PREDIÇÃO DE ÍNDICES ACIONÁRIOS AOS BRICS ATRAVÉS DE UMA PROPOSTA DE METODOLOGIA PARA ANÁLISE ESPECTRAL SINGULAR MULTIVARIADA

Valter de Senna
Carlos Alberto Orge Pinheiro

RESUMO

A pesquisa objetiva, a partir da proposta de uma metodologia, separar os componentes sinal e ruído de um conjunto M de séries temporais pelo método Análise Espectral Singular Multivariada – AESM e, em seguida, realizar previsões. As séries utilizadas são índices de mercado dos BRICS (Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul) no período de 9 de dezembro de 2011 a 21 de fevereiro de 2014, totalizando 108 semanas. A metodologia proposta apresentou melhor desempenho quando comparada com a metodologia apresentada pela literatura.
PALAVRAS CHAVES. Análise espectral singular multivariada, Previsão, Índices de mercado.

ABSTRACT

The research aims, from the proposal for a methodology to separate the signal and noise components of M a set of time series by Multivariate Singular Spectrum Analysis method - MSSA and then make predictions. The series used are market indices of the BRICS (Brazil, Russia, India, China and South Africa) in period 9 December 2011 to 21 February 2014, totaling 108 weeks. The proposed method showed better performance compared with the methodology presented in the literature.
KEYWORDS. Multivariate singular spectrum analysis, forecast, market indices.

1. Introdução

Existem algumas razões pelas quais os modelos clássicos não apresentam bom desempenho para modelagem e previsão das séries temporais econômicas. Primeiro, um modelo econômico que foi criado para explicar uma relação com um conjunto de pressupostos é inútil se os pressupostos não forem válidos. Com isso, para Plaut e Vautard (1994), os pressupostos dos modelos clássicos incluem não só aqueles que podem ser expressos como parâmetros do modelo, mas outros com a forma assintótica. Além disso, muitos modelos utilizados na previsão de séries temporais econômicas são baseados em suposições restritivas de normalidade e linearidade dos dados observados. Acontece que os modelos clássicos, tais como modelos do tipo *autoregressive integrated moving average* (ARIMA), são baseados na suposição de estacionariedade da série e normalidade dos resíduos (Box e Jenkins, 1971; Brockwell e Davis, 2002). Assim, os modelos que não dependem destes pressupostos podem ser úteis para a modelagem e previsão de séries econômicas. Climent, De Miguel e Olmeda (2000) em sua pesquisa consideraram as séries temporais econômicas como determinísticas e lineares. Neste caso, os modelos para séries temporais baseados em suposições de linearidade podem ser utilizados para modelagem e previsão. No entanto, muitas séries temporais econômicas apresentam comportamento não linear (Cao e Soofi, 1999; Hsieh, 1991; Scheinkman e LeBaron, 1989) e, portanto, os modelos lineares não são apropriados.

Dois modelos de análise espectral (univariada e multivariada), que são livres das suposições de estacionariedade e normalidade dos dados, são indicados para séries temporais lineares e não lineares, estacionárias e não estacionárias, conforme Hassani, Heravi e Zhigljavsky (2009). O primeiro deles, definido como Análise Espectral Singular (AES) é um modelo não paramétrico de análise de séries temporais incorporando os elementos de análise de séries temporais clássicas, estatística multivariada, geometria multivariada, sistemas dinâmicos e processamento de sinais, conforme explicam Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001). Já o segundo modelo, definido como Análise Espectral Singular Multivariada (AESM) incorpora os mesmos elementos para um conjunto M de séries temporais.

Em sua apresentação básica o modelo AES consiste em dois estágios complementares: decomposição e reconstrução em que ambos incluem dois passos separados. No primeiro estágio a série temporal univariada é decomposta e no segundo a série original é reconstruída. Posteriormente, a série reconstruída poderá ser utilizada para a previsão. O conceito principal do método AES é a separabilidade que caracteriza o quão bem, conforme a teoria clássica, os componentes sinal (tendência e sazonalidade) e ruído podem ser separados.

Seu uso é amplo, existindo em pesquisas de finanças, de acordo com Hassani, Dionisio e Ghodsi (2010), que consideraram o método AES como um método de filtragem. Em pesquisa de diagnóstico biomédico o ruído foi extraído conforme Ghodsi, Hassani, Sanei e Hick (2009). Também tem sido usado como método de filtragem para a redução de ruído e previsão de consumo de energia elétrica em Kumar e Jain (2010). Outro aspecto importante para AES é que, ao contrário de outros métodos, é adequado para amostras de pequenas dimensões, conforme Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001).

Em outras situações, quando o interesse da pesquisa recaiu sobre a captura de estruturas que representassem o comportamento mais abrangente e que levassem em consideração os efeitos entre um conjunto M de séries temporais multivariadas, o método utilizado foi AESM. Mantendo os mesmos estágios e passos do método AES, AESM foi inicialmente utilizado em dados atmosféricos. Para isso, grande parte das séries temporais foi extraída de variáveis associadas ao clima e representadas por localidades ou regiões num mapa, conforme pesquisas realizadas (Keppenne e Ghil, 1993; Plaut e Vautard, 1994). Em relação à separabilidade, quer seja no método AES ou AESM, existem algumas ferramentas para auxiliar na separação dos componentes sinal e ruído da série temporal. O método AES dispõe da análise gráfica do comportamento dos valores singulares, da matriz *w*-correlação além do gráfico de dispersão entre pares de autovetores. Para AESM uma ferramenta que auxilia na separação dos componentes é o gráfico *w*-correlação cumulativa, conforme explicam Patterson, Hassani, Heravi e Zhigljavsky

(2011). Qualquer que seja a ferramenta utilizada a separação entre os componentes irá ocorrer por uma inspeção visual dos elementos dispostos nos gráficos.

