

Limites Duais para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Privada e Entrega Terceirizada

Fernando Afonso Santos

Universidade Federal de Itajubá – Campus Itabira
Rua Irmã Ivone Drummond, 200 - Distrito Industrial II - Itabira - MG, CEP 35903-087
fernandosantos@unifei.edu.br

Geraldo Robson Mateus

Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha - Belo Horizonte - MG, CEP 31270-901
mateus@dcc.ufmg.br

RESUMO

O Problema de Roteamento de Veículos com Frota Privada e Entrega Terceirizada é uma variação do Problema de Roteamento de Veículos clássico na qual a demanda de um consumidor pode ser atendida de duas formas: através da visita de um veículo da frota ou utilizando um serviço de entrega terceirizada, pagando-se um custo fixo. Este artigo apresenta um modelo matemático para a solução deste problema e, devido a este modelo contar com um número exponencial de variáveis, é apresentado também um algoritmo de geração de colunas para avaliar seus limites de Programação Linear. Os resultados computacionais mostram que o *gap* de dualidade é pequeno entre os limites avaliados e as soluções primais disponíveis na literatura para este problema. O *gap* médio para todas as instâncias avaliadas foi de 2.15%, sendo que para uma destas instâncias o limite avaliado foi exatamente o valor da solução ótima.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Roteamento de Veículos, Serviços de Entregas Terceirizadas, Algoritmo de Geração de Colunas

ABSTRACT

The Vehicle Routing Problem with Private Fleet and Common Carriers is a variant of the classical Vehicle Routing Problem on which a given customer demand may be met by two approaches: using a vehicle from the private fleet or using a common carrier service, under a fixed cost. This paper introduces a mathematical model for such a problem, which comprises an exponential number of variables. For evaluating its linear programming lower bounds we implemented a column generation algorithm. The computational results show a small duality gap between the evaluated lower bounds and upper bounds from previous studies on the literature. To be more specific, the average duality gap is 2.15% for the role instance sets evaluated. In addition, the lower bound evaluated for one of such instances is exactly the optimal value.

KEYWORDS. Vehicle Routing Problem, Common Carriers, Column Generation

1. Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem* - VRP) é um dos problema mais estudados em Pesquisa Operacional, devido à sua ampla importância no transporte de mercadorias. Ele foi introduzido por Dantzig e Ramser (1959) e, desde então, diferentes versões deste problema foram propostas para abranger outros contextos de roteamento, que surgem na distribuição de mercadorias. Entre algumas destas versões é possível citar o VRP com restrição de distância (Laporte et al., 1984), o VRP com janelas de tempo (Pullen e Webb, 1967), o VRP com coleta e entrega (Savelsbergh e Sol, 1995) e o VRP com *Cross-Docking* (Santos et al., 2012).

No VRP (e na maioria de suas variações), as soluções viáveis são compostas por veículos que visitam todos os consumidores do problema, a fim de coletar/entregar mercadorias. No entanto, em alguns cenários de roteamento esta restrição pode ser relaxada. Este é o caso do TSP com coleta de prêmios (Balas, 1989, 1995), do *Team Orienteering Problem* (Chao et al., 1996) e do VRP com coletas e entregas seletivas (Gribkovskaia et al., 2008). A estrutura básica destes problemas consiste em associar um lucro (ou prêmio) ao atendimento de cada consumidor. Soluções ótimas podem incluir rotas que não visitem todos os consumidores do problema, desde que isto seja conveniente para minimizar os custos (ou maximizar os lucros).

Este artigo aborda uma outra variação do VRP na qual a restrição que os veículos da frota devem visitar todos os consumidores é relaxada. Esta variação consiste em permitir que um agente externo (neste caso, uma empresa terceirizada de serviços de entrega) satisfaça a demanda dos consumidores, quando isto for economicamente conveniente, ao invés de utilizar veículos da frota. Esta alternativa de roteamento se mostra interessante por dois motivos: (i) o custo das soluções pode ser reduzido, dependendo de como os custos dos serviços de entrega se comparam ao custo dos arcos no atendimento a um dado consumidor; (ii) os veículos da frota privada podem não ser suficientes para atender a demanda dos consumidores em certos períodos (as demandas de certas empresas podem ser sazonais, variando ao longo do ano). Neste caso, parte da demanda seria delegada a estes serviços de entrega para tornar as soluções viáveis.

O problema acima é denominado na literatura como *Vehicle Routing Problem with Private Fleet and Common Carriers* (VRPPC) e consiste em selecionar quais consumidores serão atendidos por serviços terceirizados de entrega, além de estabelecer rotas para visitar os demais consumidores a serem atendidos pela frota privada de veículos. As rotas dos veículos da frota devem iniciar no depósito, visitar no máximo uma vez cada consumidor respeitando a capacidade dos veículos e retornar para o depósito. Já o atendimento dos consumidores por serviços terceirizados usualmente é feito ponto-a-ponto, sendo atribuído um custo fixo de visita a cada consumidor. A demanda de um consumidor deve ser atendida integralmente ou por um veículo da frota ou pelo serviço de entrega, não sendo permitidas entregas parciais.

