

Estudo de Caso: o Problema do Transporte Escolar Rural em Minas Gerais

Marcelo Fonseca Faraj

DECOM – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG – Brazil
marcelofaraj@gmail.com

João Fernando Machry Sarubbi

DECOM – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG – Brazil
joao@decom.cefetmg.br

Cristiano Maciel da Silva

DTECH – Universidade Federal de São João Del Rei
Ouro Branco – MG – Brazil
cristiano@ufsj.edu.br

Marcelo Franco Porto

EE – Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – MG – Brazil
marcelo@etg.ufmg.br

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo de caso do Problema de Roteamento de Ônibus Escolares na zona rural de Minas Gerais. Foi utilizada uma base real georreferenciada da cidade de Governador Valadares objetivando reduzir a distância total percorrida por uma frota heterogênea de ônibus escolares. Como restrições adicionais temos: limite máximo que cada aluno pode caminhar, capacidade de cada veículo e máxima distância permitida com aluno por rota. É proposto um modelo de programação linear inteira mista e um algoritmo baseado na heurística GRASP para resolver instâncias reais em tempo computacional hábil.

PALAVRAS CHAVE. Problema do Roteamento de Ônibus Escolares, GRASP, SIG, Metaheurísticas.

ABSTRACT

This paper presents a case study of the School Bus Routing Problem applied to the rural area of Minas Gerais. A georeferenced real base of Governador Valadares city was used aiming to reduce the total distance traveled by a heterogeneous fleet of school buses. There were some additional constraints: a maximum limit that each student can walk, the capacity of each vehicle and the maximum distance allowed with student per route. A mixed integer linear programming model and an algorithm based on GRASP are proposed to solve real instances in reasonable computational time algorithm.

KEYWORDS. School Bus Routing Problem, GRASP, GIS, Metaheuristics.

1. Introdução

Minas Gerais é o quarto estado brasileiro em área e o segundo em população. Dados do IBGE (2011) mostram que mais de 3,5 milhões de mineiros foram matriculados em escolas das redes municipal, estadual e federal no ano de 2012. Desses 2,5 milhões de estudantes públicos do estado, 800.000 são alunos que utilizam o transporte escolar rural em Minas Gerais. Dada essa enorme população de estudantes matriculados na rede pública de educação, torna-se necessário um mecanismo automatizado para encontrar as melhores rotas de ônibus escolares possíveis, de modo a minimizar os gastos.

O problema em questão pode ser modelado como uma instância do Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (PROE) (Newton and Thomas, 1969; Desrosiers et al., 1981; Park and Kim, 2010), do inglês *School Bus Routing Problem*. O PROE é um problema típico de otimização que consiste em gerar rotas de ônibus escolares dado um conjunto de estradas, escolas, alunos, veículos e garagens.

Este artigo é baseado em um trabalho realizado em parceria com o Governo do Estado de Minas Gerais para gerar uma solução para o problema do transporte escolar rural de Minas Gerais. Para isso está sendo utilizada uma base de dados georreferenciados com informações reais de alunos, escolas, estradas e paradas de 250 municípios do estado de Minas Gerais. A frota de ônibus disponível é composta por ônibus de 3 (três) possíveis capacidades: 15, 30 e 40 lugares. Na abordagem utilizada cada veículo é específico de uma escola tendo como sua origem e seu destino final a própria escola.

Este artigo está dividido da seguinte forma: a seção (2) introduz os principais aspectos teóricos do PROE. Em seguida, é apresentado um modelo matemático para a etapa mais significativa desse problema (seção 3), seguido pelo algoritmo heurístico implementado (seção 4). Por fim, é feita a apresentação e análise dos resultados obtidos (seção 5) e a conclusão do trabalho (seção 6).

