observações influentes não foram detectadas (Figura 4c).

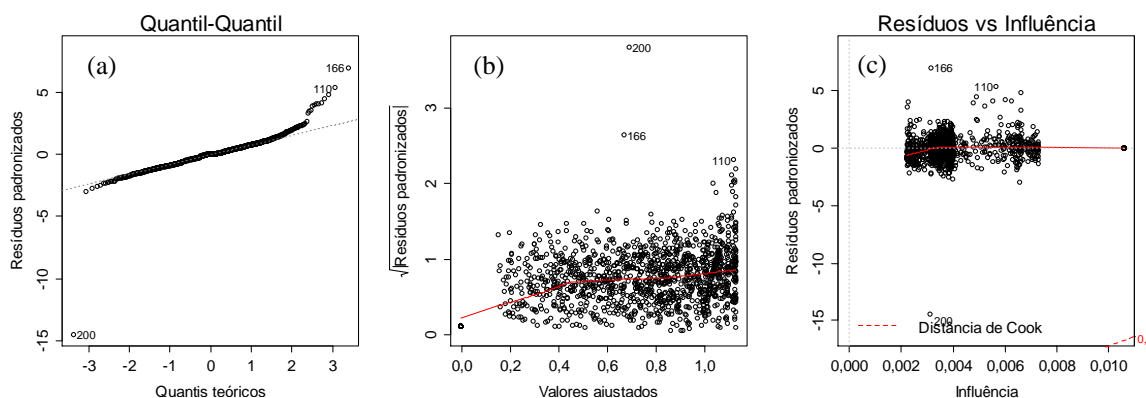


Figura 4 Gráficos de diagnóstico da regressão.

O teste de Durbin-Watson indicou a presença de autocorrelação residual, que causa a violação da pressuposição de independência dos resíduos. Os dados utilizados no ajuste são decorrentes de várias medições realizadas ao longo do tronco de cada árvore, portanto as observações numa mesma árvore tendem a ser correlacionadas entre si. Esse problema é verificado em diversos trabalhos sobre funções de afilamento e remediado pelo uso de modelos mistos (CORRAL-RIVAS et al., 2007; YANG, HUANG e MENG, 2009; LI e WEISKITTEL, 2010).

Na presença de autocorrelação os estimadores de mínimos quadrados continuam não viesados e consistentes, porém perdem sua eficiência. Desse modo, o erro padrão de cada



coeficiente pode ser afetado, invalidando os testes de hipóteses e intervalos de confiança (NETER et al., 1990). A inexistência de pressupostos para técnica de *goal programming* pode ser considerada uma vantagem. Ospina e Ospina (2010) afirmam que *Goal programming* é uma ferramenta útil para obtenção dos parâmetros de modelos de regressão múltipla, principalmente, quando ocorre a violação dos pressupostos sobre os erros. Além disso, como observado por Ahmad et al. (2005) essa técnica é mais precisa quando *outliers* estão presentes.

Na Tabela 3 são apresentadas as estatísticas calculadas para cada posição de medição e o ranking. Baseando-se na pontuação total gerada pelo ranking, pode-se afirmar que da posição 1 m até 4 m, *Goal programming* obteve maior acurácia. Já a regressão, foi melhor para estimar os diâmetros nas posições de 6 m a 24 m. Isso implica dizer que para as árvores de maior altura o uso da regressão é mais vantajoso.

Tabela 3 Desvio (D), Desvio padrão das diferenças (SD), Soma do quadrado dos resíduos relativos (SSRR) e porcentagem dos resíduos (RP) em cada posição de medição (h<sub>j</sub>) para Regressão (R) e *Goal programming* (GP). <sup>(1)</sup> maior acurácia, <sup>(2)</sup> menor acurácia.