A integração do VRP clássico com serviços terceirizados de entregas foi inicialmente proposta por Ball et al. (1983). Os autores abordaram o problema de planejar a frota privada tendo disponíveis os serviços de entrega para atender a demanda dos consumidores. Estudos similares foram conduzidos por Klinecicz et al. (1990), porém foram consideradas demandas aleatórias ao longo de um horizonte de tempo.

O primeiro trabalho a considerar decisões de roteamento integradas aos serviços de entrega foi proposto por Agarwal (1985). No entanto, o autor considera que todos os veículos da frota devem ser usados no roteamento (por esse motivo, custos fixos associados

ao uso dos veículos foram negligenciados). Uma outra variação foi proposta por Diaby e Ramesh (1995), que considera o TSP integrado aos serviços de entrega, um problema que se assemelha a um TSP com coleta de prêmios.

O VRPPC em seu formato atual foi introduzido por Chu (2005) motivado por um problema em uma companhia de logística. Neste problema, a frota de veículos é heterogênea e cada veículo está associado a um custo fixo (que deve ser pago caso o veículo seja utilizado no roteamento) e um custo variável (que depende da distância percorrida). Os custos de entrega terceirizada são atribuídos independentemente a cada consumidor. Para a solução do problema foi implementada uma heurística que modifica a heurística das economias de Clarke e Wright (1964). Foram apresentados resultados para um conjunto limitado de instâncias, contendo até 29 consumidores.

O trabalho de Chu despertou o interesse da comunidade acadêmica pelo VRPPC e, após ele, diferentes autores apresentaram novas heurísticas para o problema. Bolduc et al. (2007), Bolduc et al. (2008), Côté e Potvin (2009), Potvin e Naud (2011) e Kratica et al. (2012) exploraram diferentes meta-heurísticas, como Busca Tabu e Algoritmos Genéticos, para avaliar soluções primais para o problema. Além disso, novos conjuntos de instâncias mais abrangentes (contendo até 483 consumidores) foram propostos.

Uma observação que deve ser feita quanto aos trabalhos relacionados ao VRPPC é que nenhum deles apresentou estudos de métodos exatos para solucionar o problema. Apenas uma formulação matemática, baseada em fluxo de redes, foi proposta por Bolduc et al. (2008). A solução desta formulação foi realizada por um pacote comercial de otimização que foi capaz de resolver apenas instâncias de tamanho reduzido (até 22 consumidores) em um intervalo de tempo de até 150 horas. Por este motivo, este artigo apresenta um estudo inicial sobre soluções exatas para o VRPPC. É apresentada uma formulação matemática baseada em *set partitioning* que contém um número exponencial de variáveis e um algoritmo de geração de colunas para avaliar seus limites de Programação Linear (PL).

O resto deste artigo tem a seguinte estrutura. A formulação matemática para o VRPPC é apresentada na seção 2, enquanto na seção 3 aborda-se como os limites de PL desta formulação são avaliados através de um algoritmo de geração de colunas. Os resultados computacionais são apresentados na seção 4. Por fim, a seção 5 apresenta as considerações finais e também discussões sobre trabalhos futuros.

2. Formulação Matemática

Esta seção está organizada em duas subseções. Na primeira o VRPPC é formalmente apresentado, enquanto na segunda introduz-se o modelo matemático que compreende um número exponencial de variáveis.

2.1. Definição do Problema

Assuma que $G = (V, A)$ denote um dígrafo com conjunto de vértices $V = \{0\} \cup C$, onde o vértice 0 denota o depósito e o conjunto $C := \{1, \dots, n\}$ contém os vértices que representam os consumidores do problema. Cada consumidor $i \in C$ está associado a uma demanda indivisível $d_i > 0$. Considere que o conjunto de arcos $A := \{(i, j) : i, j \in V : i \neq j\}$ inclua todos os arcos conectando os consumidores entre si e estes ao depósito.

Considere também que o conjunto \mathcal{K} denote uma frota heterogênea de $m = |\mathcal{K}|$ veículos. A cada veículo $k \in \mathcal{K}$ associa-se dois valores: Q_k define sua capacidade e f_k é o custo fixo a ser pago caso o veículo k seja usado no roteamento. Além disso, sempre que um arco $(i, j) \in A$ for percorrido pelo veículo k na solução, um custo $c_{ij}^k \geq 0$ deve ser pago. Os custos dos arcos satisfazem a desigualdade triangular.

Suponha que uma ou mais empresas estejam disponíveis para prestar serviços de entrega de cargas. Para cada consumidor $i \in C$ é definido um custo fixo de atendimento e_i . Como as demandas d_i não podem ser divididas, um dado consumidor deve ser atendido unicamente ou por um veículo da frota privada ou por uma empresa de entregas. Neste sentido, o VRPPC consiste em particionar o conjunto C em dois subconjuntos disjuntos S_E e S_V ($C := S_E \cup S_V$, $S_E \cap S_V = \emptyset$), além de definir rotas que visitem uma única vez os consumidores do subconjunto S_V sem exceder a capacidade dos veículos. No VRPPC, procura-se pela solução de custo mínimo, considerando os custos de roteamento e os custos de atendimento pelos serviços de entrega.