2. Problema de Roteamento de Ônibus Escolares

O Problema de Roteamento de Ônibus Escolares (PROE) é um problema que aparece constantemente na literatura desde sua primeira publicação por Newton and Thomas (1969). Segundo Desrosiers et al. (1981), o PROE pode ser subdividido em cinco etapas: preparação dos dados (*data preparation*), seleção das paradas (*bus stop selection*), geração das rotas (*bus route generation*), ajuste das janelas de tempo (*school bell time adjustment*) e escalonamento das rotas (*route scheduling*).

Na etapa de preparação dos dados (Kim and Jeong, 2009), deve-se ter como entrada as estradas disponíveis, as residências de cada aluno, as escolas e as garagens de ônibus. A partir desses dados, deve ser gerada uma rede única que contenha a síntese de todos esses elementos. Além disso, nesta etapa são implementadas algumas associações, como a associação de cada aluno à sua escola de destino e a associação de cada ônibus disponível a uma capacidade. Além disso, é especificado um grafo ponderado (que pode ser direcionado ou não) em que os vértices podem ser residências, escolas ou garagens. O peso de cada aresta corresponde à distância relativa ao caminho mínimo do vértice de origem para o vértice de destino utilizando o caminho das arestas disponíveis.

A etapa de seleção das paradas (Dulac et al., 1980; Desrosiers et al., 1981; Chapleau et al., 1985) recebe como entrada a rede gerada na etapa anterior. Assim, são determinadas e inseridas na rede as localizações de todas as paradas em torno das quais os alunos

serão agrupados. Esse agrupamento deve incluir todos os alunos que estudam em escolas pertencentes à rede e pode estar sujeito a algumas restrições, como, por exemplo: nenhum aluno pode estar a uma distância maior que um valor pré determinado da parada de ônibus mais próxima (Chapleau et al., 1985). Por fim, esse sub-problema também atribui cada estudante para a parada mais próxima. Nota-se, portanto, que a etapa de seleção das paradas é constituído de duas subetapas: a criação das paradas e a associação dos alunos às paradas mais próximas.

A criação das paradas consiste em uma instância do Problema da Localização de Facilidades (Absi et al., 2012), do inglês *Facility Location Problem*. Em linhas gerais, tem-se um conjunto de alunos com suas coordenadas geográficas, bem como o conjunto de todas as estradas disponíveis. Além disso, há como limitação a distância máxima que cada aluno pode caminhar da sua casa até a parada e da parada até sua casa. Assim, as paradas devem ser geradas de modo que o sejam em quantidade mínima suficiente para que todos os alunos presentes possam ser agrupados em torno de ao menos uma parada. Além disso, a distância mínima que o aluno pode percorrer via estradas de sua casa até a parada deve ser menor ou igual a um limite máximo previamente estabelecido (Chapleau et al., 1985).

Para gerar as paradas, foi utilizada a teoria dos grafos. Tem-se um grafo $G(V, E)$ não ponderado com um conjunto V de vértices e um conjunto E de arestas. Cada aluno presente na base de dados é considerado um vértice do grafo. Dados dois vértices x_1 e x_2 , determina-se a existência ou não de uma aresta entre eles com base na distância mínima entre eles através das estradas disponíveis. Assim, se esta distância for menor ou igual à distância máxima que cada aluno pode caminhar da sua casa até a parada, existe uma aresta ligando x_1 a x_2 .

Assim, é aplicado o conceito de conjunto dominante de um grafo (Balasundaram and Butenko, 2006), do inglês *dominating set*. Dado um conjunto de vértices $V' \subseteq V$, esse é dito um conjunto dominante de G se, e somente se, cada vértice desse grafo estiver contido ou for adjacente a um vértice contido nesse subconjunto. Dado um conjunto dominante V' qualquer é possível gerar uma parada para cada vértice $u \in V'$, com as mesmas coordenadas geográficas do aluno correspondente a v . Dessa forma, são geradas paradas em número suficiente para agrupar todos os alunos. Entretanto, esse procedimento pode ser bastante impreciso e gerar um número de paradas excessivo. Tomando o pior caso, por exemplo, $V' = V$, será gerada uma parada no ponto de projeção de cada aluno na estrada mais próxima. Essa solução implicaria em futuras rotas mais extensas e grafos com um número maior de vértices. Como existe a possibilidade do aluno caminhar até a parada, respeitando uma distância máxima, é possível aplicar o conceito de conjunto dominante mínimo, ou seja, aquele que possui o menor número possível de vértices. Desse modo, encontrar um conjunto dominante mínimo de G é garantia de que será gerado o menor número possível de paradas que esta metodologia permite. Entretanto, sabe-se que encontrar um conjunto dominante mínimo de um grafo é um problema NP-Completo (Garey and Johnson, 1990).

