

## **CONTROLE DE REPOSIÇÃO E ESTOQUES DE UM ITEM COM DEMANDA INCERTA VIA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA**

**Paulo Soares Alves Cunha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22451-900  
[psac@puc-rio.br](mailto:psac@puc-rio.br)

**Fabrcio Oliveira**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea - Rio de Janeiro, RJ - Brasil - 22451-900  
[fabrcio.oliveira@puc-rio.br](mailto:fabrcio.oliveira@puc-rio.br)

**Fernanda Maria Pereira Raupp**

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Av. Getúlio Vargas, 333 - Quitandinha, Petrópolis – RJ – Brasil - 25651-075  
[fernanda@lncc.br](mailto:fernanda@lncc.br)

### **RESUMO**

Neste trabalho, um sistema de controle de reposição e estoques é determinado para uma rede logística de uma camada, considerando um único item com demanda incerta, via programação estocástica. A periodicidade das encomendas bem como a quantidade variável a ser encomendada são determinadas através de um modelo de programação linear inteira mista, que leva em conta a natureza incerta dos níveis de demanda pelo item através de um conjunto finito de cenários. Neste sentido foi utilizado um sistema de amostragem baseado em simulação de Monte Carlo, conhecido na literatura como “sample average approximation”. Resultados numéricos são apresentados com auxílio do pacote AIMMS, e sugerem que os custos mínimos obtidos para instâncias conhecidas da literatura, via programação estocástica, apresentam erro de aproximadamente 1%, quando comparados aos custos ótimos, mesmo com um número pequeno de cenários.

**PALAVRAS CHAVE.** Controle de estoques, Demanda incerta, Programação estocástica.

**Área principal:** L&T – Logística e Transporte. IND – PO na Indústria

### **ABSTRACT**

In this paper, an inventory and replenishment control system is determined for a logistics network with one layer, assuming a single item with uncertain demand, via stochastic programming. The periodicity of replenishment orders as well as the variable replenishment quantities are determined using mixed integer linear programming, which takes into account the uncertain nature of the levels of demand for the item through a finite set of scenarios. In this sense, a sampling system based on Monte Carlo simulation, known in literature as "sample average approximation" (SAA), was used. Numerical results are presented with the aid package AIMMS, and suggest that the obtained minimum costs for known instances of the literature, via stochastic programming, show an error of 1% approximately, when compared to the optimal costs, even with a small number scenarios.

**KEYWORDS.** Inventory control, uncertain demand, Stochastic programming.

**Main area:** L&T - Logistics and Transport. IND – OR in Industry

## 1. Introdução

A gestão de estoques em redes logísticas permeia a tomada de decisão em inúmeras empresas, sendo um tema bastante explorado no meio acadêmico e empresarial (ROSA ET AL., 2010). Segundo Bertsimas e Thiele (2006), as tomadas de decisão no controle e gerenciamento em cadeias de suprimentos têm sido extensivamente beneficiadas com o auxílio de técnicas de Pesquisa Operacional, resultando em muitas aplicações de sucesso. A programação dinâmica, por exemplo, surgiu como uma ferramenta padrão para este propósito e levou a avanços significativos, como quando Clark e Scarf (1960) apresentaram políticas ótimas de estoques para sistemas logísticos em série. Muitos modelos matemáticos e métodos de solução já foram desenvolvidos para auxiliar na tomada de decisão nesse contexto. No entanto, as abordagens não consideram, em sua maioria, a natureza incerta dos níveis de demanda pelos produtos, bem como dos preços e dos tempos de reposição dos produtos.

Na literatura acadêmica existem várias propostas de políticas de controle de estoques para uma rede logística de uma camada. Dentre elas, podemos citar a política de revisão contínua ( $r, Q$ ) e de revisão periódica ( $R, S$ ), entre outras, onde  $r$  representa o ponto de pedido,  $Q$  e  $S$  representam a quantidade a ser encomendada e  $R$  representa o tempo entre encomendas (Hadley e Whitin, 1963; Silver e Peterson, 1998; Zipkin, 2000). Para o caso de demanda determinística variando no tempo, o problema em questão pode ser resolvido com programação dinâmica através do algoritmo de Wagner-Whitin, (Axsater, 2006).

Na prática, para responder as principais questões sobre quando e quanto repor um item, considerando variabilidades na demanda e no suprimento, obtém-se soluções aproximadas em duas etapas, (Axsater, 1996; Nahmias, 1997). Na primeira etapa, a demanda estocástica é representada por sua média e os valores de  $Q$  e  $R$  das políticas são obtidos pela fórmula do EOQ. Na segunda etapa, para se calcular os valores de  $r$  e  $S$  (nível alvo) são estabelecidos níveis de serviços desejáveis. No caso de revisão contínua, o nível de serviço deve garantir as incertezas da demanda durante o tempo de entrega do pedido ou ressuprimento, enquanto no caso de revisão periódica, o nível de serviço deve garantir as incertezas da demanda durante o tempo de ressuprimento mais o tempo entre reposições. Em geral, os níveis de serviço fazem parte das restrições ao modelo, que podem ser modelados como um percentual da demanda a ser atendida.

De acordo com Hadley e Whitin (1963) e Silver e Peterson (1985), as políticas de reposição e estoques com revisão periódicas são amplamente utilizadas por exigir menos esforço transacional, ter maior facilidade de planejamento para o cálculo de necessidade de carga de trabalho, facilitar atendimento de clientes e recebimento dos fornecedores, permitir melhor coordenação das reposições, principalmente quando envolve vários itens, bem como gerar mais estabilidade para o sistema. Para You e Grossmann (2009), ainda existem dois bons motivos para adotar uma política com revisão periódica. Primeiro, quando lidamos com demanda pelo item estacionária numa organização com um único elemento, a revisão periódica retorna os melhores resultados (Federgruen e Zipkin, 1984). Segundo, em se tratando de um sistema multicamadas, essa política tem a vantagem de ser implementada com mais facilidade. Neste último caso, embora essa política não seja necessariamente a melhor em termo de custo, ela fornece soluções próximas ao ótimo.

