

UMA PROPOSTA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O *UNIVERSITY COURSE TIMETABLING PROBLEM*

Camilo José Bornia Poulsen

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Programa de Pós-Graduação em Administração
Rua Washington Luiz, 855 – CEP 90010-460 – Porto Alegre/ RS – Brasil
camilo.bornia@ufrgs.br

Guilherme Brandelli Bucco

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Programa de Pós-Graduação em Administração
Rua Washington Luiz, 855 – CEP 90010-460 – Porto Alegre/ RS – Brasil
guilherme.bucco@ufrgs.br

Denise Lindstrom Bandeira

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Programa de Pós-Graduação em Administração
Rua Washington Luiz, 855 – CEP 90010-460 – Porto Alegre/ RS – Brasil
dlbandeira@ea.ufrgs.br

RESUMO

A construção de quadros de horários em universidades é um problema clássico que tem demandado pesquisas por conta da dificuldade de se encontrar boas soluções. Trata-se de um problema combinatório, classificado como *NP-hard*, o que implica exigência de grande quantidade de recursos computacionais. Neste trabalho, o problema é modelado com o objetivo de produzir quadros de horários com aulas distribuídas uniformemente ao longo da semana para que, assim, otimize-se a alocação dos espaços físicos de uma instituição. Resultados obtidos pela aplicação com dados reais de uma universidade mostram que o modelo reduz consideravelmente a utilização de salas de aula.

PALAVRAS-CHAVE. *University timetabling problem, Post Enrollment-based Course Timetabling, Grade horária.*

Área Principal: *Otimização Combinatória (OC), Programação Matemática (PM), PO na Educação (EDU).*

ABSTRACT

Solving universities' timetabling is a classic problem, which has demanded a lot of research effort due to the difficulty of finding good solutions. It's a combinatorial problem, classified as NP-hard, demanding large amounts of computational resources. In this work, the problem is modeled with the aim to solve timetables in a manner which results in evenly distributed classes through the week, in order to optimize the allocation of the institution's physical spaces. Results obtained with actual data from a university showed that the model considerably reduces the use of classrooms.

KEYWORDS. *University timetabling, Post Enrollment-based Course Timetabling, Timetabling.*

Main Area: *Combinatorial Optimization (OC), Mathematical Programming (PM), OR in Education (EDU).*

1 Introdução

A construção de quadros de horários dos cursos de uma universidade é um problema que deve ser enfrentado no início de todos os semestres e, por mobilizar uma quantidade significativa de pessoas, tempo e esforço, se constitui numa das mais importantes tarefas administrativas de uma universidade. Conhecido na literatura como *University Timetabling Problem* (UTP), este problema consiste no agendamento de um conjunto de disciplinas para cada curso dentro de um número limitado de salas e períodos de tempo (Schaerf, 1999). Para Elmohamed, Coddington e Fox (1998), o *Timetabling* (TT) é um problema combinatório de otimização multidimensional, não-euclidiano, multirrestrito e, conseqüentemente, muito difícil de ser resolvido.

Em termos de complexidade computacional, este problema é classificado como *NP-hard* (Pongcharoen, Promtet, Yenradee e Hicks, 2008), o que implica uma exigência de grande quantidade de recursos computacionais. Os problemas que pertencem a esta classe não podem ser resolvidos por qualquer algoritmo em tempo polinomial e, no caso de grandes instâncias, exigem o desenvolvimento de algoritmos de aproximação ou heurísticos (Cormen, Stein, Rivest e Leiserson, 2001).

O *University Timetabling Problem* (UTP) possui três variantes: (1) *Examination Timetabling*, (2) *Post Enrollment-based Course Timetabling* e (3) *Curriculum-based Timetabling* (Lewis, 2008). Enquanto o *Examination Timetabling* trata do problema relacionado ao agendamento das provas aplicadas aos alunos, o *Post Enrollment-based Course* e o *Curriculum-based Timetabling* tratam da construção das grades horárias das aulas semanais dos cursos, já que seus resultados determinam a alocação de alunos, professores e locais de aula ao longo de todo o período letivo. Estas últimas duas variantes, apesar de serem, na essência, problemas diferentes, atendem ao mesmo propósito. Por essa razão, muitos trabalhos agrupam essas duas variações, denominando-as *Course Timetabling Problem* (CTP), *University Course Timetabling Problem* (UCTP) ou *Class/Teacher Timetabling Problem* (CTTP). Há, ainda, inúmeros trabalhos que simplificam sua denominação para *University Timetabling Problem* (UTP), desprezando o fato de que o *Examination Timetabling* também é um UTP.