A Figura 1 ilustra um exemplo de solução para o VRPPC em um grafo contendo 10 consumidores, além do depósito. A frota privada é composta por três veículos, que devem atender as demandas do subconjunto $S_V = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Já os consumidores do subconjunto $S_E = \{3, 10\}$ terão suas demandas atendidas por serviços terceirizados de entrega.

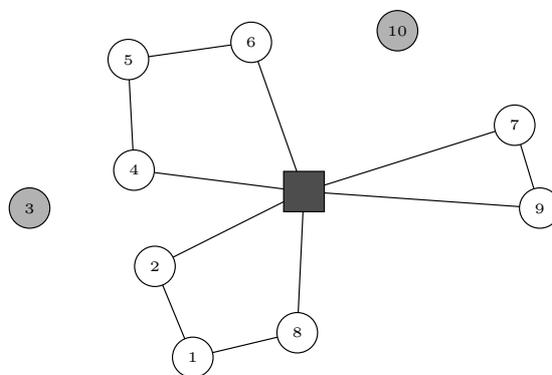


Figura 1: Exemplo de solução para o VRPPC contendo 10 consumidores e o depósito

Note que, a estrutura do VRPPC depende de como os custos de roteamento se comparam aos custos fixos dos serviços de entrega. Por um lado, se os custos dos arcos são muito maiores que os custos impostos pelas empresas terceirizadas, as soluções tendem a incluir poucos (ou nenhum) veículos da frota privada. Por outro lado, quando os custos das empresas são muito maiores que os dos arcos, as soluções evitarão incluir as entregas terceirizadas (exceto para manter a viabilidade das soluções) e o VRPPC, neste caso, será similar ao VRP.

2.2. Modelo de Programação Linear Inteira

Assuma que R^k denote o conjunto de todas as q -rotas que o veículo $k \in \mathcal{K}$ seja capaz de executar. Uma q -route é uma rota que inicia no depósito, visita um subconjunto de vértices $S_q \subseteq C$ e retorna ao depósito sem exceder a capacidade do veículo (Christofides et al., 1981). A diferença entre uma q -route e uma rota convencional é que a primeira pode visitar mais de uma vez o mesmo vértice do subconjunto S_q . No entanto, devido aos custos dos arcos satisfazerem a desigualdade triangular, qualquer solução ótima conterá apenas q -rotas que visitam apenas uma vez cada vértice. Portanto, nas soluções ótimas, q -rotas e rotas são equivalentes. Assuma também que o conjunto $E = \mathcal{P}(C)$ seja o conjunto das partes de C e armazene todos os subconjuntos possíveis para S_E . A cada subconjunto $e \in E$ associa-se um custo c_e dado pela soma dos custos fixos dos consumidores que pertencem ao subconjunto. Similarmente, para cada rota $r \in R^k$ associa-se um custo c_r dado pela soma dos seus arcos mais o custo fixo f_k , a ser incluído por se utilizar o veículo k na solução.

Considere que seja dado um parâmetro inteiro a_{ir} que determina a quantidade de vezes que o vértice $i \in C$ é visitado em $r \in R^k$. Analogamente, considere que o parâmetro binário b_{ie} assume valor 1 se o consumidor i está presente no subconjunto $e \in E$, caso contrário seu valor será 0.

No modelo, foram usados dois conjuntos de variáveis de decisão binárias: λ_r^k é usado para modelar quando a rota $r \in R^k : k \in \mathcal{K}$ é selecionada ($\lambda_r^k = 1$) ou não ($\lambda_r^k = 0$) para a solução; δ_e representa se o subconjunto $e \in E$ será atendido por empresas terceirizadas ou não, assumindo respectivamente valor 1 ou 0. O modelo de programação linear inteira para o VRPPC é descrito a seguir.

$$\min \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{r \in R^k} c_r^k \lambda_r^k + \sum_{e \in E} c_e \delta_e \quad (1)$$

$$\sum_{r \in R^k} \lambda_r^k \leq 1 \quad k \in \mathcal{K} \quad (2)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{r \in R^k} a_{ir} \lambda_r^k + \sum_{e \in E} b_{ie} \delta_e = 1 \quad i \in C \quad (3)$$

$$\lambda \in \mathbb{B}^{m|R|}, \delta \in \mathbb{B}^{|E|}. \quad (4)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total de distribuição, ou seja, o custo de roteamento mais o custo das entregas terceirizadas. As restrições (2) asseguram que o veículo k execute no máximo uma rota do conjunto R^k , enquanto as restrições (3) garantem que a demanda de cada consumidor será satisfeita exatamente ou por um veículo ou pela empresa de entregas. O espaço das variáveis de decisão é definido nas restrições (4).