A pesquisa tem o objetivo de propor uma ferramenta ao método AESM, sem a necessidade da inspeção visual, para separar os componentes sinal e ruído de um conjunto M de séries temporais, representadas pelos índices do mercado acionário dos BRICS (Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul) e, em seguida, comparar as previsões obtidas entre a ferramenta proposta e a definida pela literatura. A ideia é que como a dinâmica das séries temporais de índices do mercado acionário desses países passa por mudanças estruturais durante o período de tempo o método AESM seja adequado por não ser sensível às mudanças dinâmicas.

A estrutura da pesquisa é como se segue. Na seção 2 é apresentada uma introdução aos métodos AES e AESM. Na seção 3 são descritas a amostra e a metodologia. Os resultados dos testes de normalidade e normalidade multivariada das séries temporais são apresentados na seção 4. O desempenho das previsões bem como a estacionariedade das subséries ruído são consideradas na seção 5. Finalmente, na seção 6 são apresentadas as considerações finais e as sugestões.

2. Referencial teórico

Pode-se dizer que o principal objetivo do método AES é decompor a série temporal univariada em um somatório de subséries, de modo que cada componente desta soma possa ser identificado como sinal além de ruído. Em seguida dá-se a reconstrução da série temporal original. Abaixo são apresentados os estágios e passos do método.

2.1 Estágio da decomposição para AES

Neste estágio o passo incorporação pode ser considerado como um mapeamento que transfere uma série temporal unidimensional $Y_t = (y_1, \ldots, y_N)$, considerando $t = 1, \ldots, N$, para a série multidimensional $X_1, \ldots, X_K$ com vetores $X_i = (y_i, \ldots, y_{i+L-1})^T \in R^L$, onde $K = N - L + 1$ e os vetores X_i são definidos como vetores defasados. Com isso, o único parâmetro da incorporação é o comprimento da janela *L*, um número inteiro que deve atender a condição $L \le N/2$, conforme Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001). O resultado deste passo é a definição da matriz trajetória $X = [X_1, \ldots, X_K] = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K}$, de forma que a mesma é uma matriz Hankel, uma vez que suas entradas são constantes ao longo das diagonais paralelas à diagonal secundária.

No passo decomposição em valores singulares (DVS) da matriz trajetória é obtida uma soma de matrizes elementares. Assim, denota-se por $\lambda_1, \ldots, \lambda_L$ os autovalores de XX^T em ordem decrescente de magnitude $(\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_L \ge 0)$ e por $U_1, \ldots, U_L$ os autovetores ortogonais. Ao estabelecer que $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$, a DVS da matriz trajetória pode ser escrita como:

$$X = E_1 + \ldots + E_d \tag{1}$$

onde $E_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ representa uma matriz de posto unitário ou comumente matriz elementar e d representa o número de autovalores de XX^T diferentes de zero.

2.2 Estágio da reconstrução para AES

Neste estágio o passo agrupamento corresponde em dividir as matrizes elementares em grupos somando-as dentro de cada grupo (sinal e ruído). Ao deixar que $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ seja um grupo de índices $i_1, \ldots, i_p$, então, a matriz E_I que corresponde ao grupo I é definida por $E_I = E_{i_1}, \ldots, E_{i_p}$. Assim, o desdobramento do conjunto de índices $J = \{1, \ldots, d\}$ em subconjuntos disjuntos $I_1, \ldots, I_m$ corresponde a representação:

$$X = E_{I_1} + \ldots + E_{I_m} \tag{2}$$

onde $E_{I_1}, \ldots, E_{I_m}$ são definidas como matrizes resultantes. Na expressão (2) tem-se uma nova decomposição de matrizes, esta é denominada como decomposição agrupada.

2.2.1 Separabilidade

O conceito de separabilidade apresenta destaque no estágio de reconstrução. Desta forma, considerando que a série temporal original Y_t pode ser representada pela soma de duas subséries $Y_t = \left(Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}\right)$ representando sinal e ruído, respectivamente, a separabilidade das subséries $Y_t^{(1)}$ e $Y_t^{(2)}$ implica que os componentes obtidos pela DVS da matriz trajetória X podem ser agrupados em dois diferentes grupos de forma que a soma das matrizes em cada grupo origina as matrizes trajetórias $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ das subséries $Y_t^{(1)}$ e $Y_t^{(2)}$. A separabilidade significa que cada linha da matriz trajetória $X^{(1)}$ é ortogonal a cada linha da matriz trajetória $X^{(2)}$, valendo também para as colunas. Para Golyandina, Nekrutkin e Zhigljavsky (2001) não ocorre separabilidade exata, mas, tão somente separabilidade aproximada. A qualidade da separabilidade aproximada é avaliada pela medida denominada correlação ponderada ou *w*-correlação. Então, ao considerar as duas subséries $Y_t^{(1)}$ e $Y_t^{(2)}$, pode-se avaliar a qualidade da separação entre elas através da seguinte expressão:

$$\rho_{12}^{w} = \frac{\left\langle Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)} \right\rangle_w}{\left\| Y_t^{(1)} \right\|_w \left\| Y_t^{(2)} \right\|_w} \tag{3}$$