O processo de matrícula de uma instituição de ensino superior (IES) é que determina se o problema relativo à construção das grades horárias será classificado como um *Post Enrollment-based Course* ou *Curriculum-based Timetabling* (Bonutti, Cesco, Gaspero e Schaerf, 2012). Alvarez-Valdes, Martin e Tamarit (1996) destacam que o *Educational Timetabling Problem* varia de país para país, pois cada sistema educacional tem suas características e regras próprias. Extrapolando este destaque dos autores, há, ainda, diferenças de regras entre instituições de um mesmo país. No *Post Enrollment-based Course*, os alunos recebem uma relação de disciplinas que desejam cursar. A grade horária semanal é construída a partir da escolha de disciplinas e das disponibilidades horárias dos alunos. Em contraposição, no *Curriculum-based Timetabling*, a grade horária semanal é construída de modo que as turmas de disciplinas de um mesmo semestre de um currículo vigente não tenham colisão de horários (Bonutti et al., 2012). Assim, a instituição disponibiliza os horários das turmas de disciplinas e, posteriormente, os alunos se matriculam.

Em geral, a solução deste problema é obtida por meio do envolvimento de muitas pessoas por dias. E, além disso, a solução obtida pode ser insatisfatória em algum aspecto como, por exemplo, um estudante que, por conta da coincidência de horários de duas disciplinas, não poderá cursar as duas (Schaerf, 1999). Miranda (2010) apresentou os resultados de um sistema automatizado de construção de quadros de horários para a Escola de Negócios da Universidade do Chile, onde tal processo era, historicamente, construído por meio de tentativa e erro, manualmente, e que chegou a tomar, no ano de 2008, quatro semanas. Os autores apontam que o executivo responsável por esta decisão na IES em questão comentou que a utilização do sistema trouxe diversos benefícios, como melhor utilização dos espaços, redução na quantidade de horas aplicadas na construção dos quadros de horários, redução no custo de aluguel de prédios e aumento da satisfação de estudantes

e professores. Importante observar, contudo, que tal sistema automatizado foi desenvolvido para um sistema educacional específico, com todas as suas peculiaridades.

Analogamente à pesquisa de Miranda (2010), o presente trabalho foi desenvolvido a partir das especificidades de numa universidade federal que possui cerca de 40.000 alunos e 1.400 professores, distribuídos em quase 110 cursos de graduação e 70 de pós-graduação *stricto e lato sensu*. Visando o sigilo das informações, esta universidade será denominada como UniFed.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2, o problema é formalmente definido; na seção 3, apresenta-se uma proposta de formulação matemática para o problema em *mixed integer programming* (MIP); na seção 4, os resultados computacionais são apresentados; e na seção 5 discutem-se as conclusões.

2 O problema

Nos últimos anos, por conta do seu forte programa de expansão, a UniFed tem enfrentado sérios problemas para disponibilizar espaços físicos – particularmente, salas de aula – para atender toda a demanda de abertura de turmas de alunos. Para enfrentar este problema, a UniFed criou um setor específico responsável pela gestão dos espaços físicos (doravante denominado Coordenação de Gestão de Espaços Físicos – COGEF), que todo semestre negocia com as coordenações de cursos mudanças na grade horária das turmas abertas, promove reformas civis visando dividir salas de aulas e, em último caso, aluga novos prédios.

Este último recurso para solucionar o problema, o aluguel de novos espaços, foi um expediente bastante utilizado nos últimos tempos. Segundo o principal gestor da COGEF, no ano de 2012 a UniFed alugou vários imóveis, o que onerou o seu orçamento para este exercício em aproximadamente R\$ 3,6 milhões. Somam-se a isso despesas com segurança, limpeza, manutenção predial, energia elétrica, carteiras escolares, equipamentos de telecomunicações e internet, reformas civis, contratação de novos servidores, estacionamento para professores e servidores, enfim, uma diversidade de custos decorrentes da expansão dos espaços físicos destinados às atividades-fim da universidade. Esta expansão física ainda gerou problemas de transporte escolar, insatisfação entre alunos e professores por conta dos deslocamentos, além de problemas com coordenações de cursos menos tradicionais, que não tiveram força política para garantir a manutenção das aulas dos seus cursos no campus de origem.

Motivada principalmente pela decisão da reitoria em diminuir custos, a COGEF proporcionou a realização deste estudo, visando utilizar seus resultados como instrumento de sensibilização para as coordenações de curso, que constroem suas grades horárias a partir de fatores internos, descoordenados com o interesse geral da universidade.

Preliminarmente, analisaram-se as grades horárias dos últimos semestres para confirmar a suspeita de concentração de aulas em determinados *slots*, que é a combinação do dia da semana por um período de aula. Constatou-se uma distribuição muito irregular de aulas na grade horária semanal é a causa da alta demanda por salas de aula nos *slots* de maior concentração. Dado que a UniFed tem que oferecer uma estrutura física que comporte todas as aulas do *slot* de maior demanda. Contudo, se as aulas forem uniformemente distribuídas ao longo de todos os *slots*, a demanda por salas de aula reduzirá sensivelmente, diminuindo também os transtornos e custos advindos desta desconformidade.

O objetivo principal deste trabalho é oferecer um modelo matemático que construa, por meio de programação matemática, as grades horárias dos cursos de graduação da UniFed, utilizando o menor número possível de salas de aula.

2.1 Restrições

Segundo informações da COGEF, o escopo da sua gestão está limitado às salas de aulas. Locais especiais, como laboratórios, ambientes temáticos e afins, são geridos pelas coordenações de cursos. Deste modo, o modelo proposto deverá alocar apenas as aulas teóricas, pois são as que demandam o uso de salas de aulas e que geram todos os transtornos já citados.