A etapa mais significativa do PROE é a geração das rotas, em que os dados oriundos das etapas anteriores são processados a fim de serem construídas as melhores rotas possíveis. Essa etapa pode ser reduzida a uma instância do Problema de Roteamento de Veículos (PRV) (Toth and Vigo, 2001, 2002; Ball et al., 1995), do inglês *Vehicle Routing Problem*. A execução da etapa de geração de rotas pode ser classificada segundo diversos critérios

particulares. Por exemplo, ela pode permitir frota heterogênea (Hargroves and Demetsky, 1981) de veículos ou apenas uma frota homogênea (Newton and Thomas, 1974; Desrosiers et al., 1981). Além disso, ela pode ou não permitir carga mista (Park et al., 2012), do inglês *mixed load*, ou seja, que alunos de diferentes escolas possam participar de uma mesma rota. Também ocorrem variações quanto à função objetivo que se quer otimizar, podendo ser o número de veículos, distância ou tempo total de viagem, distância percorrida pelos alunos de suas residências até as paradas, etc. Quanto às restrições adotadas, estão a capacidade dos veículos, limite de tamanho da rota e janela de tempo (Braca, 1997).

As etapas de ajuste das janelas de tempo (Desrosiers et al., 1981) e escalonamento das rotas (Newton and Thomas, 1974) são exclusivamente necessárias nos problemas em que os ônibus utilizados não estão associados a uma única escola, sendo que a primeira pode ainda assim, ser ignorada caso seu resultado seja uma entrada do problema (Park and Kim, 2010). Elas são responsáveis, respectivamente, por ajustar a janela de tempo em que os alunos podem chegar em cada escola e definir a sequência exata em que as rotas de cada ônibus serão feitas.

Salvo a etapa de preparação de dados, pouquíssimos trabalhos na literatura tratam de todas as quatro demais etapas do PROE (Park and Kim, 2010). Newton and Thomas (1969) resolveram apenas a etapa de geração de rotas, por meio de uma heurística baseada no Problema do Caixeiro Viajante (Dantzig et al., 1954). Já Desrosiers et al. (1981) tratam de todas as cinco etapas e Chapleau et al. (1985) examinam apenas as três primeiras para aplicação em uma área urbana. Desse modo, Park and Kim (2010) observam que a etapa de geração de rotas é a mais frequente e a de ajuste da janela de tempo é a menos frequente.

Neste trabalho será apresentado um modelo matemático e um algoritmo baseado na heurística GRASP (Feo and Resende, 1995) para resolver a etapa de geração de rotas do PROE. A versão do problema a ser resolvida possui veículos com capacidades heterogêneas e um limite máximo de quilômetros que cada aluno pode viajar dentro de cada ônibus.

3. Modelo Matemático

A fim de compreender melhor o problema e verificar a eficácia da heurística que seria implementada, foi produzido um modelo matemático. Os problemas relativos à busca e entrega de alunos em suas casas são semelhantes, de modo que é possível obter um dos modelos a partir do outro por meio de modificações simples. Desse modo, trata-se aqui apenas da busca dos alunos em suas casas a fim de levá-los à escola.