Embora o modelo (1)-(4) seja definido para frotas heterogêneas de veículos, ele pode claramente ser usado para solucionar problemas com frotas homogêneas sem quaisquer modificações. No entanto, pode ser conveniente modificá-lo a fim de torná-lo mais eficiente na solução de problemas com frotas homogêneas. Isto pode ser feito substituindo-se os m conjuntos de q -routes $R^k : k \in \mathcal{K}$ por um único conjunto R , que contenha todas as q -routes que qualquer veículo da frota possa executar. Consequentemente, será necessário substituir no modelo as variáveis $\lambda_r^k : k \in \mathcal{K}, r \in R^k$ por $\lambda_r : r \in R$, além de substituir as m restrições (2) por uma única restrição $\sum_{r \in R} \lambda_r \leq m$. Desta forma, obtém-se um modelo equivalente com menos variáveis e restrições.

Na próxima seção, serão descritos os procedimentos para avaliar os limites de PL do modelo (1)-(4) para frotas heterogêneas. Tais procedimentos podem ser facilmente generalizados para o caso de frotas homogêneas. De fato, a única modificação relevante consiste em eliminar os índices k nos conjuntos de rotas, variáveis e restrições.

3. Avaliação dos limites de PL do modelo (1)-(4) por Geração de Colunas

A avaliação dos limites de PL de um modelo consiste basicamente em relaxar a integralidade de suas variáveis de decisão e então alcançar a solução ótima do modelo relaxado. Entretanto, como o modelo (1)-(4) contém um número exponencial de variáveis, mesmo após relaxar a integralidade de suas variáveis, a avaliação dos seus limites de PL pode ser inviável para problemas de médio e grande porte. Para contornar este problema será implementado um algoritmo de Geração de Colunas (GC), que permite que os limites de PL de um determinado modelo sejam avaliados sem considerar explicitamente todas as variáveis do modelo. Ao invés disto, apenas aquelas variáveis com um custo atrativo são consideradas através de uma estratégia de precificação de variáveis. Abaixo será apresentado o algoritmo de GC para avaliar os limites de PL do modelo (1)-(4).

Suponha que seja obtido um Problema Master Restrito (PMR) ao relaxar a integralidade das variáveis λ e δ no modelo (1)-(4) e substituir os conjuntos $R^k : k \in \mathcal{K}$ e E por subconjuntos de menor cardinalidade $\hat{R}^k \subset R^k : k \in \mathcal{K}$ e $\hat{E} \subset E$ ($|\hat{R}^k| \ll |R^k|$ e $|\hat{E}| \ll |E|$). Assuma que uma solução básica viável para o PMR exista e que este problema restrito tenha sido resolvido na otimalidade.

Agora, considere associar variáveis duais ótimas $\alpha_k \in \mathbb{R}^- : k \in \mathcal{K}$ e $\beta_i \in \mathbb{R} : i \in C$ respectivamente às restrições (2) and (3). A representação dual do PMR é dada por (5)-(8):

$$\max \sum_{k \in \mathcal{K}} \alpha_k + \sum_{i \in C} \beta_i \quad (5)$$

$$\alpha_k + \sum_{i \in C} a_{ir} \beta_i \leq c_r^k \quad k \in \mathcal{K}, r \in \hat{R}^k \quad (6)$$

$$\sum_{i \in C} b_{ie} \beta_i \leq c_e \quad e \in \hat{E} \quad (7)$$

$$\alpha_k \in \mathbb{R}^-, \beta_i \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

A precificação de variáveis para serem incluídas no PMR é feita através da avaliação de dois subproblemas: (i) identificar restrições violadas (6) procurando por *q-routes* nos conjuntos $R^k \setminus \hat{R}^k : k \in \mathcal{K}$ e (ii) avaliar novos conjuntos de consumidores em $E \setminus \hat{E}$ que levem a restrições (7) violadas. Para cada restrição violada encontrada pelo algoritmo de GC, uma nova variável é incluída no PMR, que deve ser reotimizado. Assim, uma nova iteração do algoritmo de GC será executada, procurando por novas rotas e conjuntos de consumidores que contribuam para que o custo do PMR seja reduzido. Quando não existirem mais restrições duais (6) e (7) violadas, o algoritmo de GC termina sua execução e o valor do PMR é o limite de PL do modelo (1)-(4).

3.1. Subproblemas de CG

O subproblema de GC (i) consiste em encontrar *q-routes* em $R^k \setminus \hat{R}^k$ que violem as restrições duais (6). Este subproblema deve ser resolvido para cada veículo $k \in \mathcal{K}$. Para isto, monta-se um grafo auxiliar $\hat{G} = (V, A)$. Este grafo contém o mesmo conjunto de vértices e arcos do grafo original, no entanto, os custos dos arcos são modificados para $\hat{c}_{ij}^k := -c_{ij}^k + \beta_j$. Desta forma, o subproblema consiste em procurar por *q-routes* em \hat{G} cujo custo seja menor que $-\alpha_k$.