com $\left\| Y_t^{(i)} \right\|_w = \sqrt{\left\langle Y_t^{(i)}, Y_t^{(i)} \right\rangle_w}$ representando a norma da $i - ésima$ subsérie e $\left\langle Y_t^{(i)}, Y_t^{(j)} \right\rangle_w$ o produto interno entre um par de subséries, considerando que o ponderador w_k é definido por $w_k = \min\{k, L, N-k\}$ e que $L \le N/2$. A expressão (3) pode apresentar valores entre zero e um. Desta maneira, ao considerar $\rho_{12}^{w} = 0$ tem-se que os componentes das subséries $Y_t^{(1)}$ e $Y_t^{(2)}$ são separáveis e de outra forma, quando $\rho_{12}^{w} = 1$ isto significa que os componentes das subséries $Y_t^{(1)}$ e $Y_t^{(2)}$ não são tão bem separáveis, ou seja, devem ser reunidos num mesmo grupo.

2.2.2 Média diagonal

No segundo passo a média diagonal transforma a matriz obtida na decomposição agrupada em (2) para a forma de uma matriz Hankel, que pode ser posteriormente convertida a uma série temporal. Este procedimento é definido como média diagonal ou Hankelização da matriz. O resultado da Hankelização da matriz X é a matriz Hankel HX. Assim, considerando a matriz X de dimensão (LxK), x_{ij} representa um elemento de tal matriz e cada termo resultante da operação de Hankelização, definido por $\tilde{E}_t$, considerando $t = 1,\ldots,N$, é obtido conforme:

$$\tilde{E}_t = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} \sum\limits_{l=1}^{s-1} y_{l,s-l} & 2 \le s \le L-1 \\ \dfrac{1}{L} \sum\limits_{l=1}^{L} y_{l,s-l} & L \le s \le K+1 \\ \dfrac{1}{K+L-s+1} \sum\limits_{l=s-K}^{L} y_{l,s-l} & K+2 \le s \le K+L \end{cases} \tag{4}$$

em que s representa a soma dos índices da matriz X de dimensão (LxK).

Assim, ao aplicar a Hankelização a todos os componentes na expressão (2) obtém-se a expansão $X = \tilde{E}_{I_1} + \ldots + \tilde{E}_{I_m}$. Isto é equivalente à decomposição da série inicial $Y_t = (y_1,\ldots,y_N)$ em um somatório de m séries; $y_t = \sum_{p=1}^{m} \tilde{y}_t^{(p)}$, onde $\tilde{Y}_t^{(p)} = \left(\tilde{y}_1^{(p)},\ldots,\tilde{y}_N^{(p)}\right)$ corresponde à matriz X_{I_p}.
A série que resulta da operação acima, conforme $\tilde{Y}_t^{(p)} = \tilde{y}_1^{(p)},\ldots,\tilde{y}_N^{(p)}$, é obtida pela aplicação do

procedimento de Hankelização em cada matriz (2). Com isso, se a Hankelização é aplicada a todos os componentes obtém-se a formulação:

$$X = \widetilde{E}_{I_1} + \ldots + \widetilde{E}_{I_m} \tag{5}$$

O agrupamento adequado é responsável por uma decomposição em que as matrizes (5) são quase Hankel, levando a uma separabilidade aproximada. Sob a condição de que cada matriz (5) é uma matriz de Hankel, cada uma dessas matrizes determina unicamente a série $\widetilde{Y}_t^{(p)}$ e, portanto, a série inicial Y_t é decomposta na soma de m séries sendo responsável pela formulação:

$$\widetilde{Y}_t = \widetilde{y}_t^{(1)} + \ldots + \widetilde{y}_t^{(m)} \tag{6}$$

considerando $t = 1,\ldots, N$ e para cada p a série $\widetilde{Y}_t^{(p)}$ é o resultado do processo de Hankelização da matriz E_{I_p}. Assim, na decomposição em (6) tem-se a soma de m componentes separáveis, já em forma de séries temporais.

2.3 Estágio da decomposição para AESM

Embora o método AESM siga a estrutura definida para AES contendo os mesmos estágios e passos, por utilizar um conjunto M de séries temporais isto acaba requerendo algumas particularidades na formação do bloco de matrizes trajetórias e na definição do comprimento da janela. Tal particularidade ganha destaque uma vez que através do comprimento adequado da janela é possível capturar a periodicidade da série temporal. Para Hassani e Mahmoudvand, (2013), a definição adequada do comprimento da janela L é dada por $L = \frac{1}{M+1}(N+1)$. Para o primeiro estágio a incorporação pode ser considerada como um mapeamento que transfere um conjunto M de séries temporais unidimensionais $Y_{t_i}^{(i)} = \left(y_1^{(i)},\ldots,y_{N_i}^{(i)}\right)$, com $i = 1,\ldots,M$, para uma matriz multidimensional $\left[X_1^{(i)},\ldots,X_{K_i}^{(i)}\right]$ com vetores $X_j^{(i)} = \left(y_j^{(i)},\ldots,y_{j+L_i+1}^{(i)}\right)^T \in R^{L_i}$, onde $K_i = N_i - L_i + 1$. Os vetores $X_j^{(i)}$ são chamados de vetores defasados. Semelhante ao modelo AES a matriz $X^{(i)}$ é uma matriz Hankel. Neste passo, considerando um conjunto M de séries temporais, com $t = 1,\ldots, N$, são definidas as matrizes trajetórias $X^{(i)}$, para $i = 1,\ldots,M$ em cada série temporal $Y_{t_i}^{(i)}$, todas com a mesma dimensão $(L \times (N - L + 1))$. O resultado deste passo é a formação de um bloco de matrizes trajetórias X_V, conforme:

$$X_V = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(M)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

o bloco de matrizes trajetórias X_V representa um formato vertical.