Para modelar adequadamente o problema, por meio de técnicas de pesquisa operacional, é importante que se identifiquem claramente as restrições fortes e fracas. As restrições fortes ou essenciais são aquelas que devem ser satisfeitas a qualquer custo. Não atendê-las implica produzir uma solução inviável. Já as restrições fracas são requisitos que não são essenciais para produzir uma solução viável, mas características desejáveis para que a solução seja a melhor possível (Kahar e Kendall, 2010; Zhang, Liu, M'Hallah e Leung, 2010). A Tabela 1 apresenta as restrições fortes (**H**) e fracas (**S**) deste problema.

Tabela 1: Restrições

H01	Turmas de disciplinas devem ter o seu respectivo número de aulas atendido;
H02	Turmas devem ser alocadas em horários de acordo com as suas disponibilidades;
H03	As recomendações de quantidade mínima e máxima de aulas diárias de cada disciplina devem ser respeitadas;
H04	Turmas não poderão ter aulas em dias consecutivos;
H05	Aulas de uma turma, quando ministradas num único dia, deverão ser consecutivas;
H06	Disciplinas obrigatórias com apenas uma turma não poderão colidir horários com as demais turmas de um mesmo semestre e de um mesmo currículo;
H07	Professores podem ser alocados em horários de acordo com as suas disponibilidades;
H08	Professores podem ministrar apenas uma aula num mesmo horário;
H09	Salas de aula podem receber apenas uma aula num mesmo horário;
H10	Salas de aula podem ser alocadas em horários de acordo com as suas disponibilidades;
H11	As capacidades de alunos das salas de aulas devem ser respeitadas;
H12	Aulas de uma turma num mesmo dia deverão ocorrer na mesma sala de aula;
H13	Professores deverão ter aulas numa única unidade num mesmo turno de um dia.
S01	Reduzir custos com a utilização de unidades.

3 Formulação matemática

O modelo foi inicialmente testado utilizando-se o conjunto completo de dados. Os resultados apontaram a impossibilidade de se instanciar o modelo completo no *MIP solver*. Deste modo, identificou-se a possibilidade de dividi-lo em dois subproblemas:

- (1) Alocação das turmas e professores na grade horária semanal, visando distribuir uniformemente as aulas dentre todos os *slots*;
- (2) Atribuição de salas de aulas, visando atender a restrição fraca S01.

Ainda assim, novos testes empíricos continuaram a demonstrar a impossibilidade de resolver as instâncias de dados de cada subproblema. Assim, para cada subproblema, dividiram-se os dados por turno, pois cada turma informada pela UniFed foi designada para ser ministrada num turno específico. Esta decisão traz a possibilidade de não se atingir o ótimo global, porém as evidências de uma distribuição muito irregular de aulas ao longo da grade horária permitem presumir

que o conjunto de soluções ótimas de cada subproblema – que são ótimos locais – produzirá uma solução excelente dada a realidade atual da universidade.

3.1 Subproblema 1

Para alocar as turmas e professores na grade horária semanal são necessários os seguintes conjuntos e parâmetros de entrada.

Conjuntos:

- D : conjunto de dias da semana (*Days*), onde $d \in D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ indicam, respectivamente, os dias da semana de segunda-feira até a sábado;
- P : conjunto de períodos de aula em um dia (*Periods*), onde $p \in P = \{0, 1, 2, \dots, |P| - 1\}$;
- H : conjunto de turnos do dia (*Shifts*), onde $h \in H = \{0, 1, 2\}$ indicam, respectivamente, os turnos da manhã, tarde e noite;
- C : conjunto de cursos (*Courses*), onde $c \in C = \{0, 1, \dots, |C| - 1\}$;
- G : conjunto de semestres letivos (*Grades*), onde $g \in G = \{0, 1, \dots, |G| - 1\}$;
- S : conjunto de disciplinas (*Subjects*), onde $s \in S = \{0, 1, \dots, |S| - 1\}$;
- S_{cg} : conjunto de disciplinas obrigatórias do curso $c \in C$ e do semestre $g \in G$ que possuem apenas uma turma, onde $S_{cg} \subset S$;
- T : conjunto de professores (*Teachers*), onde $t \in T = \{0, 1, \dots, |T| - 1\}$;
- E : conjunto de turmas (*Events*), onde $e \in E = \{0, 1, \dots, |E| - 1\}$;
- E_s : conjunto de turmas da disciplina $s \in S$, onde $E_s \subset E$;
- E_t : conjunto de turmas do professor $t \in T$, onde $E_t \subset E$.