No caso de demanda incerta, a programação estocástica de dois estágios passa a ser uma método de solução adequado. Enquanto o modelo determinístico permite que uma solução ótima seja obtida para um único cenário, o modelo estocástico é capaz de considerar todos os cenários possíveis simultaneamente, cada um com sua respectiva probabilidade. De acordo com Gupta e Maranas (2000), nesta técnica as variáveis de decisão do problema são divididas em dois conjuntos. As variáveis de primeiro estágio, também conhecidas como variáveis de projeto e correspondem àquelas decisões que precisam ser tomadas antes da realização da incerteza, também conhecidas como decisões do tipo aqui-e-agora. Em seguida, baseado nessas decisões e nas realizações dos eventos randômicos, as variáveis de recurso são consideradas no segundo estágio, que por sua vez estão

ligadas a decisões de controle, também conhecidas como decisões do tipo espere-e-veja.

You e Grossmann (2009) afirmam que a maioria dos modelos da literatura considera a gestão de estoques e projeto de redes logísticas separadamente. Nos modelos que tratam esses temas de forma conjunta, o foco é o problema de projeto de redes logísticas, sendo as questões relativas aos estoques tratadas sem a otimização das decisões próprias dos estoques, tais como em Minner (2001), e You e Grossmann (2008). Por exemplo, estoques de segurança são tratados como limites inferiores para os níveis dos estoques ou como metas, que se violadas são impostas penalidades. Esta abordagem não pode otimizar os níveis de estoque de segurança, especialmente quando se considera a incerteza da demanda. Assim, esses modelos fornecem uma aproximação do custo de estocar ótimo, podendo levar a soluções sub-ótimas.

A pesquisa sobre projetos de redes da cadeia de suprimentos integrados à gestão dos estoques estocásticos é relativamente nova. A maior parte da literatura existente concentra-se em redes logística de única camada. Utilizando programação estocástica, alguns trabalhos estenderam para multicamadas, como são os casos de Gupta e Maranas (2000), Santoso e Ahmed (2005), Oliveira e Hamacher (2012) e Oliveira et al. (2013). Porém, apesar de considerarem a gestão de estoques e o projeto de cadeias de suprimentos de forma conjunta, não trataram diretamente da política de controle de estoques. Contudo, Daskin et al. (2002) e Shen et al. (2003) e You e Grossmann (2008) abordaram projetos de cadeias de suprimento e políticas de controle de estoques, sem no entanto utilizarem a técnica de programação estocástica.

Buscando proximidade com os problemas práticos, a proposta deste trabalho é considerar o uso da programação estocástica de dois estágios para auxiliar a tomada de decisão quanto ao controle e gerenciamento dos estoques de um único item em uma rede logística de uma camada, cujos níveis da demanda são incertos, ao longo de um horizonte de tempo. Para tal, foi modelado o problema de encontrar os parâmetros ótimos do sistema de controle e reposição do tipo  $(R, S)$  com revisão periódica e tamanhos do lote de encomenda variáveis, que não ultrapassem um nível máximo da posição dos estoques, de modo a satisfazer a demanda pelo item, como um problema de programação linear inteira mista, para cada cenário conhecido da demanda.

No que segue, serão apresentadas a descrição do problema na Seção 2 e a formulação matemática proposta do problema na Seção 3. Na Seção 4, a metodologia proposta para determinação dos parâmetros ótimos do sistema  $(R,S)$  é apresentada, assim como a técnica usada para modelar a variável aleatória da demanda pelo item, em cada período de tempo considerado. Na seção 5, são apresentados os resultados numéricos para instâncias conhecidas na literatura. A conclusão do trabalho é apresentada na Seção 6.

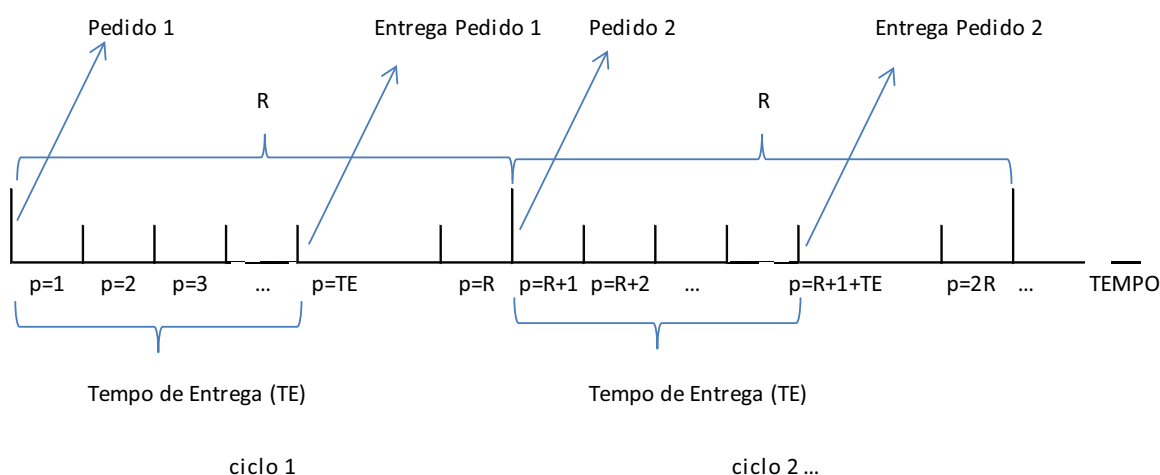
## 2. Descrição do problema

Este trabalho tem como objetivo determinar uma política de reposição e estoques de uma rede logística de uma camada com revisão periódica, que é muito utilizada em operações, tanto no varejo como na indústria, em que é necessário determinar o melhor nível de investimento em estoque para atender o nível de serviço desejado. No problema em questão considera-se apenas um centro de distribuição (CD), que faz seu pedido para um fornecedor, armazena um único produto e atende seus clientes que demandam o produto. Inicialmente, não vamos considerar os arcos de transporte entre o fornecedor externo e o CD, nem entre o CD e os clientes.