No segundo passo é realizada a DVS do bloco de matrizes trajetórias $X_V X_V^T$ obtendo uma soma de matrizes elementares. Assim, denota-se por $\lambda_{V_1},\ldots,\lambda_{V_{M\times L}}$ os autovalores de $X_V X_V^T$ em ordem decrescente de magnitude $\left(\lambda_{V_1} \geq \ldots \geq \lambda_{V_{M\times L}} \geq 0\right)$ e por $U_{V_1},\ldots,U_{V_{M\times L}}$ os autovetores ortogonais. A matriz $X_V X_V^T$, de dimensão $(ML \times ML)$, é dada conforme:

$$X_V X_V^T = \begin{bmatrix} X^{(1)}X^{(1)T} & X^{(1)}X^{(2)T} & \cdots & X^{(1)}X^{(M)T} \\ X^{(2)}X^{(1)T} & X^{(2)}X^{(2)T} & \cdots & X^{(2)}X^{(M)T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{(M)}X^{(1)T} & X^{(M)}X^{(2)T} & \cdots & X^{(M)}X^{(M)T} \end{bmatrix} \tag{8}$$

A estrutura em (8) é similar a matriz de variância-covariância obtida na literatura clássica da análise estatística multivariada conforme descrevem Hassani e Mahmoudvand, (2013). A matriz

$X^{(i)}X^{(i)T}$ é a mesma utilizada no modelo AES para uma única série temporal $Y_{t_i}^{(i)}$. Semelhante ao obtido em AES, a DVS nesse passo é dada por:

$$X_V = H_{V_1} + \ldots + H_{V_{dV}} \tag{9}$$

onde $H_{V_i} = \sqrt{\lambda_{V_i}} U_{V_i} V_{V_i}^T$ representa a matriz elementar, $V_{V_i} = X_V^T U_{V_i} \big/ \sqrt{\lambda_{V_i}}$ e dV o número de autovalores de $X_V X_V^T$ diferentes de zero.

2.5 Estágio da reconstrução para AESM

O agrupamento corresponde em dividir as matrizes elementares $H_{V_1},\ldots,H_{V_{d_V}}$ em grupos disjuntos somando-as dentro de cada grupo. Assim, o desdobramento do conjunto de índices $J = \{1,\ldots,d_V\}$ em subconjuntos disjuntos $I_1,\ldots,I_m$ corresponde a representação:

$$X_V = H_{I_1} + \ldots + H_{I_m} \tag{10}$$

onde $H_{I_1},\ldots,H_{I_m}$ são definidas como matrizes resultantes.

Então, conforme descrito em Patterson, Hassani, Heravi e Zhigljavsky (2011), é preciso obter uma sequência cumulativa de correlações ρ_{12}^w entre sinal e ruído. Para isso, a primeira correlação $C(1)$ é obtida considerando a primeira matriz elementar na formação do sinal e as demais como ruído. Em seguida, para definição de $C(2)$ as duas primeiras matrizes elementares são usadas para composição do sinal e as demais como ruído. Logo, uma sequência cumulativa de correlações é construída com $C(q)$, $q = 1,\ldots,d_V - 1$. A existência da estrutura da série temporal será definida por uma sequência cumulativa de correlações que determinam, num gráfico, valores mínimos e máximos. Então, um padrão típico é representado pelo declínio da correlação. A partir da identificação da primeira ruptura determinam-se as matrizes responsáveis pela formação do sinal e consequente formação do ruído da serie temporal. Esta é a descrição da ferramenta gráfico *w*-correlação cumulativa definida na pesquisa como AESM(L). No passo seguinte do estágio de reconstrução a média diagonal transforma a matriz obtida na decomposição agrupada em (10) para a forma de uma matriz Hankel, que pode ser posteriormente convertida a uma série temporal. Considera-se $\tilde{H}^{(i)}$ uma aproximação da matriz $X^{(i)}$ obtida a partir do passo média diagonal. Se $\tilde{h}_{mn}^{(i)}$ é um elemento da matriz $\tilde{H}^{(i)}$ o $j-ésimo$ termo da série reconstruída $\tilde{Y}_{t_i}^{(i)} = \left(\tilde{y}_1^{(i)},\ldots,\tilde{y}_j^{(i)},\ldots,\tilde{y}_{N_i}^{(i)}\right)$ é obtido pela média aritmética $\tilde{h}_{mn}^{(i)}$ para todo (m,n) de modo que $m+n-1=j$.