h <sub>i</sub> (m)	D		SD		SSRR		RP		Total	
	R	GP	R	GP	R	GP	R	GP	R	GP
0,1	0,3916 <sup>(1)</sup>	0,7025 <sup>(2)</sup>	1,14409 <sup>(1)</sup>	1,15674 <sup>(2)</sup>	0,3883 <sup>(1)</sup>	0,4942 <sup>(2)</sup>	2,5499 <sup>(1)</sup>	4,4206 <sup>(2)</sup>	4	8
0,5	-0,1600 <sup>(2)</sup>	0,0780 <sup>(1)</sup>	0,94568 <sup>(1)</sup>	0,95742 <sup>(2)</sup>	0,2546 <sup>(2)</sup>	0,2484 <sup>(1)</sup>	-0,2680 <sup>(1)</sup>	1,2022 <sup>(2)</sup>	6	6
1	-0,3464 <sup>(2)</sup>	-0,1822 <sup>(1)</sup>	0,59242 <sup>(2)</sup>	0,51630 <sup>(1)</sup>	0,1735 <sup>(2)</sup>	0,1369 <sup>(1)</sup>	-1,3134 <sup>(2)</sup>	-0,3132 <sup>(1)</sup>	8	4
1,3	-0,3128 <sup>(2)</sup>	-0,1849 <sup>(1)</sup>	0,48510 <sup>(2)</sup>	0,39377 <sup>(1)</sup>	0,1148 <sup>(2)</sup>	0,0838 <sup>(1)</sup>	-0,9771 <sup>(2)</sup>	-0,2228 <sup>(1)</sup>	8	4
2	-0,2767 <sup>(2)</sup>	-0,2144 <sup>(1)</sup>	0,63500 <sup>(2)</sup>	0,58336 <sup>(1)</sup>	0,1885 <sup>(2)</sup>	0,1642 <sup>(1)</sup>	-0,6997 <sup>(2)</sup>	-0,3877 <sup>(1)</sup>	8	4
4	-0,0139 <sup>(1)</sup>	-0,0422 <sup>(2)</sup>	0,62121 <sup>(2)</sup>	0,61874 <sup>(1)</sup>	0,1936 <sup>(2)</sup>	0,1863 <sup>(1)</sup>	0,8189 <sup>(2)</sup>	0,5482 <sup>(1)</sup>	7	5
6	-0,0577 <sup>(1)</sup>	-0,1096 <sup>(2)</sup>	0,69495 <sup>(1)</sup>	0,70159 <sup>(2)</sup>	0,3290 <sup>(1)</sup>	0,3322 <sup>(2)</sup>	0,0257 <sup>(1)</sup>	-0,3913 <sup>(2)</sup>	4	8
8	-0,0730 <sup>(1)</sup>	-0,1278 <sup>(2)</sup>	0,66167 <sup>(1)</sup>	0,66552 <sup>(2)</sup>	0,2741 <sup>(1)</sup>	0,2810 <sup>(2)</sup>	-0,4432 <sup>(1)</sup>	-0,9040 <sup>(2)</sup>	4	8
10	-0,1888 <sup>(1)</sup>	-0,2430 <sup>(2)</sup>	0,75545 <sup>(1)</sup>	0,76284 <sup>(2)</sup>	0,3598 <sup>(1)</sup>	0,3742 <sup>(2)</sup>	-1,1732 <sup>(1)</sup>	-1,6603 <sup>(2)</sup>	4	8
12	-0,2125 <sup>(1)</sup>	-0,2675 <sup>(2)</sup>	0,76310 <sup>(1)</sup>	0,77005 <sup>(2)</sup>	0,4292 <sup>(1)</sup>	0,4481 <sup>(2)</sup>	-1,5175 <sup>(1)</sup>	-2,0548 <sup>(2)</sup>	4	8