Parâmetros:

- $M_{|S|} \in \mathbb{N}$: vetor de aulas teóricas semanais da disciplina, onde M_s indica o número de aulas teóricas semanais da disciplina $s \in S$;
- $DMmin_{|S|} \in \mathbb{N}$: vetor de mínimo de aulas diárias, onde $DMmin_s$ indica o número mínimo de aulas diárias nos dias em que as turmas da disciplina $s \in S$ têm aula;
- $DMmax_{|S|} \in \mathbb{N}$: vetor de máximo de aulas diárias, onde $DMmax_s$ indica o número máximo de aulas diárias nos dias em que as turmas da disciplina $s \in S$ têm aula;
- $AE_{|E| \times |D| \times |P|} \in \{0, 1\}$: matriz de disponibilidade horária da turma, onde $AE_{edp} = 1$ indica se a turma $e \in E$ pode ter aula no dia $d \in D$ e no período de aula $p \in P$, $AE_{edp} = 0$, caso contrário;
- $AT_{|T| \times |D| \times |P|} \in \{0, 1\}$: matriz de disponibilidade horária do professor, onde $AT_{tdp} = 1$ indica se o professor $t \in T$ pode lecionar no dia $d \in D$ e no período de aula $p \in P$, $AT_{tdp} = 0$, caso contrário.

A formulação matemática do modelo proposto deve oferecer, como resultado final, os valores das seguintes variáveis de decisão:

$$x_{edp} = \begin{cases} 1, & \text{se a turma } e \in E \text{ é alocada no dia } d \in D \text{ e período } p \in P \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As restrições do modelo demandam a utilização dos seguintes conjuntos de variáveis auxiliares:

$$a_{ed} = \begin{cases} 1, & \text{se a turma } e \in E \text{ tem aula no dia } d \in D \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$b_{ed} \in \mathbb{N} = \text{primeiro período de aula da turma } e \in E \text{ ministrada no dia } d \in D$$

$$f_{ed} \in \mathbb{N} = \text{último período de aula da turma } e \in E \text{ ministrada no dia } d \in D$$

$$w_{dp} \in \mathbb{N} = \text{quantidade de aulas alocadas no dia } d \in D \text{ e período } p \in P$$

$$y \in \mathbb{N} = \text{armazena o maior valor do conjunto das variáveis } w_{dp}$$

Para distribuir uniformemente as aulas na grade horária, é necessário e suficiente computar a quantidade de aulas alocadas no *slot* com maior concentração de aulas, ou seja, naquele que apresente o “pico” de quantidade de aulas. Assim, o objetivo do modelo é minimizar a quantidade de aulas alocadas no *slot* com maior concentração de aulas:

$$\text{minimizar } Z_1 = y \quad (1)$$

Para atender as restrições fortes H01–H08 e calcular o valor de y , que está de acordo com o atendimento à restrição fraca S01, a função objetivo Z_1 está sujeita às restrições assim equacionadas:

$$\sum_{d \in D} \sum_{p \in P} x_{edp} = M_s \quad \forall e \in E, s \in S \quad (2)$$

$$x_{edp} \leq AE_{edp} \quad \forall e \in E, d \in D, p \in P \quad (3)$$

$$a_{ed} \geq x_{edp} \quad \forall e \in E, d \in D, p \in P \quad (4)$$

$$DM_{min_s} \times a_{ed} \leq \sum_{p \in P} x_{edp} \leq DM_{max_s} \times a_{ed} \quad \forall e \in E, s \in S, d \in D \quad (5)$$

$$a_{e,d} + a_{e,d+1} \leq 1 \quad \forall e \in E, d \in D = \{0, 1, 2, \dots, |D| - 1\} \quad (6)$$

$$b_{ed} \leq (|P| + 1) - (|P| + 1 - p) \times x_{edp} \quad \forall e \in E, d \in D, p \in P \quad (7)$$

$$f_{ed} \geq p \times x_{edp} \quad \forall e \in E, d \in D, p \in P \quad (8)$$

$$f_{ed} - b_{ed} + a_{ed} - \sum_{p \in P} x_{edp} \leq 0 \quad \forall e \in E, d \in D \quad (9)$$

$$\sum_{e \in E_s, s \in S_{cg}} x_{edp} \leq 1 \quad \forall c \in C, g \in G, d \in D, p \in P \quad (10)$$

$$\sum_{e \in E_t} x_{edp} \leq AT_{edp} \quad \forall t \in T, d \in D, p \in P \quad (11)$$

$$w_{dp} = \sum_{e \in E} x_{edp} \quad \forall d \in D, p \in P \quad (12)$$

$$y \geq w_{dp} \quad \forall d \in D, p \in P \quad (13)$$

O conjunto de restrições (2) atende H01, garantindo que o número de aulas seja atendido. A adequação das grades horárias das turmas conforme a disponibilidade da própria turma (H02) e do professor (H07) é atendida pelas Equações (3) e (11). A formulação da Equação (11) também é responsável pela restrição H08, que impede que um professor possa ser alocado mais de uma vez no mesmo *slot* (d, p). Os números mínimo e máximo de aulas que uma turma pode comportar