O problema de otimização de encontrar *q-routes* de custo mínimo em um grafo com arcos de custos negativos foi resolvido por Christofides et al. (1981), usando um algoritmo de Programação Dinâmica. Este algoritmo tem complexidade pseudo-polinomial $O(nQ^k)$ e apresenta bom desempenho mesmo para valores elevados de n e Q^k . Por este motivo, este algoritmo foi implementado para a solução do subproblema (i).

O subproblema (ii) consiste em encontrar consumidores cujo atendimento por entregas terceirizadas seja economicamente conveniente. Desta forma, procura-se por subconjuntos de consumidores em $E \setminus \hat{E}$ que violem as restrições duais (7). Isto é feito selecionando consumidores tais que $e_i - \beta_i < 0$. Desta forma, assegura-se que serão selecionados apenas aqueles consumidores que minimizem o custo reduzido. Este subproblema é facilmente resolvido por um algoritmo guloso de complexidade $O(n)$, que apresenta um ótimo desempenho.

Devido à complexidade do subproblema (ii) ser menor que a do subproblema (i), o algoritmo de GC procura primeiro por restrições violadas (7) resolvendo o subproblema (ii).

Quando não existirem mais destas restrições violadas, então o algoritmo passa a resolver o subproblema (i), a fim de encontrar restrições (6) violadas. Para cada restrição (6) e (7) violada, o algoritmo de GC adiciona respectivamente no PMR as variáveis de decisão λ e δ associadas. Este processo é repetido até que não existam restrições violadas no problema dual, ou seja, até encontrar o limite de PL do modelo (1)-(4).

4. Resultados Computacionais

Nesta seção serão apresentados os limites de PL associados ao modelo (1)-(4). Todos os resultados computacionais desta seção foram obtidos usando uma máquina com processador Intel i7 com 3.0 GHz de velocidade de processamento e 4 Gb de memória RAM, executando sistema operacional Linux. O algoritmo de GC foi codificado em C++. Para a solução do problema de PL associado ao PMR, foi usado o algoritmo Dual-Simplex disponível no pacote de otimização CPLEX.

Para a avaliação dos limites de PL e do algoritmo de GC foram utilizadas instâncias disponíveis na literatura para o VRPPC. Três grupos de instâncias foram testados. O primeiro (grupo 1) é composto por 10 instâncias de pequeno porte propostos por Chu (2005) e Bolduc et al. (2007). As instâncias do grupo 1 têm até 29 consumidores e uma frota privada heterogênea composta por 3 veículos. As instâncias dos segundo e terceiro grupos (grupos 2 e 3) foram propostas por Bolduc et al. (2008) modificando as instâncias do VRP de Christofides e Eilon (1969) e Golden et al. (1998) para o contexto do VRPPC. O número de consumidores das instâncias dos grupos 2 e 3 varia entre 50 e 483, enquanto o número de veículos varia entre 4 e 33. A única diferença entre as instâncias destes dois grupos é que o grupo 2 conta com frota homogênea de veículos, enquanto nas instâncias do grupo 3 a frota é heterogênea. Todas estas instâncias podem ser obtidas através do endereço <http://www.mcbolduc.com/VRPPC/tests.htm>.

No trabalho de Bolduc et al. (2008) foi apresentada uma formulação matemática baseada em fluxos de rede para o VRPPC. Na ocasião, os autores usaram o pacote de otimização inteira do CPLEX para solucionar o modelo e obter soluções ótimas para instâncias do grupo 1. Como resultado, conseguiram soluções ótimas para as instâncias com até 22 consumidores, usando até 150 horas de computação.

Nesta seção a formulação de fluxos proposta por Bolduc et al. será comparada à formulação (1)-(4). Para isto, será usado o CPLEX para avaliar apenas os limites de PL associados à formulação baseada em fluxos, enquanto o algoritmo de GC apresentado na seção 3 será usado para avaliar os limites de PL associados ao modelo (1)-(4).

As tabelas 1, 2 e 3 a seguir, mostram os resultados computacionais obtidos ao se avaliar os limites de PL associados à formulação de fluxos e a formulação (1)-(4) para as instâncias dos grupos 1, 2 e 3, respectivamente. Em cada tabela, a primeira coluna exibe a identificação da instância no grupo, seguido pelo melhor limite primal (MLP) disponível na literatura para aquela instância. As três próximas colunas mostram para a formulação de fluxos o valor do limite de PL (LPL), o respectivo tempo necessário para sua avaliação (t(s)) e o *gap* de dualidade calculado como $gap = 100 \frac{MLP - LPL}{MLP}$. Entradas similares são exibidas nas próximas 3 colunas para a formulação (1)-(4).