14	-0,1177 <sup>(1)</sup>	-0,1755 <sup>(2)</sup>	0,66302 <sup>(1)</sup>	0,66740 <sup>(2)</sup>	0,3123 <sup>(1)</sup>	0,3223 <sup>(2)</sup>	-1,0061 <sup>(1)</sup>	-1,5794 <sup>(2)</sup>	4	8
16	-0,0531 <sup>(1)</sup>	-0,1179 <sup>(2)</sup>	0,59607 <sup>(1)</sup>	0,60180 <sup>(2)</sup>	0,1830 <sup>(1)</sup>	0,1894 <sup>(2)</sup>	-0,3221 <sup>(1)</sup>	-0,9658 <sup>(2)</sup>	4	8
18	-0,0460 <sup>(1)</sup>	-0,1162 <sup>(2)</sup>	0,59919 <sup>(1)</sup>	0,61042 <sup>(2)</sup>	0,2240 <sup>(1)</sup>	0,2297 <sup>(2)</sup>	-0,4541 <sup>(1)</sup>	-1,1593 <sup>(2)</sup>	4	8
20	0,0390 <sup>(1)</sup>	-0,0330 <sup>(1)</sup>	0,63409 <sup>(1)</sup>	0,67308 <sup>(2)</sup>	0,2741 <sup>(1)</sup>	0,2762 <sup>(2)</sup>	0,2844 <sup>(1)</sup>	-0,4469 <sup>(2)</sup>	5	7
22	0,0292 <sup>(1)</sup>	-0,0316 <sup>(2)</sup>	0,51870 <sup>(2)</sup>	0,51430 <sup>(1)</sup>	0,1490 <sup>(1)</sup>	0,1514 <sup>(2)</sup>	0,1997 <sup>(1)</sup>	-0,4458 <sup>(2)</sup>	5	7
24	0,0143 <sup>(1)</sup>	-0,0291 <sup>(2)</sup>	0,62851 <sup>(1)</sup>	0,62996 <sup>(2)</sup>	0,2627 <sup>(1)</sup>	0,2638 <sup>(2)</sup>	-0,2067 <sup>(1)</sup>	-0,6798 <sup>(2)</sup>	4	8
26	0,0342 <sup>(2)</sup>	0,0093 <sup>(1)</sup>	0,67632 <sup>(1)</sup>	0,68218 <sup>(2)</sup>	0,2882 <sup>(1)</sup>	0,2914 <sup>(2)</sup>	0,5309 <sup>(2)</sup>	0,2419 <sup>(1)</sup>	6	6
28	0,0207 <sup>(1)</sup>	0,0233 <sup>(2)</sup>	0,71662 <sup>(1)</sup>	0,71745 <sup>(2)</sup>	0,3126 <sup>(1)</sup>	0,3160 <sup>(2)</sup>	0,4249 <sup>(1)</sup>	0,5416 <sup>(2)</sup>	4	8
30	-0,2032 <sup>(2)</sup>	-0,1837 <sup>(1)</sup>	0,95075 <sup>(1)</sup>	0,95078 <sup>(2)</sup>	0,2879 <sup>(2)</sup>	0,2846 <sup>(1)</sup>	-4,6844 <sup>(2)</sup>	-4,2429 <sup>(1)</sup>	7	5
32	0,0588 <sup>(1)</sup>	0,0684 <sup>(2)</sup>	0,06912 <sup>(1)</sup>	0,09680 <sup>(2)</sup>	0,0005 <sup>(1)</sup>	0,0007 <sup>(2)</sup>	1,0764 <sup>(1)</sup>	1,3686 <sup>(2)</sup>	4	8
<b>Total</b>	27	33	25	35	26	34	26	34	104	136