em determinado dia (H03) são suportados pelo conjunto de restrições (5), que faz uso da variável auxiliar a_{ed} , a qual é calculada na Equação (4). A Equação (6) garante que o modelo não aloca aulas em dias consecutivos (H04), o que é muito interessante e desejável sob o ponto de vista pedagógico. A Equação (7) e a Equação (8) calculam, respectivamente, a primeira e a última aula de uma turma num dia, conforme adaptação de Dorneles, Araújo e Buriol (2012) proposta a partir da formulação de Santos, Uchoa, Ochi e Maculan (2012). Assim, a exigência de que aulas ministradas em um determinado dia sejam consecutivas (H05) é atendida pela Equação (9). A restrição H06, que exige que disciplinas de um determinado semestre de um curso não colidam entre si, desde que sejam obrigatórias e que ofereçam apenas uma turma para que os alunos cursem, é suportada pela Equação (10). Esta restrição é fundamental para que a grade horária ofertada não prejudique os alunos que estão na sequência correta do curso. Finalmente, para subsidiar a montagem da função objetivo, a Equação (12) calcula o valor de w_{dp} , que é a variável auxiliar que contém o número de aulas de cada *slot* (d,p). A partir de w_{dp} , y pode ser calculada através da Equação (13).

3.2 Subproblema 2

Para atribuir uma sala para cada aula, o modelo precisa dos seguintes conjuntos e parâmetros de entrada, além dos já mencionados no subproblema 1 (seção 3.1):

Conjuntos:

- U : conjunto de unidades (*Units*), onde $u \in U = \{0, 1, \dots, |U| - 1\}$;
- L : conjunto de salas de aula (*Locals*), onde $l \in L = \{0, 1, \dots, |L| - 1\}$;
- L_u : conjunto de salas de aula da unidade $u \in U$, onde $L_u \subset L$.

Parâmetros:

- $X_{|E| \times |D| \times |P|} \in \{0, 1\}$: matriz de horários das turmas carregada a partir dos valores da variável de decisão x_{edp} calculada no subproblema 1, onde $X_{edp} = 1$ indica se a turma $e \in E$ tem aula no dia $d \in D$ e período $p \in P$, $X_{edp} = 0$, caso contrário;
- $Cap_{|L|} \in \mathbb{N}$: vetor de capacidade da sala, onde Cap_l indica a capacidade máxima de alunos da sala de aula $l \in L$;
- $NS_{|E|} \in \mathbb{N}$: vetor de previsão de alunos, onde NS_e indica o número de alunos previstos para a turma $e \in E$;
- $AL_{|L| \times |D| \times |P|} \in \{0, 1\}$: matriz de disponibilidade horária da sala de aula, onde $AL_{ldp} = 1$ indica se a sala de aula $l \in L$ pode ter aula no dia $d \in D$ e no período de aula $p \in P$, $AL_{ldp} = 0$, caso contrário;
- $\alpha_{|U|} \in \mathbb{N}$: vetor de custos, onde α_u indica o custo de uso da unidade $u \in U$.

A formulação matemática do modelo do subproblema 2 resultará nos valores das seguintes variáveis de decisão:

$$k_{ledp} = \begin{cases} 1, & \text{se a sala de aula } l \in L \text{ recebe a turma } e \in E \text{ no dia } d \in D \text{ e período } p \in P \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m_u = \begin{cases} 1, & \text{se a unidade } u \in U \text{ recebe aulas em suas salas} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

As restrições do modelo demandam a utilização dos seguintes conjuntos de variáveis auxiliares:

$$j_{led} = \begin{cases} 1, & \text{se a sala de aula } l \in L \text{ recebe a turma } e \in E \text{ no dia } d \in D \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$q_{tudh} = \begin{cases} 1, & \text{se o professor } t \in T \text{ tem aula na unidade } u \in U \text{ no turno } h \in H \text{ do dia } d \in D \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$v_{eu} = \begin{cases} 1, & \text{se a turma } e \in E \text{ tem aula na unidade } u \in U \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para atender a restrição fraca S01, atribuiu-se um custo à utilização de cada unidade $u \in U$. Deste modo, a minimização do custo total resulta na redução de unidades utilizadas.

$$\text{minimizar } Z_2 = \sum_{u \in U} \alpha_u \times m_u \quad (14)$$

Para atender as restrições fortes H09–H13 e calcular a restrição fraca S01, a função objetivo Z_2 estará sujeita a:

$$\sum_{l \in L} k_{ledp} = X_{edp} \quad \forall e \in E, d \in D, p \in P \quad (15)$$

$$\sum_{e \in E} k_{ledp} \leq AL_{ldp} \quad \forall l \in L, d \in D, p \in P \quad (16)$$

$$j_{led} \geq k_{ledp} \quad \forall l \in L, e \in E, d \in D, p \in P \quad (17)$$

$$NS_e \times j_{led} \leq Cap_l \quad \forall e \in E, l \in L, d \in D \quad (18)$$

$$\sum_{l \in L} j_{led} \leq 1 \quad \forall e \in E, d \in D \quad (19)$$

$$q_{tudh} \geq \sum_{l \in L_u} j_{led} \quad \forall t \in T, e \in E_t, u \in U, d \in D, h \in H \quad (20)$$

$$\sum_{u \in U} q_{tudh} \leq 1 \quad \forall t \in T, d \in D, h \in H \quad (21)$$