O CD utiliza o sistema de controle de reposição e estoques  $(R,S)$  para o item sendo estudado, onde  $R$  denota o período entre encomendas e  $S$  denota o nível máximo de estoque (nível alvo) do item. Particularmente, o problema é determinar o nível alvo  $S$  ótimo e a periodicidade  $R$  ótima no CD, relativo a um único item cuja demanda não é determinística, ou seja, a demanda pode ser descrita probabilisticamente através de sua função densidade de probabilidade conhecida.

Para este tipo de problema será considerado um horizonte de planejamento discreto e finito, com um número discreto de períodos  $NP$ . Períodos podem ser, por exemplo, dias, semanas ou meses.

O tempo entre encomendas  $R$  a ser determinado é modelado como um múltiplo do período  $p$ . Por sua vez, o tempo de reposição ou entrega  $TE$  de cada pedido é definido como um múltiplo do período, sendo fixo e conhecido a priori. A cada encomenda, a quantidade do item a ser solicitada é dada pela diferença entre o nível alvo  $S$  e o estoque físico existente no momento do pedido. Nesse sistema, o primeiro pedido será feito no início do primeiro período ( $p=1$ ) do primeiro ciclo  $R$  e será entregue no tempo  $p+TE$ . Consideramos que os pedidos recebidos no início de um período podem ser consumidos já no mesmo período. Os pedidos devem ser feitos a cada  $R$  períodos à frente, como ilustrado na Figura 1.



**Figura 1** – Tempo entre pedidos e tempo de espera

Os custos relevantes para a determinação dos parâmetros ótimos do sistema  $(R,S)$  são: o custo  $h$  de manter uma unidade do item no estoque por período e o custo fixo  $CF$  de fazer um pedido, que são conhecidos e constantes ao longo do tempo, e independem da quantidade pedida. Toda demanda não atendida será penalizada com um custo de falta  $b$  proporcional à quantidade faltante, independentemente do tempo de falta.

### 3. Formulação matemática

Para modelar o problema de determinar os parâmetros ótimos do sistema  $(R,S)$ , é proposto um modelo baseado em programação estocástica de dois estágios com base em programação não linear inteira mista (MINLP), o qual é linearizado de forma exata. A decisão do primeiro estágio diz respeito à determinação propriamente dos parâmetros  $(R,S)$ . A decisão de segundo estágio é relativa aos níveis dos estoques e às quantidades pedidas ao longo do tempo, que é influenciada diretamente pelas decisões do primeiro estágio e pela realização da incerteza.

Com a abordagem proposta, determinam-se os melhores valores de  $R$  e  $S$  com o objetivo de minimizar os custos relevantes (custo de encomendar, custo de manter o estoque e custo de falta), de modo a satisfazer a demanda e considerar o balanço de massa dos estoques.

A incerteza do modelo é relativa aos níveis da demanda pelo único item proveniente dos clientes, que será modelada como uma variável aleatória que segue uma distribuição de probabilidade normal, com média e desvio-padrão conhecidos. Para resolver o modelo de programação estocástica de dois estágios, será usada uma estratégia de aproximação por amostragem conhecida na literatura como “Sample Average Approximation (SAA)”. A técnica SSA permite que soluções aproximadas do modelo sejam obtidas via simulação para um conjunto grande de cenários da demanda pelo item.

### 3.1. Problema de primeiro estágio

O modelo de programação estocástica do primeiro estágio diz respeito às decisões da periodicidade  $R$  e do nível alvo  $S$  a serem utilizadas no sistema de controle e reposição dos estoques, as quais devem ser tomadas antes da realização da incerteza. Antes de apresentar os modelos desenvolvidos para os dois estágios, segue notação usada para índices, conjuntos, parâmetros e variáveis.

#### Conjuntos e índices

$P$  conjunto de períodos,  $p \in P = \{1, \dots, NP\}$ ;  
 $\Omega$  conjunto de cenários,  $\xi \in \Omega$ , no total de  $N$  cenários distintos.

#### Parâmetros

$b^p$  custo de falta por unidade do item em falta no período  $p$ ;  
 $CF^p$  custo fixo de encomendar o item no período  $p$ ;  
 $D(\xi)^p$  demanda pelo item no cenário  $\xi$  no período  $p$ ;  
 $h^p$  custo de manter em estoque uma unidade do item no período  $p$ ;  
 $\overline{IT}$  superior para a posição total dos estoques do item;  
 $\bar{S}$  limite superior para o nível máximo dos estoques do item;  
 $w_p^r$  parâmetro auxiliar que indica o período em que ocorre uma encomenda;  
dependendo do valor  $r$ ;  $w_p^r \in \{0,1\}$ ;  $r = 1, \dots, NR$ ;  $p = 1, \dots, NP$ .

#### Variáveis

$A(\xi)^p$  demanda atendida no cenário  $\xi$  no período  $p$ ;  
 $F(\xi)^p$  demanda não atendida no cenário  $\xi$  no período  $p$ ;  
 $I(\xi)^p$  posição do estoque físico no cenário  $\xi$  no final do período  $p$ ;  
 $IT(\xi)^p$  posição do estoque total (estoque físico mais pedidos pendentes) no cenário  $\xi$  no final do período  $p$ ;  
 $ITI(\xi)^p$  posição do estoque total (estoque físico mais pedidos pendentes) no cenário  $\xi$  no início do período  $p$ ;  
 $ITIV(\xi)^p$  variável auxiliar para a posição do estoque total (estoque físico mais pedidos pendentes) no cenário  $\xi$  no início do período  $p$ ;  
 $P(\xi)^p$  quantidade encomendada do item no cenário  $\xi$  no início do período  $p$ ;  
 $S$  nível alvo dos estoques do item ao longo do horizonte de tempo;  
 $SV^p$  variável auxiliar para o nível alvo dos estoques do item no período  $p$ ;  
 $v^p$  indica se existe ou não uma encomenda do item no período  $p$ ;  $v^p \in \{0,1\}$ ;  
 $u^r$  variável auxiliar na determinação do tamanho de ciclo  $R$ ;  $u^r \in \{0,1\}$ .