As integrais de cada função de afilamento resultaram em valores similares de volume total individual. Observou-se nos gráficos um aumento da dispersão dos pontos e tendência de superestimar para maiores volumes (Figura 5).



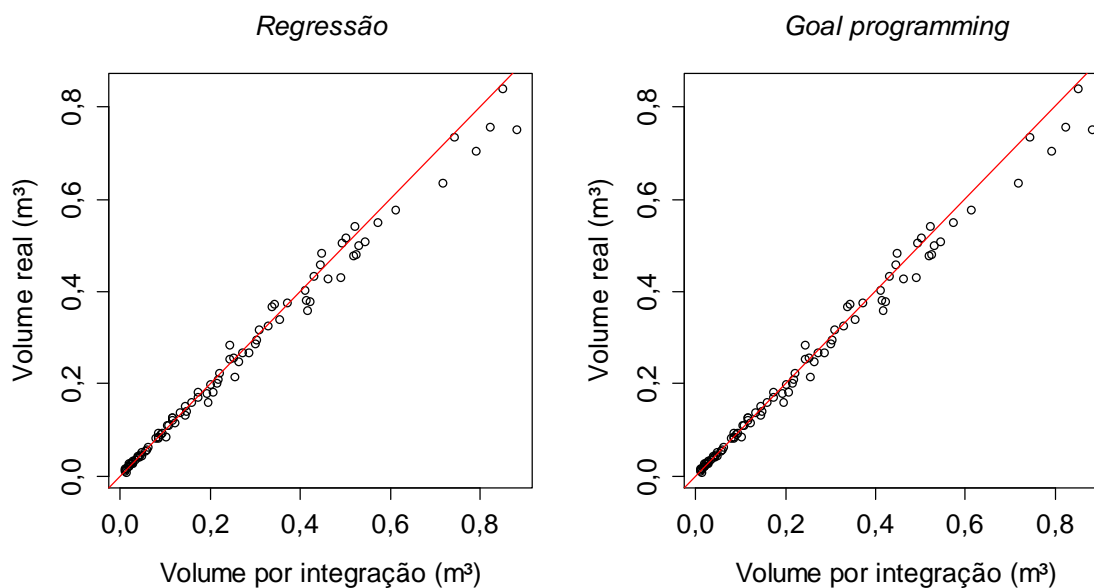


Figura 5 Comparação entre o volume total real de cada árvore com o volume total obtido pela integração das funções de afilamento ajustadas por regressão e *goal programming*.

#### 4. Conclusões

Com a técnica de *Goal programming* é possível estimar os parâmetros da função de afilamento pela minimização dos desvios absolutos e seus valores foram muito semelhantes àqueles estimados pela regressão. As medidas de avaliação mostraram que a técnica de GP é tão precisa quanto a regressão. Entretanto, apresentaram desempenhos diferentes para estimar diâmetros ao longo do fuste, sendo que regressão permitiu estimativas de diâmetro mais acuradas para a maioria das posições ao longo do fuste.

Em ambos os métodos a função subestimou a variável resposta na base da árvore e superestimou para maiores volumes. A regressão violou a pressuposição de independência dos resíduos, e isso implica em problemas nas inferências. Nesse sentido, GP pode ser mais adequada.

#### 5. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio financeiro.

#### Referências

Ahmad, M. H., Adnan, R., Kong, L. C. e Daud, Z. M. (2005), Comparing Least-Squares and Goal Programming Estimates of Linear Regression Parameters, *Matematika*, 21, 2, 101-112.

Assis, A. L., Scolforo, J. R. S., Mello, J. M., Oliveira, A. D. (2002), Avaliação de modelos polinomiais não-segmentados na estimativa de diâmetros e volumes comerciais de *Pinus taeda*, *Ciência Florestal*, 12, 1, 89-107.

Çerezci, E. T., Gökpmar, F. (2005), A comparison of three linear programming models for computing least absolute values estimates, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 34, 95-102.

**Charnes, A., Cooper, W. W.**, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vol 1, John Wiley & Sons, New York, 1961.

**Corral-Rivas, J. J., Dièguez-Aranda, U., Corral-Rivas, S., Dorado, F. D.** (2007), A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (Mexico), *Forest Ecology and Management*, 238, 118–129.

**Demaerschalk, J.P., Kozak, A.** (1977), The whole-bole system: a conditioned dual equation system for precise prediction of tree profiles, *Canadian Journal Forest Research*, 7, 488-497.

**Diáz-Balteiro, L., Romero, C.** (2003), Forest management optimisation models when carbon captured is considered: a goal programming approach, *Forest Ecology and Management*, 174, 447–457.

**Field, D. B.** (1973), Goal programming for forest management, *Forest Science*, 19, 2, 125-135.

**Fonweban, J., Gardiner, B., Macdonald, E., Auty, D.** (2011), Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. *Forestry*, 84, 1, 49-60.

**Fox, J.** *Applied regression analysis and generalized linear models*, 2.ed., Los Angeles: Sage Publications, 2008.

**Fox, J., Weisberg, S.** *An {R} companion to applied regression*, 2.ed., Los Angeles: Sage Publications, 2011.

**Garber, S. M., Maguire, D. A.** (2003), Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures, *Forest Ecology and Management*, 179, 1/3, 507-522.