2.5.1 Proposta de ferramenta para separabilidade

Com o objetivo de minimizar a correlação ponderada ρ_{12}^w com base numa escolha binária das matrizes elementares diagonalizadas para definição dos grupos sinal e ruído, a escolha das subséries para cada índice do mercado acionário deve ser realizada por um processo de otimização conforme descrito:

$$\begin{aligned}
&Min\ \rho_{12}^w \\
&sujeito \\
&Y_t^{(1)} = \beta_1^{(1)}\tilde{H}_{V_1} + \ldots + \beta_{dV}^{(1)}\tilde{H}_{Vd} \\
&Y_t^{(2)} = \beta_1^{(2)}\tilde{H}_{V_1} + \ldots + \beta_{dV}^{(2)}\tilde{H}_{Vd} \\
&com \\
&se\ \beta_1^{(1)} = 0\ então\ \beta_1^{(2)} = 1 \\
&se\ \beta_1^{(1)} = 1\ então\ \beta_1^{(2)} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

…

$$se\ \beta_{dV}^{(1)} = 0\ então\ \beta_{dV}^{(2)} = 1$$

$$se\ \beta_{dV}^{(1)} = 1\ então\ \beta_{dV}^{(2)} = 0$$

em que $Y_t^{(1)}$ representa a subsérie sinal, $Y_t^{(2)}$ a subsérie ruído, $\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_{dV}^{(1)}, \beta_{dV}^{(2)}$ as variáveis de decisão binárias, $\widetilde{H}_{V_1}, \ldots, \widetilde{H}_{Vd}$ matrizes elementares diagonalizadas. Através do processo de otimização proposto na pesquisa determina-se a separabilidade para o método AESM, definida a partir de agora como AESM(P).

2.6 Algoritmo de previsão para AESM

A previsão obtida a partir de um conjunto M de séries temporais é dada:

$$\left[\hat{y}_{j_1}^{(1)}, \ldots, \hat{y}_{j_M}^{(M)}\right]^T = \begin{cases} \left[\widetilde{y}_{j_1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{y}_{j_M}^{(M)}\right], & j_i = 1, \ldots, N_i \\ \left(I_{MxM} - WW^T\right)^{-1} WU^{\nabla M^T} Z_h & j_i = N_i + 1, \ldots, N_i + h \end{cases} \tag{12}$$

com $U_j^{(i)\nabla}$ representando os primeiros $L_i - 1$ componentes do vetor $U_j^{(i)}$ e $\pi_j^{(i)}$ os últimos componentes do vetor $U_j^{(i)}$ com $(i = 1, \ldots M)$. Considerando que a matriz $U^{\nabla M}$ é dada $\begin{bmatrix} U_j^{(i)\nabla} \\ \vdots \\ U_j^{(M)\nabla} \end{bmatrix}$ e

a matriz W representada por $\begin{bmatrix} \pi_1^{(1)} & \pi_2^{(1)} & \cdots & \pi_r^{(1)} \\ \pi_1^{(2)} & \pi_2^{(2)} & \cdots & \pi_r^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \pi_1^{(M)} & \pi_2^{(M)} & \cdots & \pi_r^{(M)} \end{bmatrix}$.

Além disso, $Z_h = \left[Z_h^{(1)}, \ldots, Z_h^{(M)}\right]^T$ e $Z_h^{(i)} = \left[\hat{y}_{Ni-Li+h+1}^{(i)}, \ldots, \right]\hat{y}_{Ni+h+1}^{(i)}$ com $(i = 1, \ldots M)$.

2.7 Previsão de séries temporais através dos métodos clássicos, AES e AESM

Conforme pesquisa realizada por Hassani (2007) que confrontou os resultados de previsão entre o modelo de análise espectral e alguns modelos clássicos, o modelo AES apresentou melhor desempenho. Na pesquisa o autor além de utilizar o método AES fez uso dos métodos média móveis, ARIMA e o algoritmo sazonal Holt-Winters. Ainda em relação ao método AES, Menezes, Cassiano, Souza, Teixeira Júnior, Pessanha, & Souza (2014) ao confrontarem os resultados de previsão para dados do consumo de energia elétrica confirmaram melhor desempenho do modelo de análise espectral em relação aos modelos ARMA e o algoritmo sazonal Holt-Winters. Esquivel (2012) ao utilizar séries temporais meteorológicas e financeiras concluiu que o modelo AES produziu resultados de previsão tão bons ou superiores aqueles obtidos pelos modelos SARIMA e o algoritmo sazonal Holt-Winters. Em outra pesquisa, Hassani, Heravi & Zhigljavsky (2009) utilizam os métodos ARIMA sazonal e o algoritmo sazonal Holt-Winter para previsão de indicadores de produção industrial para Alemanha, França e Reino Unido. Os autores demonstraram o melhor desempenho para previsões obtidas pelo método AESM quando comparado com aquelas obtidas pelos métodos clássicos. Patterson, Hassani, Heravi & Zhigljavsky (2011) ao utilizarem dados sobre índices mensais de produção industrial no Reino Unido concluíram que tanto AES como AESM apresentaram melhor desempenho de previsão quando comparado com o método ARMA. Agora, quando comparados entre si o método AESM apresenta, de modo geral, melhor desempenho para as previsões do que o método AES. Mesma conclusão sobre o desempenho do método AESM em relação ao método AES é obtida por Hassani e Mahmoudvand (2013). Essas pesquisas evidenciam que os modelos clássicos de previsão não conseguem superar os modelos de análise espectral.

3. Amostra

As séries temporais escolhidas são, portanto, índices do mercado acionário dos países que pertencem ao BRICS, conforme: IBOV (Brasil), RTSI (Rússia), SENSE (Índia), SSEB (China) e

MSCI (África do Sul). Eles foram obtidos no banco de dados da *Advanced Financial Network* (ADVFN) e correspondem ao período de 9 de dezembro de 2011 a 21 de fevereiro de 2014, cuja periocidade totaliza 108 semanas. Todas as séries na pesquisa são apresentadas na forma logarítmica. A amostra acima foi dividida em dois grupos. O primeiro grupo se refere ao conjunto das séries temporais que são utilizadas pelo método AESM, e o segundo grupo, composto das 12 últimas semanas da amostra, foi utilizado para avaliação de desempenho das previsões realizadas.