$$v_{eu} \geq \sum_{l \in L_u} j_{led} \quad \forall e \in E, u \in U, d \in D \quad (22)$$

$$m_u \geq v_{eu} \quad \forall u \in U, e \in E \quad (23)$$

A Equação (15) é uma restrição de implicação, que garante a relação entre as variáveis de decisão k_{ledp} e x_{edp} que pertencem, respectivamente, ao subproblema 1 e 2 (o resultado da variável x_{edp} do subproblema 1 é carregado previamente no parâmetro X_{edp}). A certeza de que uma sala de aula receberá no máximo uma aula por *slot* (H09), bem como o atendimento à disponibilidade de horários (H10) são expressas pela Equação (16). A restrição de implicação (17) permite calcular o valor da variável auxiliar j_{led} , que será utilizada em outras restrições. As Equações (18) e (19) garantem o atendimento às restrições H11 (capacidade da sala) e H12 (turma com aulas na mesma sala no dia), respectivamente. A Equação (20) permite o cálculo da variável auxiliar q_{tudh} , forçando-a a assumir o valor “1” sempre que uma turma $e \in E$ do professor $t \in T$ tiver aula num determinado dia $d \in D$ e turno $h \in H$ ($j_{led} = 1$). A variável auxiliar q_{tudh} , que é calculada por meio da restrição de implicação (20), permite que se equacione a restrição H13 (21), responsável por obrigar que o professor $t \in T$ leccione numa única unidade em um turno $h \in H$ de um dia $d \in D$. A variável auxiliar v_{eu} utilizada na Equação (23) é calculada através da Equação (22). Finalmente, a Equação (23) determina o valor da variável de decisão m_u que indica se a unidade $u \in U$ recebe alguma aula, permitindo que a restrição S01 seja avaliada na função objetivo (14).

4 Resultados computacionais

Os modelos dos subproblemas foram implementados em C++ a partir do ambiente de programação do *Microsoft® Visual Studio 2010 Professional* combinado com o *MIP solver IBM® ILOG CPLEX Optimization Studio V12.4* com as configurações *default*. O equipamento utilizado foi um notebook com processador Intel® Core™ i7-3520M CPU 2.9GHz, 6GB de memória RAM e sistema operacional *Microsoft® Windows 8.1 Pro* 64 bits.

O experimento tomou como base os dados da UniFed referentes ao 1º semestre de 2013. Assim, a grade horária e a alocação de salas de aula produzidas pelo modelo proposto podem ser comparadas ao que realmente ocorreu em 2013-1. Nesse semestre, a UniFed tinha 120 grades curriculares de cursos ($|C| = 120$), 1.688 disciplinas ($|S| = 1.688$) oferecidas em 2.688 turmas ($|E| = 2.688$), ministradas por 1.083 professores ($|T| = 1.083$) em 258 salas de aula ($|L| = 258$) distribuídas em 48 unidades ($|U| = 48$). As aulas foram oferecidas de segunda-feira a sábado em cinco períodos no turno da manhã, e de segunda-feira a sexta-feira nos turnos da tarde e noite em seis e quatro períodos de aula, respectivamente. Para verificar a robustez do modelo proposto, optou-se por desprezar as aulas nas manhãs dos sábados. A Tabela 2 apresenta o dimensionamento dos conjuntos e das variáveis de decisão por turno, conforme processaram-se os modelos.

Tabela 2: Dimensionamento dos conjuntos e variáveis de decisão

Turnos	D	P	C	S	E	T	L	U	x_{edp}	k_{ledp}	m_u
Manhã	5	5	120	686	1.003	565	258	48	25.075	6.469.350	48
Tarde	5	6	120	746	1.011	616	258	48	30.330	7.825.140	48
Noite	5	4	120	538	654	392	258	48	13.080	3.374.640	48
Totais	5	15	120	1.688	2.688	1.083	258	48	201.600	52.012.800	48

4.1 Resultados do subproblema 1

O modelo do subproblema 1 tem como objetivo distribuir todas as aulas da forma mais equilibrada possível na grade horária, pois esta é a premissa básica para que se demande o menor número possível de salas de aulas e, conseqüentemente, de unidades. A grade horária aplicada no semestre 2013-1 possuía uma distribuição bastante desequilibrada. O segundo período de aula do turno da manhã de terça-feira foi o *slot* de maior alocação de aulas (234 aulas). Este pico de alocação foi responsável por exigir da UniFed essa mesma quantidade de salas de aula. A Figura 1 confronta a distribuição das aulas ocorrida no semestre 2013-1 com o resultado no modelo proposto.