**Gómez, T., Hernández, M., León, M. A., Caballero, R.** (2006), A forest planning problem solved via a linear fractional goal programming model, *Forest Ecology and Management*, 227, 79-88.

**Horle, D. C., Mendonça, A. R., Carvalho, S. P. C., Calegario, N.** (2010), Modelagem não linear do perfil longitudinal de fustes de *Pinus oocarpa*. *Cerne*, 16, 2, 177-184.

**Hradetzky, J.** *Analyse und interpretation statistischer abhängerkeiten. (Biometrische Beiträge zu aktuellen forschungsprojekten)*. Baden: Württemberg Mitteilungen der FVA, Helf 76, 1976. 146p. (Abt. Biometrie und Informatik, 21).

**Ignizio, J. P.**, Introduction to linear goal programming, *Sage University Paper series on Quantitative Applications in the Social Sciences*, 07-056. Beverly Hills: Sage publications, 1985.

**Kozak, A.** (1988), A variable-exponent taper equation, *Canadian Journal Forest Research*, 18, 1363-1368.

**Kozak, A., Munro, D. P., Smith, J. H. G.** (1969), Taper functions and their application in forest inventory, *The Forest Chronicle*, 45, 4, 278-283.

**Li, H. L.** (1998), Solve least absolute value regression problems using modified goal programming techniques, *Computers & Operations Research*, 25, 12, 1137-1143.

**Li, R., Weisktell, A. R.** (2011), Estimating and predicting bark thickness for seven conifer species in the Acadian Region of North America using a mixed-effects modeling approach: comparison of model forms and subsampling strategies, *European Journal of Forest Research*, 130, 219-233.

**Max, T. A., Burkhart, H. E.** (1976), Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, 22, 3, 283-289.

**Mello, A. A. de, Carnieri, C., Arce, J. E., Sanquetta, C. R., Weber, K. S.** (2008), Planejamento do suprimento de matéria-prima em uma indústria florestal utilizando programação por metas e considerando o estoque de carbono, *Cerne*, 14, 4, 341-350.

**Mendonça, A. R. D., Silva, G. F., Oliveira, J. T. S., Nogueira, G. S., Assis, A. L.** (2007), Avaliação de funções de afilamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus* sp. para multiprodutos, *Cerne*, 13, 1, 71-82.

**Neter, J., Wasserman, W., Kutner, M.H.**, *Applied Linear Statistical Models: Regression Analysis of Variance and Experimental Designs*, 3. ed. Burr Ridge, Il.: Irwin Boston, 1990.

**Oliveira, F., Volpi, N. M. P., Sanquetta, C. R.** (2002), Aplicação de *Goal programming* em um problema florestal, *Ciência Florestal*, 12, 2, 89-98.

**Ormerod, D.W.** (1973), A simple bole model, *The Forestry Chronicle*, 49, 3, 136-138.

**Ospina, H. A. L., Ospina, R. D. L.** (2010), Modelos de optimización por metas para el cálculo de estimadores em regressión múltiple, *Ciência e Ingeniería Neogranadina*, 20-1, 133-157.

**Parresol, B. R., Hotvedt, J. E., Cao, Q. V.** (1987), A volume and taper prediction system for bald cypress, *Canadian Journal of Forest Research*, 17, 3, 250-259.

**R core team.**, R: a language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012.

**Schöepfer, W.**, *Automatisierung der Massen, Sorten und Wertberechnung stender Waldbestände Schriftenreihe Bad.* Stuttgart: Selbstvrlag der Landesforstverwaltung Baden-Württemberg, (Baden-Württemberg.; Landesforstverwaltung), 1966.

**Silva, L. M. S., Rodriguez, L. C. E., Caixeta Filho, J. V., Bauch, S. C.** (2006), Fitting a taper function to minimize the sum of absolute deviations, *Scientia Agricola*, 63, 5, 460-470.

**Yang, Y., Huang, S. e Meng, S. X.** (2009), Development of a tree-specific stem profile model for white spruce: a nonlinear mixed model approach with a generalized covariance structure, *Forestry*, 82, 5, 541-555.