Em todas as tabelas nota-se uma dominância dos limites de PL avaliados pela formulação (1)-(4) quando comparados aos limites da formulação de fluxos. Na tabela 1, o LPL avaliado pelo algoritmo de GC coincide com o valor da solução ótima para a instância 'Chu-H-02', o que mostra o quanto estes limites podem ser fortes. Para as instâncias dos três grupos, os limites de PL associados à formulação (1)-(4) são no mínimo 43.9% mais fortes do que aqueles associados à formulação de fluxos. Como consequência, o *gap* de

instância	MLP	Formulação de Bolduc et al. (2008)			Formulação (1)-(4)		
		LPL	t(s)	gap(%)	LPL	t(s)	gap(%)
Chu-H-01	387.5	185.0	0.1	52.3	365.0	0.2	5.8
Chu-H-02	586.0	276.5	0.3	52.8	586.0	0.5	0.0
Chu-H-03	823.5	279.0	0.4	66.1	806.8	0.9	2.0
Chu-H-04	1389.0	648.6	0.6	53.3	1234.1	2.4	11.2
Chu-H-05	1441.5	441.7	0.9	69.4	1384.1	1.2	4.0
B-H-01	423.5	233.1	0.2	45.0	416.0	0.3	1.8
B-H-02	476.5	157.8	0.3	66.9	457.6	0.6	4.0
B-H-03	777.0	173.4	0.5	77.7	768.8	0.8	1.1
B-H-04	1521.0	569.5	0.7	62.6	1340.2	2.1	11.9
B-H-05	1578.0	635.5	0.8	59.7	1438.0	1.4	8.9

Tabela 1: Comparações entre os limites de PL envolvendo a formulação de fluxos de Bolduc et al. (2008) e a formulação (1)-(4) para as instâncias do grupo 1

dualidade médio associado aos limites de PL formulação (1)-(4) é de 2.15%, enquanto para a formulação de fluxos este valor sobre para 64.41%.

Com relação ao tempo necessário para avaliar os limites de PL, não há uma dominância clara. Para as instâncias do grupo 1, os limites da formulação de fluxo foram avaliados mais rapidamente. Porém se tratam de instâncias de dimensão reduzida para as quais se conhece soluções ótimas. Ao analisar o tempo computacional para as instâncias de médio e grande porte dos grupos 2 e 3, nota-se que os tempos gastos para avaliar os limites de cada formulação variam de instância para instância. Por exemplo, o tempo para avaliar os limites da formulação de fluxos para a instância ‘G-05’ é menor: 21 segundos, contra 12749 segundos gastos pela formulação (1)-(4). No entanto, este cenário se inverte para a instância ‘G-20’, onde a formulação de fluxos demanda mais tempo para ser avaliada: 18002 segundos, contra 112. A média de tempo gasto para avaliar os limites de PL da formulação de fluxos é 16547 segundos, enquanto a formulação (1)-(4) demanda 13999 segundos em média. Estes valores se apresentam elevados, pois algumas instâncias com um grande número de consumidores (até 483) demandam muito tempo para ter seus limites avaliados. Ao analisar a mediana dos tempos, tem-se 619 segundos da formulação de fluxos contra 64 da formulação (1)-(4).

Em resumo, a relação entre os limites associados à formulação (1)-(4) e o tempo necessário para sua avaliação se mostra amplamente favorável. Isto sugere que a implementação de métodos que otimização associados a este modelo podem apresentar bons resultados e oferecer limites duais ainda mais fortes e também novos limites primais que contribuíam com a literatura associada ao VRPPC.

5. Considerações Finais

Neste artigo foi apresentada uma formulação matemática baseada em *set partitioning* para o Problema de Roteamento de Veículos com Frota Privada e Entrega Terceirizada (mais conhecido na literatura como *Vehicle Routing Problem with Private Fleet and Common Carriers – VRPPC*). Como esta formulação é composta por um número exponencial de variáveis, um algoritmo de geração de colunas foi proposto e implementado para avaliar seus limites de Programação Linear. O algoritmo implementado resolve dois subproblemas de geração de colunas: (i) um precifica *q-routes* e o outro precifica a seleção de vértices a



serem atendidos por entregas terceirizadas.

Os resultados obtidos pelo algoritmo mostram que os limites de Programação Linear associados à esta formulação são muito mais fortes que os limites de uma formulação baseada em fluxos de rede disponível na literatura para o problema. Além disto, estes limites conseguem ser avaliados de forma mais eficiente. Sendo assim, esta formulação se mostra promissora para a busca de soluções ótimas para o VRPPC.

Como trabalhos futuros, uma alternativa interessante de pesquisa seria a implementação de um algoritmo *Branch-and-price* que utilize os limites da formulação (1)-(4) para procurar soluções inteiras (possivelmente ótimas) para o VRPPC.