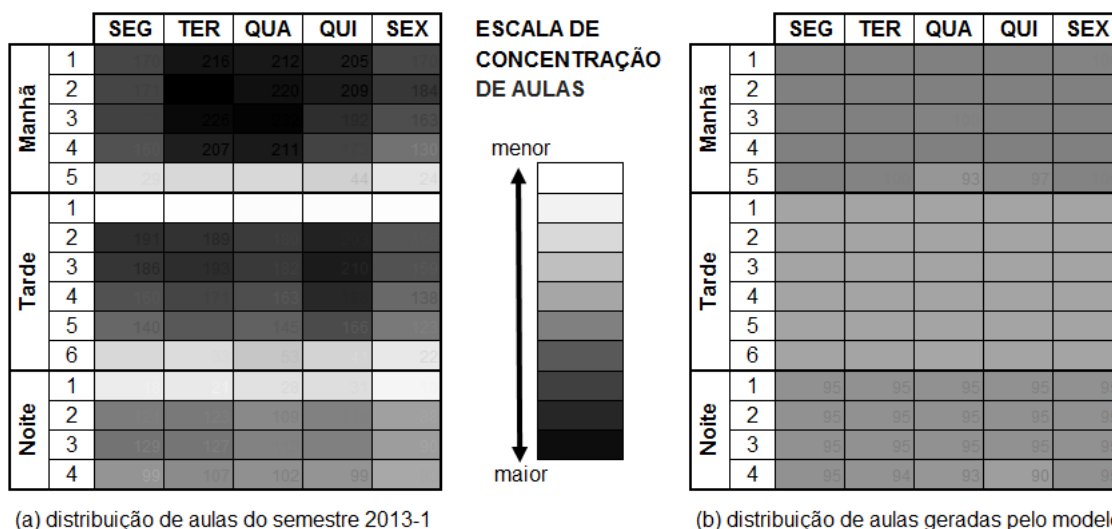
O modelo do subproblema foi processado para cada um dos três turnos. A Tabela 3 mostra o resultado de cada processamento, apresentando o tempo de execução e o valor da função objetivo Z_1 , que indica a maior quantidade de aulas obtida entre todos os *slots* do turno.

Tabela 3: Resultados do subproblema 1

Turnos	tempo (min)	Z_1
Manhã ($h = 0$)	11,84	101
Tarde ($h = 1$)	64,85	88
Noite ($h = 2$)	17,00	95

Cabe destacar que no processamento do turno da manhã ($h = 0$) foi necessário relaxar parcialmente a restrição H03, na parte que garante o número mínimo diário de aulas. Apesar de

Figura 1: Distribuição de aulas: “Aplicadas no semestre 2013-1” vs. “Gerada pelo modelo”



esta restrição ter sido modelada como uma restrição forte, na prática ela é algo somente desejável. Como a maioria das turmas tem exigência de no mínimo duas aulas diárias, o fato de o turno da noite contar com cinco períodos praticamente inviabiliza o atendimento ao número mínimo de aulas e à não colisão de horários de turmas únicas e obrigatórias de disciplinas de um semestre de um determinado curso. Por essa razão, o tempo de processamento da instância do turno da manhã foi muito menor do que o da tarde, que possui um número de turmas similar.

Assim, o resultado do modelo indica que a UniFed utilizaria no máximo 101 salas de aula na pior situação possível. Isso representa uma redução de 57% em relação às 234 salas de aula utilizadas simultaneamente no semestre 2013-1.

4.2 Resultados do subproblema 2

A partir das grades horárias semanais das turmas e dos professores geradas pelo subproblema 1, esta segunda etapa foi responsável pela alocação de sala para cada aula. De forma análoga ao anterior, o subproblema 2 foi processado para cada um dos três turnos. A Tabela 4 mostra o resultado de cada processamento, apresentando o tempo de execução, o valor da função objetivo Z_2 , que indica o custo pelo uso das unidades, e as unidades alocadas.

Tabela 4: Resultados do subproblema 2

Turnos	tempo (min)	Z_2	Unidades alocadas
Manhã ($h = 0$)	10,97	730	0, 1, 2, 3, 4
Tarde ($h = 1$)	17,23	490	0, 1, 2, 3
Noite ($h = 2$)	6,77	536	0, 1, 2, 4

A Tabela 5 apresenta as unidades da UniFed com seus respectivos custo e quantidade de salas de aula. O custo nada mais é do que a expressão inversa das preferências por unidades indicadas pela COGEF. Dentre as unidades com custo superior a 5.000 estão as preteridas pela COGEF, incluindo as unidades alugadas.

O resultado do modelo para as três instâncias (uma para cada turno), que foi processado

Tabela 5: Dados das unidades

Unidade	Custo	Qtd. salas	Unidade	Custo	Qtd. salas	Unidade	Custo	Qtd. salas
0*	50	43	16	714	4	32	5.490	8
1*	99	24	17	747	3	33	5.585	6
2*	147	11	18	779	3	34	5.679	5
3*	194	11	19	810	3	35	5.772	5
4*	240	18	20	840	3	36	5.864	3
5	285	12	21	869	2	37	5.955	2
6	329	8	22	897	2	38	6.045	2
7	372	7	23	924	2	39	6.134	1
8	414	7	24	950	2	40	6.222	1
9	455	6	25	975	2	41	6.309	1
10	495	6	26	999	2	42	6.395	1
11	534	5	27	5.000	2	43	6.480	1
12	572	4	28	5.100	1	44	6.564	1
13	609	4	29	5.199	1	45	6.647	1
14	645	4	30	5.297	1	46	6.729	1
15	680	4	31	5.394	11	47	6.810	1

em 34,97 minutos, alocou as aulas em 107 salas diferentes, distribuídas em apenas cinco unidades. Na Tabela 5, as unidades destacadas com um asterisco (*) são aquelas selecionadas pelo modelo. Juntas, totalizam um custo igual a 730.