3.1 Metodologia

Nesta pesquisa são aplicados ao método AESM as ferramentas AESM(L) e AESM(P), para decompor, reconstruir a partir de um conjunto M de séries temporais e realizar as previsões através do algoritmo visto na seção 2.6. Em seguida, o desempenho das previsões obtidas para diferentes passos à frente é avaliado. A estimação dos valores futuros pode apresentar erro independente do modelo de previsão adotado. Costuma-se avaliar o modelo de previsão ao comparar os valores obtidos com os valores futuros da serie temporal original e, determinar o seu desempenho através de alguma medida de erro. Então, as previsões nos passos à frente h (1, 3, 6 e 12 semanas), foram confrontadas com o segundo grupo da amostra, composto das 12 últimas semanas. Para isso, a avaliação deu-se através das medidas Erro Quadrático Médio (EQM) e Erro Absoluto Médio Percentual (EAMP) definidas, respectivamente, conforme:

$$EQM = \frac{1}{h}\sum_{j=k+1}^{N}\left(Y_j - \hat{Y}_j\right)^2 \quad (13)$$

$$EAMP = \frac{1}{h}\sum_{j=k+1}^{N}\left|\frac{Y_j - \hat{Y}_j}{Y_j}\right| \times 100 \quad (14)$$

com Y_j representando o valor da série original, $\hat{Y}_j$ o valor da previsão e h a quantidade de observações reservadas para avaliação.

4. Resultados dos testes de normalidade

Os testes de Anderson-Darling (A-D) e de Shapiro Wilk (S-W) são usados para testar se uma amostra de dados tem origem de uma população com uma distribuição específica. Todos os dois testes tendem a funcionar bem na identificação de uma distribuição como não-normal quando a distribuição em questão está distorcida. No entanto, são menos exigentes quando a distribuição é uma distribuição t e a não-normalidade é devido à curtose. Em geral, entre os dois testes baseados na função de distribuição empírica, o teste A-D tende a ser mais eficaz na detecção de desvios na cauda da distribuição. Na pesquisa os dois testes são utilizados para uma visão abrangente dos resultados. Os testes rejeitam a hipótese de normalidade quando o p valor for menor ou igual a 0,05. Assim, o teste de normalidade permite afirmar com confiança de 95% que os dados não se ajustam à distribuição normal. A Tabela 1 representa os resultados do teste de normalidade para um nível de 5% de significância. Como pode ser visto a partir dos resultados, as séries não estão distribuídas normalmente.

Tabela 1 – Teste de normalidade e p valor

	IBOV	RTSI	SENSE	SEEB	MSCI
Número de Observações	96	96	96	96	96
Shapiro-Wilk	0,15	0,95	0,93	0,43	0,90
p valor	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Anderson-Darling	22,74	1,50	2,52	24,28	4,65
p valor	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Dados obtidos pelos autores

As séries temporais econômicas podem apresentar uma estrutura com tendências não-lineares e sazonalidade complexa. Vale ressaltar que o método AESM não assume linearidade ou normalidade dos dados observados. Para avaliar o aspecto da normalidade do conjunto de dados, fez-se o uso do teste Doornik-Hansen-Omnibus (DHO) que é um teste de normalidade multivariada. O teste foi aplicado entre pares formados pelas séries temporais. Os resultados representados na Tabela 2 indicam que há fortes evidências de não-normalidade multivariada para um nível de 5% de significância entre cada par de série. A única exceção para isso ocorre com o par RTSI/MSCI.

Tabela 2 – Teste de normalidade multivariada e p valor

	IBOV	RTSI	SENSE	SEEB	MSCI
IBOV		7951,0	7686,0	8239,0	7788,0
p valor		0,00	0,00	0,00	0,00
RTSI			1132,0	750,8	6,1
p valor			0,02	0,00	0,19
SENSE				768,0	1345,0
p valor				0,00	0,00
SEEB					764,1
p valor					0,00

Fonte: Dados obtidos pelos autores

5. Desempenho para AESM(L) e AESM(P)

A modelagem das ferramentas AESM(P) e AESM(L) usadas no método AESM foi implementada no software Lingo, versão 11. Este software é comercial e oferece grande quantidade de algoritmos e características para a construção das matrizes necessárias para a execução das rotinas propostas. A Tabela 3, com base nos resultados obtidos, indica que as correlações ponderadas entre sinal e ruído para cada série temporal foi próxima à zero. Na mesma tabela é possível verificar que as menores correlações foram obtidas pela ferramenta AESM(P). Tal separação é importante uma vez que a subsérie sinal é utilizada no algoritmo de previsão para definição dos passos à frente.