Referências

- Y. K. Agarwal**, Vehicle routing with limited fleet and common carrier option, *TIMS/ORSA Joint National Meeting*, Boston, 1985.
- E. Balas**, The prize collecting traveling salesman problem, *Networks*, 19:621–636, 1989.
- E. Balas**, The prize collecting traveling salesman problem: II. polyhedral results, *Networks*, 25:199–216, 1995.
- M.O. Ball, A. Golden, A. Assad, e L.D. Bodin**, Planning for truck fleet size in the presence of a common-carrier option, *Decision Sciences*, 14:103–120, 1983.
- Marie-Claude Bolduc, Jacques Renaud, e Fayez Boctor**, A heuristic for the routing and carrier selection problem, *European Journal of Operational Research*, 183:926–932, 2007.
- Marie-Claude Bolduc, Jacques Renaud, Fayez Boctor, e Gilbert Laporte**, A perturbation metaheuristic for the vehicle routing problem with private fleet and common carriers, *Journal of the Operational Research Society*, 59:776–787, 2008.
- I. M. Chao, B. Golden, e E. A. Wasil**, The team orienteering problem, *European Journal of Operational Research*, 88, 1996.
- N. Christofides e S. Eilon**, An algorithm for the vehicle-dispatching problem, *Operations Research*, 20:309–318, 1969.
- N. Christofides, A. Mingozzi, e P. Toth**, Exact algorithms for the vehicle routing problem based on the spanning tree and shortest paths relaxations, *Mathematical Programming*, 20, 1981.
- Ching-Wu Chu**, A heuristic algorithm for the truckload and less-than-truckload problem, *European Journal of Operational Research*, 165:657–667, 2005.
- G. Clarke e J. Wright**, Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points, *Operational Research*, 12:658–581, 1964.
- Jean-François Côté e Jean-Yves Potvin**, A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with private fleet and common carrier, *European Journal of Operational Research*, 198:464–469, 2009.
- G. B. Dantzig e R. H. Ramser**, The Truck Dispatching Problem, *Management Science*, 6:80–91, 1959.

- M. Diaby e R. Ramesh**, The distribution problem with carrier service: a dual based penalty approach, *ORSA Journal on Computing*, 7, 1995.
- B. L. Golden, E. A. Wasil, J. P. Kelly, e I.-M Chao**, *Fleet Management and Logistics*, chapter The impact of metaheuristics on solving the vehicle routing problem: algorithms, problem sets, and computational results, páginas 33–56, Kluwer, 1998.
- Irina Gribkovskaia, Gilbert Laporte, e Aliaksandr Shyshou**, The single vehicle routing problem with deliveries and selective pickups, *Computers and Operations Research*, 35: 2908–2924, 2008.
- J.G. Klincewicz, H. Luss, e M.G. Pilcher**, Fleet size planning when outside carrier service are available, *Transportation Science*, 24:169–182, 1990.
- Jozef Kratica, Tijana Kostic, Dusan Tosic, Djordje Dugosija, e Vladimir Filipovic**, A genetic algorithm for the routing and carrier selection problem, *Computer Science and Information Systems*, 9:49–62, 2012.
- G. Laporte, M. Desrochers, e Y. Nobert**, Two exact algorithms for the distance constrained vehicle routing problem, *Networks*, 14:161–72, 1984.
- Jean-Yves Potvin e Marc-Andre Naud**, Tabu search with ejection chains for the vehicle routing problem with private fleet and common carrier, *Journal of the Operational Research Society*, 62:326–336, 2011.
- H. Pullen e M. Webb**, A computer application to a transport scheduling problem, *Computer Journal*, 10:10–3, 1967.
- F. A. Santos, G. R. Mateus, e A. S. da Cunha**, The pickup and delivery problem with cross-docking, *Computers and Operations Research*, 2012, DOI: 10.1016/j.cor.2012.11.021.
- M. W. P. Savelsbergh e M. Sol**, The general pickup and delivery problem, *Transportation Science*, 29:17–29, 1995.