O problema do primeiro estágio é modelado como um problema de programação linear inteira mista dado por:

$$\text{minimizar}_{v^p, S} \quad \sum_p CF^p v^p + E_{\Omega} [Q(R, S, \xi)] \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_r u^r = 1 \quad (2)$$

$$\sum_r w_p^r u^r = v^p \quad \forall p \quad (3)$$

$$0 \leq S \leq \bar{S} \quad (4)$$

$$u^r \in \{0,1\} \quad \forall r \quad (5)$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (6)$$

A expressão (1) modela o custo total das encomendas em função da periodicidade (quanto se deseja investir em fazer encomendas) e do nível máximo de estoque que se deseja ter (quanto se está disposto a investir em estoque). O primeiro termo diz respeito ao somatório dos custos fixos de

encomendar ao longo do horizonte de planejamento considerado, já o termo  $E_{\Omega} [Q(R, S, \xi)]$  representa o valor esperado do custo do problema de segundo estágio. A restrição (2) indica que existe exatamente um único valor para o tamanho de ciclo  $R$  a ser determinado ( $R = r$ , quando  $u^r = 1$ ). Já as restrições em (3) indicam que as encomendas dependem da escolha do valor de  $R$  e que o primeiro pedido ocorre sempre no primeiro período do horizonte de planejamento (de acordo com a definição dos valores de  $w_p^r$ ). As restrições em (4) impõem limite inferior e superior para a variável real que representa o nível máximo dos estoques. Já em (5) e em (6), as variáveis do primeiro estágio são definidas como binárias.

### 3.2. Problema de segundo estágio

O modelo do segundo estágio visa minimizar o custo de manter o estoque e o custo de falta ao longo do horizonte de planejamento, face às escolhas de  $R$  e  $S$  para uma dada realização  $\xi$  do parâmetro incerto, de modo a satisfazer as demandas dos períodos. Para cada cenário  $\xi \in \Omega$ , o problema de segundo estágio é dado por:

$$\text{minimizar } Q(R, S, \xi) = \sum_p h^p I(\xi)^p + b^p F(\xi)^p \quad (7)$$

$$\text{sujeito a } (\xi)^{p-1} + P(\xi)^{p-TE} = I(\xi)^p + A(\xi)^p \quad \forall p \quad (8)$$

$$IT(\xi)^{p-1} + P(\xi)^p = IT(\xi)^p + A(\xi)^p \quad \forall p \quad (9)$$

$$A(\xi)^p + F(\xi)^p = D(\xi)^p \quad \forall p \quad (10)$$

$$P(\xi)^p = (S - IT(\xi)^{p-1}) v^p \quad \forall p \quad (11)$$

$$A(\xi)^p, I(\xi)^p, IT(\xi)^p, P(\xi)^p \geq 0 \quad \forall p. \quad (12)$$

Na expressão (7), o termo  $\sum_p h^p I(\xi)^p$  representa o custo de estocar que considera o nível do estoque físico existente ao final de cada período  $p$ , enquanto que o termo  $\sum_p b^p F(\xi)^p$  representa o custo do não atendimento da demanda. A expressão (8) representa o balanço dos estoques físicos do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . A expressão (9) representa o balanço dos estoques totais (físico + pedidos pendentes) do item de um período para o seguinte, em cada cenário  $\xi$ . A expressão (10) representa o atendimento da demanda em cada período, para cada cenário  $\xi$ . A expressão (11) representa as quantidades a serem pedidas no início de cada período  $p$  para certo cenário  $\xi$ . A expressão (12) representa a não negatividade das variáveis pedido, atendimento, falta, estoque físico e estoque total.

Pode-se notar que a restrição (11) é não linear tornando o modelo um problema MINLP, que é uma classe de problemas tradicionalmente difíceis. Para que o modelo seja possível de ser resolvido, pode-se proceder de duas formas para tornar o problema linear. A primeira forma se dá fixando o valor do ciclo, ou seja, o valor de  $R$ . Quando isto é feito a variável binária  $v^p$  passa a ser um parâmetro fixo e conhecido, tornando linear a expressão (11) do problema. Para encontrar os valores ótimos  $R^*$  e  $S^*$ , teremos que simular uma quantidade finita de estimativas  $R_j^*$ , calcular os respectivos  $S_j^*$  e verificar se o par  $(R_j^*, S_j^*)$  gera o melhor resultado para  $Q(R_j^*, S_j^*, \xi)$ . O grande problema em se proceder desta forma é que, caso se deseje expandir tal solução para um problema seriado considerando apenas duas camadas, ambas com a mesma quantidade finita de  $j = n$  para possíveis valores de  $R$ , tem-se que simular  $n^n$  casos.