Tabela 3 – Correlação sinal e ruído e medidas de erro

			Correlação		EQM		EAMP	
Série	L	h	AESM (P)	AESM (L)	AESM (P)	AESM (L)	AESM (P)	AESM (L)
IBOV	16		1,84E-03	3,35E-02				
		1			1,52E-04	1,86E-03	0,62%	2,32%
		3			4,18E-03	3,09E-03	0,95%	2,49%
		6			3,29E-03	2,28E-03	0,75%	2,40%
		12			4,10E-03	1,93E-03	1,24%	2,20%
RTSI	16		8,06E-06	2,86E-04				
		1			3,10E-05	4,28E-07	0,36%	0,40%
		3			2,62E-05	3,89E-05	0,66%	0,35%
		6			3,51E-05	2,78E-05	0,55%	0,30%
		12			4,56E-04	1,00E-04	0,54%	0,60%
SENSEX	16		3,96E-06	1,13E-03				
		1			1,58E-04	2,94E-04	0,62%	1,03%
		3			3,09E-04	3,42E-03	0,90%	1,05%
		6			2,12E-04	3,99E-03	0,95%	1,04%
		12			1,11E-04	4,92E-03	0,94%	1,00%

SSEB	16		3,81E-05	1,65E-03				
		1			6,50E-07	8,10E-04	1,49%	1,50%
		3			1,42E-06	2,83E-03	1,50%	1,30%
		6			6,72E-06	2,85E-03	1,49%	1,50%
		12			3,28E-05	2,18E-02	1,30%	1,35%
MSCI	16		6,83E-05	1,03E-02				
		1			9,20E-05	3,94E-04	0,51%	1,05%
		3			8,93E-05	3,95E-04	0,53%	1,03%
		6			1,55E-04	3,05E-04	0,73%	1,04%
		12			5,31E-04	5,48E-04	1,70%	2,00%

Fonte: Dados obtidos pelos autores

Então, as previsões obtidas nos passos à frente h (1, 3, 6 e 12 semanas), foram confrontadas com o segundo grupo da amostra, composto das 12 últimas semanas. Para isso a avaliação deu-se através do uso das medidas de erro definidas em (13) e (14). Semelhante ao trabalho de Esquível (2012) quando o horizonte h aumenta a qualidade da previsão não apresenta bons resultados. Na Tabela 3 é possível perceber que AESM(P), de modo geral, apresentou melhor desempenho para previsões realizadas quando comparada com AESM(L), por conta dos menores valores tanto para EQMs como para EAMPs. Em relação a ferramenta AESM(P) os índices IBOV (Brasil), RTSI (Rússia), SENSE (Índia) e MSCI (África do Sul) foram favoráveis à previsão para SSEB (China) uma vez que este índice apresentou o melhor desempenho para as previsões realizadas. Por outro lado, a ferramenta AESM(L) indica que os índices IBOV (Brasil), SENSE (Índia), SSEB (China) e MSCI (África do Sul) foram favoráveis à previsão para RTSI (Rússia).

5.1 Resultados para subséries ruído

Com a finalidade de avaliar se as subséries ruído, obtidas conforme descrito na seção 2.5 e 2.5.1, para AESM(P) e AESM(L), são estacionárias, foi realizado o teste de raiz unitária de Dickey-Fuller Aumentado. A Tabela 4 mostra os resultados do teste. A hipótese nula de que as subséries possuem raiz unitária e, portanto, são não estacionárias, é rejeitada para as subséries ao nível de significância 5%. Isto acontece uma vez que os valores do teste são menores do que o valor crítico.

Tabela 4 – Teste DFA para subséries em AESM(P) e AESM(L)

Subsérie Ruido	AESM(P)	AESM(L)	Valor Crítico 5%
IBOV	-14,95	-14,85	-3,45
RTSI	-14,97	-14,92	-3,45
SENSE	-14,94	-14,93	-3,45
SSEB	-14,92	-14,79	-3,45
MSCI	-14,97	-14,95	-3,45

Fonte: Dados obtidos pelos autores

Em seguida, foi aplicado as subséries ruído o teste BDS, conforme Brock, Dechert e Scheinkman (1996), que apresenta como hipótese nula a classificação dos resíduos como sendo independentes e identicamente distribuídos e como hipótese alternativa a presença de dependência linear ou não linear nos resíduos.

Tabela 5 – Teste BDS para subséries em AESM(P) e AESM(L)

		AESM(P)	AESM(L)
Subsérie Ruido	Dimensão	p valor	p valor
IBOV	4	0,00	0,00
	5	0,00	0,00
	6	0,00	0,00
RTSI	4	0,00	0,00
	5	0,00	0,00

	6	0,00	0,00
SENSE	4	0,00	0,00
	5	0,00	0,00
	6	0,00	0,00
SSEB	4	0,00	0,00
	5	0,00	0,00
	6	0,00	0,00
MSCI	4	0,00	0,00
	5	0,00	0,00
	6	0,00	0,00

Fonte: Dados obtidos pelos autores

Com base na Tabela 5 verifica-se que as subséries obtidas pelas ferramentas AESM(P) e AESM(L) não apresentam seus dados independentes e identicamente distribuídos, caracterizando que as mesmas não podem representar ruído branco.