instância	MLP	Formulação de Bolduc et al. (2008)			Formulação (1)-(4)		
		LPL	t(s)	gap(%)	LPL	t(s)	gap(%)
CE-01	1119.4	479.1	0.6	57.2	1105.4	0.2	1.3
CE-02	1814.5	539.0	6	70.3	1793.2	2	1.2
CE-03	1920.9	814.3	8	57.6	1892.9	6	1.5
CE-04	2512.6	969.8	87	61.4	2474.0	26	1.5
CE-05	3097.6	1155.3	635	62.7	3041.2	62	1.8
CE-06	1207.4	486.2	0.5	59.7	1192.5	0.2	1.2
CE-07	2004.5	549.6	6	72.6	1982.7	2	1.1
CE-08	2052.0	828.6	7	59.6	2026.2	6	1.3
CE-09	2425.2	737.6	86	69.6	2384.6	29	1.7
CE-10	3386.0	1187.1	621	64.9	3330.7	64	1.6
CE-11	2330.9	537.8	11	76.9	2301.4	10	1.3
CE-12	1952.8	491.0	6	74.9	1908.6	1	2.3
CE-13	2858.9	587.0	7	79.5	2827.0	10	1.1
CE-14	2213.0	764.0	7	65.5	2169.0	0.8	2.0
G-01	14160.7	7015.0	1897	50.5	14024.2	71	1.0
G-02	19234.0	8762.3	5802	54.4	18973.6	660	1.4
G-03	24646.7	11172.6	3101	54.7	24196.5	9635	1.8
G-04	34607.1	17824.0	31701	48.5	33911.9	189769	2.0
G-05	14249.8	6584.6	21	53.8	14115.6	12749	0.9
G-06	21703.5	11392.0	376	47.5	21296.3	32637	1.9
G-07	23549.5	11274.0	6484	52.1	23171.7	47239	1.6
G-08	30173.5	15454.0	18239	48.8	29439.6	67645	2.4
G-09	1336.9	341.1	8036	74.5	1307.7	1354	2.2
G-10	1598.7	391.7	19869	75.5	1567.2	4434	2.0
G-11	2179.7	531.9	32544	75.6	2137.8	10963	1.9
G-12	2503.7	669.6	65404	73.3	2455.3	25860	1.9
G-13	2268.3	652.7	4041	71.2	2232.0	449	1.6
G-14	2704.0	874.6	10548	67.7	2652.9	1572	1.9
G-15	3171.2	1049.5	44530	66.9	3105.5	4599	2.1
G-16	3654.2	1235.4	96193	66.2	3577.3	9957	2.1
G-17	1677.2	516.0	1204	69.2	1666.3	47	0.6
G-18	2742.7	800.0	5684	70.8	2717.0	35	0.9
G-19	3528.6	1122.0	6866	68.2	3477.6	64	1.4
G-20	4352.9	1324.0	18002	69.6	4275.5	112	1.8

Tabela 2: Comparações entre os limites de PL envolvendo a formulação de fluxos de Bolduc et al. (2008) e a formulação (1)-(4) para as instâncias do grupo 2

instância	MLP	Formulação de Bolduc et al. (2008)			Formulação (1)-(4)		
		LPL	t(s)	gap(%)	LPL	t(s)	gap(%)
CE-H-01	1191.7	421.2	1	64.7	1166.0	0.8	2.2
CE-H-02	1790.6	517.4	6	71.1	1768.2	2	1.3
CE-H-03	1917.9	814.3	9	57.5	1889.7	8	1.5
CE-H-04	2475.1	917.9	86	62.9	2430.9	44	1.8
CE-H-05	3143.0	1155.3	1157	63.2	3074.9	102	2.2
CE-H-06	1204.4	486.2	0.9	59.6	1187.0	0.8	1.4
CE-H-07	2025.9	619.9	10	69.4	2000.3	2	1.3
CE-H-08	1984.3	673.3	8	66.1	1958.4	10	1.3
CE-H-09	2438.7	782.4	103	67.9	2397.6	50	1.7
CE-H-10	3267.8	987.7	617	69.8	3197.1	138	2.2
CE-H-11	2303.1	537.8	10	76.6	2253.9	18	2.1
CE-H-12	1908.7	447.0	5	76.6	1856.6	2	2.7
CE-H-13	2842.1	587.0	9	79.3	2797.5	16	1.6
CE-H-14	1907.7	539.6	9	71.7	1864.0	2	2.3
G-H-01	14251.7	7015.0	761	50.8	13982.6	104	1.9
G-H-02	18560.0	7628.0	1049	58.9	18183.8	754	2.0
G-H-03	25356.6	12006.6	11401	52.6	24745.2	18676	2.4
G-H-04	34589.1	17824.0	58595	48.5	33901.4	477971	2.0
G-H-05	15667.1	8386.0	46	46.5	15343.2	1391	2.1
G-H-06	19975.3	8597.3	436	57.0	19589.5	14396	1.9
G-H-07	23510.1	11274.0	2046	52.0	23158.4	34559	1.5
G-H-08	27420.6	11859.3	8739	56.8	26885.2	23756	2.0
G-H-09	1331.8	315.31	5511	76.3	1307.7	2158	1.8
G-H-10	1561.5	418.8	21032	73.2	1530.4	8571	2.0
G-H-11	2195.3	531.9	81637	75.8	2153.2	17214	1.9
G-H-12	2487.3	615.4	123973	75.3	2438.7	37366	2.0
G-H-13	2239.1	664.9	4504	70.3	2190.9	1378	2.2
G-H-14	2682.8	815.5	18756	69.6	2620.3	4298	2.3
G-H-15	3131.8	1012.9	34396	67.7	3059.0	12193	2.3
G-H-16	3629.4	1248.8	242453	65.6	3547.6	16161	2.3
G-H-17	1695.7	582.0	1321	65.7	1679.5	27	1.0
G-H-18	2740.0	826.0	3016	69.9	2713.2	64	1.0
G-H-19	3464.7	1095.0	8973	68.4	3425.9	147	1.1
G-H-20	4352.3	1344.0	278018	69.1	4266.1	281	2.0

Tabela 3: Comparações entre os limites de PL envolvendo a formulação de fluxos de Bolduc et al. (2008) e a formulação (1)-(4) para as instâncias do grupo 3