De forma a garantir uma solução ótima global foi desenvolvida uma versão exata linearizada do problema que é descrita a seguir. Primeiramente é introduzido  $ITI(\xi)^p$ , variável que representa o estoque total no início do período  $p$  para certo cenário  $\xi$ . Como  $ITI(\xi)^p = IT(\xi)^{p-1}$ , reescreve-se a restrição (11):

$$P(\xi)^p = S v^p - ITI(\xi)^p v^p \quad \forall p$$

A linearização exata da restrição (11) resultou na substituição da expressão (11) pelas expressões (13) a (20), além da introdução das restrições de não negatividade para



$SV^p, ITI(\xi)^p$  e  $ITIV(\xi)^p$ , resultando em um problema de programação linear inteira mista para o modelo do segundo estágio:

minimizar (7)

sujeito a (8) – (10)

$$P(\xi)^p = SV^p - ITI(\xi)^p \quad \forall p \quad (13)$$

$$SV^p \leq \bar{S}v^p \quad \forall p \quad (14)$$

$$SV^p \leq S \quad \forall p \quad (15)$$

$$SV^p \geq S - \bar{S}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (16)$$

$$ITIV(\xi)^p \leq \bar{ITI}v^p \quad \forall p \quad (17)$$

$$ITIV(\xi)^p \leq ITI(\xi)^p \quad \forall p \quad (18)$$

$$ITIV(\xi)^p \geq ITI(\xi)^p - \bar{ITI}(1 - v^p) \quad \forall p \quad (19)$$

$$ITI(\xi)^p = IT(\xi)^{p-1} \quad \forall p \quad (20)$$

$$A(\xi)^p, I(\xi)^p, IT(\xi)^p, ITI(\xi)^p, ITIV(\xi)^p, P(\xi)^p, SV^p, \geq 0 \quad \forall p. \quad (21)$$

Sabendo que o problema de tamanho do lote de produção de um item com capacidade nos recursos de produção (LS-C) é um problema NP-difícil (Pochet e Wolsey (2006)), é possível mostrar que o modelo do 2º estágio pode ser reduzido a um modelo LS-C, e, portanto, mostrar que ele é um problema NP-difícil.

#### 4. Metodologia

Nesta seção, descreve-se a técnica utilizada para representação discreta do fenômeno aleatório contínuo. Além disso, é abordada a metodologia proposta para determinar os valores ótimos de R e S dos parâmetros da política de reposição e estoques utilizada via modelo de programação estocástica de dois estágios. Essa metodologia foi implementada e aplicada a uma instância conhecida para comparar com os resultados numéricos do modelo proposto por Hadley e Whitin (1963).

##### 4.1. Modelo proposto

Problemas de otimização estocástica, em que a representação dos fenômenos estocásticos se comporta de forma contínua, impõe certa dificuldade para se avaliar o valor esperado da função objetivo, tal como em (1). Para contornar essa dificuldade utilizou-se um método baseado em simulação de Monte Carlo, conhecido como “Aproximação por Média Amostral” (Sample Average Approximation - SAA) (Santoso et al., 2005). Além de ser eficaz na discretização do fenômeno estocástico contínuo para programação estocástica de dois estágios (Shapiro, A. e Philpott, A., 2007), o SAA possui outra aplicação importante quando a incerteza se dá de forma discreta. Suponha que sejam considerados 3 valores possíveis para a demanda e 25 períodos ao todo, então teremos  $3^{25}$  cenários possíveis, o que torna uma aplicação computacional intratável.

A principal ideia por trás dessa técnica é buscar aproximar o valor da função objetivo, considerando a média das soluções do problema para uma instância composta por M subconjuntos independentes de N cenários amostrados de forma sucessiva.

Desta forma, a função objetivo do modelo do primeiro estágio pode ser aproximada pelo seguinte problema de SAA:

$$\text{minimizar} \sum_p CF^p v^p + \frac{1}{N} \sum_{n=1, \dots, N} Q(R, S, \xi^n),$$

onde  $Q(R, S, \xi^n)$  é a função objetivo do modelo do segundo estágio a ser avaliada para o cenário  $\xi^n$ .

Para geração dos N cenários utilizou-se a hipótese que a demanda fosse representada por um modelo estacionário:

$$D(\xi)^p = a + \varepsilon^p, \quad \forall p, \forall \xi,$$

onde  $a$  é o nível (constante) da demanda e  $\varepsilon^p$  é o erro do modelo a cada período, que tem média zero e variância  $\sigma^2$ . Para cada cenário  $\xi$  e para cada conjunto de períodos  $p$ , tem-se uma possível curva de demanda. Segundo Santos e Ahmed (2005) o valor mínimo obtido por esta técnica, desde que não seja enviesado, é sempre menor ou igual ao valor mínimo ótimo, podendo assim, ser considerado como o seu limite inferior (LI).

Através da escolha de bons resultados viáveis do primeiro estágio ( $v'^p$  e  $S'$ ), a função objetivo do modelo do primeiro estágio pode ser aproximada pelo seguinte problema de SAA:

$$\text{minimizar } \sum_p CF^p v'^p + \frac{1}{N'} \sum_{n=1, \dots, N'} Q(R', S', \xi^n),$$

onde  $N'$  é o tamanho da amostra independente da amostra  $N$  usada para o cálculo de ( $v'^p$  e  $S'$ ). Pode-se ter  $N'$  muito maior que  $N$ , pois neste caso está se resolvendo  $N'$  subproblemas determinísticos independentes do segundo estágio. Linderoth et al. (2006) mostram que usando esta técnica é possível obter limites superiores e inferiores para o valor mínimo ótimo. E que tais limites convergem para o valor ótimo na medida em que se aumenta o valor de  $N$ . Neste caso em particular, como é possível obter o valor mínimo ótimo para uma instância conhecida do problema, o mesmo será assumido como sendo o limite superior. É bom ressaltar que esta aproximação nem sempre é possível, dado que nem sempre se conhece o valor ótimo de uma instância. A ideia é usar HW para validar o modelo proposto.

Pelo Teorema do Limite Central, pode-se construir um intervalo de confiança (IC) para LI. Para um dado nível de confiança  $\alpha$  (onde  $P(z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ ) o IC pode ser expresso como  $\left[LI - \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{M}}, LI + \frac{z_\alpha \sigma}{\sqrt{M}}\right]$ , onde  $\sigma^2$  é um estimador da variância da solução do problema. Como resultado da técnica SAA, além dos limites, foram calculados o gap de otimalidade e a solução associada a ele. Neste caso, o gap de otimalidade foi assumido como a diferença entre o valor verdadeiro e o LI (que é a solução do problema proposto resultante da média de  $M$  experimentos). Mais uma vez, como o limite superior é o valor verdadeiro,  $\sigma^2$  é o próprio estimador da variância do gap de otimalidade.