5 Discussões, limitações e conclusões

Dada a complexidade do problema, bem como das limitações da formulação, provavelmente o uso de meta-heurísticas poderia produzir boas soluções em um menor tempo de processamento computacional.

Os resultados permitem inferir que este trabalho atendeu seus propósitos. Mostrou-se, através do modelo proposto, que é possível construir grades horárias factíveis que atendam requisitos pedagógicos, diminuindo de forma abrupta a demanda por salas de aulas e, conseqüentemente, por unidades. Assim, esses resultados podem subsidiar as ações de sensibilização das coordenações de cursos, já que há um norteador estratégico claro na UniFed que exige redução de custos com imóveis alugados, seja para atender as atuais demandas de aulas como também para permitir a expansão da própria universidade. Os resultados demonstram que a UniFed poderia se desfazer dos imóveis alugados e ainda assim ficaria com uma grande quantidade de salas próprias à sua disposição.

Como não foi possível obter as restrições horárias dos professores, este estudo pressupôs que cada professor estava disponível em todos os horários do turno indicado para suas turmas. Similarmente, também não se obtiveram informações referentes ao uso de recursos físicos por parte dos cursos de pós-graduação e extensão, que indisponibilizariam o uso de salas em determinados horários. Assim, pode-se presumir que se o modelo fosse processado a partir de dados completos, possivelmente demandaria mais tempo de processamento e os resultados finais exigiriam um número maior de salas de aula e unidades. Contudo, dado que o ganho de eficiência de distribuição de salas foi de 57%, há muita margem para que, mesmo considerando essas restrições ignoradas, os ganhos permaneçam elevados.

Referências

Alvarez-Valdes, R., Martin, G. e Tamarit, J. M. (1996). Constructing good solutions for the Spanish school timetabling problem. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 1203-1215.

- Disponível em <http://dx.doi.org/10.1057/jors.1996.149>
- Bonutti, A., Cesco, F., Gaspero, L. e Schaerf, A. (2012). Benchmarking curriculum-based course timetabling: Formulations, data formats, instances, validation, visualization, and results. *Annals of Operations Research*, 194(1), 59-70. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-010-0707-0> doi: 10.1007/s10479-010-0707-0
- Cormen, T. H., Stein, C., Rivest, R. L. e Leiserson, C. E. (2001). *Introduction to algorithms* (2nd ed.). McGraw-Hill Higher Education.
- Dorneles, A. P., Araújo, O. C. B. e Buriol, L. S. (2012). The impact of compactness requirements on the resolution of high school timetabling problem. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2012, Rio de Janeiro. Anais do XVI CLAIO/XLIV SBPO*.
- Elmohamed, M. A. S., Coddington, P. D. e Fox, G. (1998). A comparison of annealing techniques for academic course scheduling. In *Selected papers from the second international conference on practice and theory of automated timetabling II* (p. 92-114). London, UK, UK: Springer-Verlag. Disponível em <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=646430.692895>
- Kahar, M. N. M. e Kendall, G. (2010). The examination timetabling problem at Universiti Malaysia Pahang: Comparison of a constructive heuristic with an existing software solution. *European Journal of Operational Research*, 207(2), 557-565. doi: 10.1016/j.ejor.2010.04.011
- Lewis, R. (2008). A survey of metaheuristic-based techniques for university timetabling problems. *OR Spectrum*, 30(1), 167-190. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1007/s00291-007-0097-0> doi: 10.1007/s00291-007-0097-0
- Miranda, J. (2010). eClasSkeduler: A course scheduling system for the executive education unit at the Universidad de Chile. *Interfaces*, 40(3), 196-207. Disponível em <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/inte.1090.0485> doi: 10.1287/inte.1090.0485
- Pongcharoen, P., Promtet, W., Yenradee, P. e Hicks, C. (2008). Stochastic optimisation timetabling tool for university course scheduling. *International Journal of Production Economics*, 112(2), 903-918. Disponível em <http://EconPapers.repec.org/RePEc:eee:proeco:v:112:y:2008:i:2:p:903-918>
- Santos, H. G., Uchoa, E., Ochi, L. S. e Maculan, N. (2012). Strong bounds with cut and column generation for class-teacher timetabling. *Annals of Operations Research*, 194(1), 399-412. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-010-0709-y> doi: 10.1007/s10479-010-0709-y
- Schaerf, A. (1999). A survey of automated timetabling. *Artificial Intelligence Review*, 13(2), 87-127.
- Zhang, D., Liu, Y., M'Hallah, R. e Leung, S. C. H. (2010). A simulated annealing with a new neighborhood structure based algorithm for high school timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 203(3), 550-558. Disponível em <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/eor/eor203.html#ZhangLML10>