6. Considerações finais e sugestões

Levando em conta que a dinâmica da economia de países emergentes tem passado por mudanças políticas e estruturais no tempo, é preciso ter certeza de que o método de previsão não é sensível a essas variações dinâmicas. Neste contexto, o modelo de Análise Espectral Singular Multivariada – AESM pode ser considerado como aquele que não é sensível às quebras estruturais. A motivação pela utilização do método AESM dá-se por causa da sua capacidade em lidar com séries estacionárias, bem como séries não-estacionárias. Além disso, ao contrário dos métodos clássicos de previsão de séries temporais (que assumem normalidade e estacionariedade das séries), o método é não-paramétrico, não fazendo, portanto, suposições prévias sobre os dados observados. As séries históricas nesta pesquisa apresentam uma estrutura complexa e mudanças estruturais uma vez que não se ajustam à distribuição normal como também forte evidência de não-normalidade multivariada. Inicialmente a separação entre sinal e ruído para cada série temporal foi realizada. Com isso, a correlação ponderada obtida para cada série temporal, entre as subséries sinal e ruído, foi próxima à zero, quer para a metodologia proposta AESM (P) quer para a definida pela literatura AESM (L). Tal separação é fundamental uma vez que a subsérie sinal é utilizada no algoritmo de previsão para definição dos passos à frente. Os resultados da previsão para passos à frente foram favoráveis, no entanto, semelhante a outras pesquisas, quando o horizonte de previsão aumentou a qualidade da previsão não apresentou bom desempenho. Uma vez que apresentou os menores valores para os EQMs, é possível perceber que a AESM (P), de modo geral, tem melhor desempenho quando comparada com AESM (L). Se em AESM (P) os índices IBOV (Brasil), RTSI (Rússia), SENSE (Índia) e MSCI (África do Sul) foram favoráveis à previsão para SSEB (China) em AESM (L) os índices IBOV (Brasil), SENSE (Índia), SSEB (China) e MSCI (África do Sul) foram favoráveis à previsão para RTSI (Rússia).

Assim, a pesquisa realizada contribui, através do uso da pesquisa operacional, para finanças à medida que agrega evidências favoráveis à generalidade da eficácia do método AESM aplicado no mercado acionário dos países do BRICS. Do ponto de vista prático, os resultados obtidos podem auxiliar os profissionais do mercado financeiro na tomada de decisões de investimento e análise do mercado de países classificados como emergentes. Para próximas pesquisas sugere-se a utilização de outras bases de dados, a inclusão de outros índices do mercado acionário, a adoção de outros períodos de análise e a inclusão de outras variáveis que possam aumentar o poder explicativo do método.

7. Referências

Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1971). Time series analysis: Forecasting and control, *Operational Research Quarterly*, 22, 199-201.

Brock, W., Dechert, W. & Scheinkman, J. (1987). A test for independence based on the correlation dimension. *SSRI Working Paper 8702,* Madison, Department of Economics, University of Wisconsin.

Brockwell, P. J., & Davis R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition. Springer, New York.

Cao, L. Y., & Soo, A. (1999). Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates, *International Journal of Forecasting*, 15, 421-430.

Ceretta, P. S., Barba, F. G., Vieira, K. M., & Casarin, F. (2011). Previsão da volatilidade interdiária: análise das distribuições alternativas. *Revista Brasileira de Finanças*, 9, 209-226.

Climent, F. J., De Miguel, M. Del M., Olmeda, I. (2000). Linear and Non-Linear Dynamics Between Exchange Rates and Stock Markets Returns: An Application to the Financial Crises of Europe and Asia in the Ninetie. *Review of Financial Markets*, 5, 19-48.

Esquivel, R.M. (2012). *Análise espectral singular: modelagens de séries temporais através de estudos comparativos usando diferentes estratégias de previsão*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC, Salvador, Ba, Brasil.

Ghodsi, M., Hassani, H., Sanei, S., & Hick, Y. (2009). The use of noise information for detecting temporomandibular disorder, *Biomedical Signal Processing and Control*, 4, 79-85.

Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of Time Series Structure: SSA and related techniques, Chapman & Hall/CRC, New York.

Hassani, H. (2007). Singular spectrum analysis: Methodology and comparison, *Journal of Data Science*, 5, 239-257.

Hassani, H., & Mahmoudvand, R. (2013). Multivariate singular spectrum analysis: a general view and new vector forescasting approach. *International Journal of Energy and Statistics*, 1, 55–83.

Hassani, H., Dionisio, A., & Ghodsi, M. (2010). The effect of noise reduction in measuring the linear and nonlinear dependency of financial markets, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 492-502.

Hassani, H., Heravi, S., & Zhigljavsky, A. (2009). Forecasting European industrial production with singular spectrum analysis, *Internation Journal of Forecasting*, 25, 103-118.

Hsieh, D. A. (1991). Chaos and nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets, *Journal of Finance*, 46, 1839-1877.

Jain, Subhash Chandra. (2006). *Emerging economies and the transformation of international business: Brazil, Russia, India and China (Brics)*. Cornwall: Edward Elgar Publishing.

Keppenne, C. L., & M. Ghil. (1993). Adaptive filtering and prediction of noisy multivariate signals: An application to subannual variability in atmospheric angular momentum, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3, 625–634.

Kumar U., & Jain V.K. (2010). Time Series Models (Grey-Markov, Grey Model with rolling mechanism and Singular Spectrum Analysis) to forecast Energy Consumption in India. *Energy*, 35, 1709-1716.

Menezes, M. L., Cassiano, K. M., de Souza, R. M., Teixeira Júnior, L. A., Pessanha, J. F. M. & Souza, R. C. (2014). Modelagem e previsão de demanda de energia com filtragem SSA, *Revista de Estatistica UFOP*, 3, 170-187.

Patterson, K., Hassani, H., Heravi, S., & Zhigljavsky, A. (2011). Multivariate singular spectrum analysis for forecasting revisions to real-time data, *Journal of Applied Statistics*, 38, 2183-2211

Plaut, G., & Vautard, R. (1994). Spells of low-frequency oscillations and weather regimes in the Northern Hemisphere, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51, 210-236.

Scheinkman, J., & LeBaron, B. (1989). Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *Journal of Business*, 62, 311-337.