Existem algumas formas de se estimar o número de cenários para se obter um valor que se aproxima do ótimo com uma determinada margem de erro, (Kleywegt et al., 2002, Shapiro e Homem-de-Melo, 1998). Porém, neste trabalho, mais uma vez, como temos o valor verdadeiro da solução ótima, foram simulados valores de  $N$  variando de 10 em 10 cenários, começando com 10 e terminando até que o gap de otimalidade se tornasse próximo de 1%.

## 5. Resultados numéricos

O modelo de programação estocástica de dois estágios e a rotina de simulação de cenários via técnica SAA foram implementados no pacote AIMMS 3.13. O MILP foi resolvido pelo solver CPLEX versão 12.5 instalada no pacote. Os resultados numéricos foram obtidos usando um Processador AMD Duo-Core 1.90 GHz com 4 GB de RAM.

De forma a avaliar o modelo sob diferentes condições foram considerados 3 valores do número de cenários,  $N = 10, 20$  e  $30$ , suficientes para garantir um gap médio de otimalidade próximo de 1%, conforme demonstrado na Tabela 4. Para cada valor de  $N$  foram considerados 3 valores do número de períodos  $NP = 18, 30$  e  $42$ , onde período representa mês. Para reduzir a influência da inicialização do modelo no resultado, desconsiderou-se os 6 primeiros períodos. Desta forma, considerou-se respectivamente 1 ano, 2 anos e 3 anos para análise do custo. A Tabela 1 descreve resumidamente o tamanho das instâncias do equivalente determinístico que foram resolvidas, assim como o esforço computacional necessário para resolvê-las em termos de uso de CPU e memória.



Tabela 1. Tamanho das instâncias resolvidas por PE

N	P	Total de variáveis	Total de restrições	Tempo (s)	Memória usada (Mb)
10	18	1700 (28 inteiras)	2087	0,59	93,8
	30	2804 (40 inteiras)	3455	0,56	98,6
20	42	3908 (52 inteiras)	4823	0,9	97,7
	18	3350 (28 inteiras)	4097	1,56	97,7
	30	5534 (40 inteiras)	6785	1,98	100
	42	7718 (52 inteiras)	9473	1,93	101,4
30	18	5000 (28 inteiras)	6107	3,18	98,2
	30	8264 (40 inteiras)	10115	3,74	100,6
	42	11528 (52 inteiras)	14123	4,06	102,6

Além disso, foram considerados, para cada N cenários e NP períodos, 4 valores do custo fixo de encomendar, CF= 25, 50, 75 e 150. Para cada valor de CF foram considerados 3 valores do custo de manter uma unidade do item em estoque por período, h= 0,2, 0,4 e 0,6. O custo de falta b foi considerado igual a 25. O tamanho do ciclo R é um múltiplo do tamanho do período e pode variar de 1 até 10 meses (NR = 10). A demanda pelo item segue uma distribuição normal com média igual a 50 e variância igual a 75 em cada período. As demandas mensais apresentam a mesma média e o mesmo desvio-padrão e ainda é admitido que não existe autocorrelação entre as demandas mensais. O tempo de entrega TE foi considerado fixo igual a 2 períodos. Para cada conjunto de dados (NP,N,CF,h) o experimento foi executado para 10 amostras independentes de N cenários.

O resultado do modelo de programação estocástica de dois estágios foi comparado com o método proposto (HW) em Hardley e Within (1963) em instâncias consideradas neste mesmo trabalho. A Tabela 2 mostra os resultados comparativos dos custos mínimos e os percentuais dos erros dos custos mínimos médios gerados pelo método PE tendo por correto os resultados dos custos mínimos obtidos com o método HW, para cada conjunto (NP,N,CF,h). A fórmula do erro é dada por

$$\text{Erro absoluto \%} = \left| \frac{\text{Custo mínimo por HW} - \text{custo mínimo médio por PE}}{\text{Custo mínimo por HW}} \right| \times 100 \quad (22)$$

Tabela 2. Comparativo dos custos e erros absolutos percentuais obtidos por HW e PE

Número de Períodos		18						30						42																	
Número de Cenários		10		20		30		10		20		30		10		20		30													
CF	h	Custo HW		Custo esperado PE / Erro absoluto %																											
25	0,2	374	364	363	369	365	366	374	372	368	371	576	560	560	569	556	566	573	565	579	570	734	706	707	713	712	718	716	709	720	723
	0,4	489	471	488	485	483	487	483	482	486	486	726	708	714	700	714	718	715	721	721	721	919	909	898	890	889	911	912	906	905	908
	0,6	579	573	572	580	575	584	580	579	579	580	853	820	839	839	837	838	836	835	848	848	1069	1038	1062	1040	1060	1052	1054	1050	1057	1060
75	0,2	778	797	810	802	781	792	795	783	788	793	1129	1141	1135	1132	1124	1140	1138	1145	1132	1138	1406	1353	1376	1384	1378	1393	1393	1383	1391	1397

A Tabela 3 mostra os resultados comparativos de S\* obtidos pelos métodos HW e PE. Como foram realizadas 10 execuções do método PE para cada instância, na comparação foi usado o valor médio obtido para S\*. A Tabela 3 mostra também os percentuais dos erros dos valores médios de S ótimo obtidos por PE em relação a WH, para cada conjunto (NP,N,CF,h). A fórmula do erro percentual no cálculo de S é semelhante à formula do erro percentual aplicada para o custo mínimo (22).

Tabela 3. Comparativo de  $S^*$  e erros absolutos percentuais obtidos por HW e PE

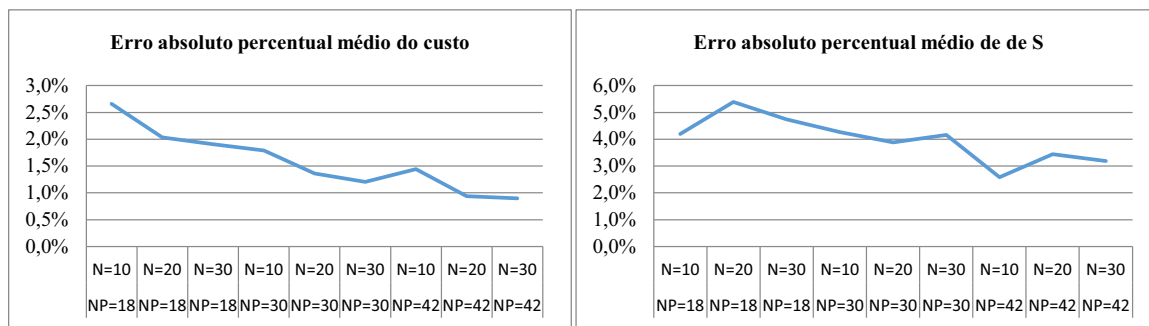
Número de Períodos			18						30						42					
Número de Cenários			10		20		30		10		20		30		10		20		30	
CF	h	$S^*$ HW	S médio PE / Erro absoluto %																	
25	0,2	237	238	0,4	250	5,3	250	5,2	247	4,0	236	0,3	241	1,8	237	0,0	236	0,4	235	1,0
	0,4	232	219	5,6	224	3,5	231	0,6	230	0,9	230	1,1	232	0,1	231	0,5	232	0,2	229	1,2
	0,6	180	182	1,2	180	0,5	176	2,2	177	1,7	177	1,7	176	2,1	177	1,7	177	1,7	178	1,2
50	0,2	288	287	0,3	288	0,0	287	0,5	291	0,9	288	0,1	286	0,8	288	0,2	288	0,2	287	0,4
	0,4	232	234	0,7	236	1,6	228	1,8	231	0,5	235	1,1	235	1,1	230	0,9	229	1,4	231	0,5
	0,6	229	226	1,2	227	0,9	225	1,5	225	1,7	227	0,8	227	0,6	225	1,5	227	1,0	227	0,9
75	0,2	339	294	13,3	285	16,1	286	15,7	292	14,1	296	12,8	286	15,8	316	6,9	311	8,3	306	9,9
	0,4	282	278	1,3	272	3,6	273	3,3	280	0,7	279	1,2	279	1,3	279	1,0	278	1,4	280	0,8
	0,6	229	235	2,7	225	1,5	224	2,2	232	1,4	226	1,2	226	1,3	225	1,5	226	1,4	227	0,8
150	0,2	390	418	7,3	442	13,3	420	7,7	429	10,0	431	10,6	427	9,5	418	7,1	438	12,4	439	12,5
	0,4	332	282	15,1	277	16,7	282	15,0	291	12,5	284	14,6	283	14,7	305	8,2	293	11,8	304	8,5
	0,6	278	275	1,3	273	1,8	275	1,2	271	2,7	275	1,1	276	0,8	274	1,6	275	1,0	276	0,8

A Tabela 4 mostra o erro percentual médio para  $NP=42$  e  $N$  variando de 10 a 90. Os Gráficos 1.a e 1.b apresentam as médias dos valores para cada conjunto  $(NP,N)$ .

Tabela 4. Erro absoluto percentual médio do custo para  $NP=42$

Número de Períodos	42								
Número de Cenários	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Erro absoluto % médio do custo	1,4	0,9	0,9	1,1	1,0	1,0	1,1	1,1	1,0

Gráfico 1. Erro absoluto percentual



(a) custo mínimo

(b) S ótimo

Pode-se observar na Tabela 2 que para alguns casos os valores do custo esperado PE são maiores que o custo do modelo HW, como, por exemplo, no caso onde  $NP=30$ ,  $CF=150$  e  $h=0,2$ . Para justificar este comportamento observou-se os valores de  $R$  do modelo HW e os valores de  $R$  sugeridos pelo modelo PE. Os valores de  $R$  sugeridos pelo modelo PE na sua maioria é 6 quando na verdade deveria ser 5 (resultado do modelo HW). Ao se analisar, por exemplo, para  $NP=30$  (24 períodos) e  $R=5$ , o número de pedidos feitos considerando o modelo HW é  $24/5=4,8$ . Já considerando o modelo PE o número de pedidos feitos é 5. Isto gera um impacto de 20% sobre o valor de um CF. Já para o caso de  $NP=30$  e  $R=6$  o número de pedidos considerando os dois modelos é igual a 4. Este impacto faz com que no modelo PE o custo total para  $R=6$  se torne menor que para  $R=5$  quando na verdade deveria ser o inverso. Isto indica que nestes casos os valores do custo

esperado PE são estimadores viesados do LI. Este efeito se torna mais atuante para os casos onde o CF é maior. Este viés pode ser minimizado na medida em que se aumenta o NP. Por exemplo, para o caso de NP=90, o valor de R sugerido PE foi igual a 5, o erro do custo foi de 0,9% e o erro do S foi de 0,5%.

Como a relação entre R e S é dada pela equação  $S = D(R + TE) + z\sigma_{R+TE}$  (Hadley e Whitin, 1963), nota-se que quanto maior o R maior será o S. Consequentemente, um erro no valor de R implica num erro no valor de S. Este efeito pode ser observado também analisando a Tabela 3 onde os resultados referentes aos conjuntos (CF,h) iguais a (75, 0,2), (150, 0,2) e (150, 0,4) tiveram um erro muito grande de S. Verifica-se também que estes erros grandes associados a S pouco influenciam nos valores mínimos do custo total (tabela 2 e Tabela 3). Para justificar este comportamento, analisou-se os valores do custo mínimo no entorno dos valores de R ótimo WH. Os casos em que os valores de R variaram muito são aqueles em que a variação dos valores do custo mínimo são menores. Isto justifica o pequeno impacto que esta variação de S tem sobre o custo mínimo.

Conforme observado nos Gráfico 1.a o aumento de NP e N impactam na redução do erro absoluto percentual do custo mínimo. Ao analisar o Gráfico 1.b, verifica-se que o impacto de NP e N na redução do erro absoluto percentual de S ótimo é parecido com o caso anterior. Analisando os resultados dos erros percentuais do custo mínimo na medida em que se varia CF e h, nota-se que não existe um padrão de comportamento definido para o conjunto de instâncias consideradas.

## 6. Conclusão

Neste trabalho, os parâmetros do sistema de controle e reposição de estoques (R,S) foram determinados para uma rede logística de uma camada de um único item com demanda incerta via programação estocástica. Para simular os cenários da demanda foi aplicada a técnica SAA. Resultados numéricos foram apresentados e comparados com instâncias do problema encontradas na literatura.

Os resultados mostram que, para um horizonte de planejamento de 42 períodos, considerando 30 cenários para a demanda, o modelo proposto gerou erro médio de 0,9% no custo mínimo, mesmo para um número pequeno de períodos e de cenários. Conforme esperado, observou-se que, quanto maior o número de períodos e de cenários, maior é a redução do erro no custo mínimo, e que o aumento do número de períodos é mais impactante que o aumento do número de cenários.

Neste trabalho, demonstrou-se que é possível, via programação estocástica, definir os parâmetros ótimos (R,S) de um sistema de controle de reposição periódica para uma rede logística de uma camada, considerando um único item com demanda incerta. Os valores de custo mínimo obtido, considerando 30 cenários e 42 períodos, gerou um gap de otimalidade em torno de 1%. Os conceitos aqui apresentados são de grande valia para situações onde não existam soluções fechadas, principalmente nos casos de sistemas logísticos multicamadas onde, além da definição dos parâmetros (R,S) referentes a política de controle, existem definições a respeito de instalações e operações.

## Referências

- Axsater, S.** (1996), Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control. *Management Science*, 42, 830–834.
- Axsater, S.**, *Inventory Control*. 2nd. ed. New York: Springer, 2006.
- Clark, A. e Scarf, H.** (1960), Optimal policies for a multi-echelon inventory problem. *Management Science*, 6(4) 475–490.
- Bertsimas, D. e Thiele, A.** (2006), A Robust Optimization Approach to Inventory Theory, *Operations Research*, 54(1), 150–168.

- Daskin, M.S., Coullard, C. e Shen Z.-J.M.** (2002), An inventory-location model: formulation, solution algorithm and computational results. *Ann. Oper. Res.*, 110, 83–106.
- Federgruen, A. e Zipkin, P.H.** (1984), Computational issues in an infinite-horizon, Multiechelon Inventory Model. *Oper. Res.*, 32, 818–836.
- Gupta, A. e Maranas, C.D.** (2000), A Two-Stage Modeling and Solution Framework for Multisite Midterm Planning Under Demand Uncertainty. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 39, 3799–3813.
- Hadley, G. e Whitin, T.M.**, *Analysis of Inventory Systems*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1963.
- Kleywegt, A., Shapiro, A. e Homem-de-Melo T.** (2002), The sample average approximation method for stochastic discrete optimization. *SIAM J. Optim.*, 12, 479–502.
- Linderoth, J., Shapiro, A. e Wright, S.** (2006) The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming. *Ann. Oper. Res.*, 142, 215–241.
- Minner S.** (2001), Strategic safety stocks in reverse logistics supply chains. *Int J Prod Econ.*, 71, 417–428.
- Nahmias, S.**, *Production and Operations Management*. 3. ed. Irwin, Chicago, IL, 1997.
- Oliveira, F. e Hamacher, S.** (2012), Optimization of the petroleum product supply chain under uncertainty: A case study in northern Brazil. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(11), 4279–4287.
- Oliveira, F., Gupta, V., Hamacher, S. e Grossmann, I.E.** (2013), A Lagrangean decomposition approach for oil supply chain investment planning under uncertainty with risk considerations. *Computers & Chemical Engineering*, 50(3), 184–195.
- Rosa, H.; Mayerle, S. F.; Gonçalves, M. B.** (2010), Controle de estoque por revisão contínua e revisão periódica: uma análise comparativa utilizando simulação. *Produção*, 20(4).
- Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M. e Shapiro, A.** (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *Eur. J. Oper. Res.*, 167, 96–115.
- Shapiro, A. e Philpott, A.**, *A Tutorial on Stochastic Programming*, (<http://www.cse.iitd.ernet.in/~Naveen/courses/CSL866/TutorialSP.pdf>), 2007.
- Shapiro, A., Homem-de-Mello, T. (1998) A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse. *Math. Program*, 81, 301–325.
- Shen Z.-J.M., Coullard, C. e Daskin, M.S.** (2003), A joint location-inventory model. *Transp. Sci.*, 37, 40–55.
- Silver, E.A. e Peterson, R.** *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*. 2. ed. New York, NY, John Wiley & Sons, 1985.
- Silver, E.A., Peterson, R. e Pyke, D.F.** *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*. 3. ed. New York, NY, John Wiley & Sons, 1998.
- You, F. e Grossmann, I.E.**, *Integrated Multi-Echelon Supply Chain Design with Inventories under Uncertainty: MINLP Models, Computational Strategies*. Published online September 15th, in Wiley InterScience, 2009.
- You, F. e Grossmann, I.E.** (2008), Mixed-integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 47, 7802–7817.
- Zipkin, P.H.**, *Foundations of Inventory Management*. Boston, MA: McGraw-Hill, 2000.