Sejam dados os conjuntos B de ônibus, P de paradas (sendo que a parada 0 representa a escola e a garagem do veículo) e A de alunos, do seguinte modo: $B = 1, 2, \dots, b$; $P = 0, 1, \dots, p$; $A = 1, 2, \dots, a$. Além disso, são tomados como parâmetros: a capacidade c_k do veículo k , que pode assumir os valores 15, 30 e 40 no caso em questão; o número a_j de alunos na parada j ; a distância d_{ij} para ir da parada i para a parada j ; e a distância l máxima que dado ônibus pode percorrer com aluno.

As variáveis de decisão utilizadas são: o_k , que indica se o ônibus k é ou não utilizado; x_{ijk} , que indica se o ônibus k passa pela aresta que vai da parada i à parada j ; y_{ijk} , que pode ser entendida como o fluxo de alunos da parada i para a parada j pelo ônibus k ; v_{jk} , que indica se a parada j é ou não visitada pelo ônibus k . As variáveis o_k , x_{ijk} e v_{jk} são binárias, enquanto a variável y_{ijk} é inteira não negativa.

O modelo matemático proposto é:

Função Objetivo:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in P - \{i\}} \sum_{k \in B} d_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in P} y_{0jk} = 0 \quad \forall k \in B \quad (2)$$

$$\sum_{l \in P - \{j\}} y_{jlk} - \sum_{i \in P - \{j\}} y_{ijk} = a_j v_{jk} \quad \forall j, k \mid j \in P - \{0\}, k \in B \quad (3)$$

$$\sum_{i \in P - \{0\}} y_{i0k} \leq c_k o_k \quad \forall k \in B \quad (4)$$

$$\sum_{k \in B} v_{jk} = 1 \quad \forall j \in P - \{0\} \quad (5)$$

$$\sum_{k \in B} \sum_{j \in P - \{i\}} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in P - \{0\} \quad (6)$$

$$\sum_{k \in B} \sum_{j \in P - \{i\}} x_{jik} = 1 \quad \forall i \in P - \{0\} \quad (7)$$

$$y_{ijk} \leq c_k x_{ijk} \quad \forall i, j, k \mid i, j \in P, k \in B, i \neq j \quad (8)$$

$$\sum_{k \in B} \sum_{j \in P - \{0\}} x_{0jk} = \sum_{k \in B} o_k \quad (9)$$

$$\sum_{k \in B} \sum_{j \in P - \{0\}} x_{j0k} = \sum_{k \in B} o_k \quad (10)$$

$$\sum_{i \in P - \{j\}} x_{ijk} = \sum_{i \in P - \{j\}} x_{jik} \quad \forall j, k \mid j \in P, k \in B \quad (11)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k \mid i, j \in P, k \in B, i \neq j \quad (12)$$

$$\sum_{i \in P - \{0\}} \sum_{j \in P - \{i\}} d_{ijk} x_{ijk} \leq l \quad \forall k \in B \quad (13)$$

A função objetivo (1) consiste em minimizar o somatório das distâncias totais percorridas por todos os ônibus. Os conjuntos de restrições (2) e (3) garantem de maneira indutiva a conservação do fluxo y_{ijk} . O primeiro indica que o fluxo que sai da escola é sempre nulo e o segundo indica que a diferença entre o fluxo que sai de uma parada e o fluxo que chega na mesma por meio de um ônibus k é igual ao número de alunos nessa parada se, e somente se, esta parada for visitada por k . Convém ressaltar que esse último conjunto de restrições é responsável por relacionar as variáveis v_{jk} e y_{ijk} . As restrições (4) garantem que o número de alunos em um veículo não exceda sua capacidade. Além disso, elas relacionam as variáveis y_{ijk} e o_k . Nas restrições (5) é garantido que cada parada é visitada por um só ônibus. Já em (6) e (7) temos a garantia de que, respectivamente, apenas uma aresta sai e apenas uma chega em cada vértice. As restrições (8) garantem que só pode haver fluxo nas arestas escolhidas para participar da solução. Elas são responsáveis por relacionar y_{ijk} e x_{ijk} . A restrição (9) e a restrição (10) garantem, respectivamente, que saem da escola tantas arestas quanto o número de ônibus utilizados e que chegam na

escola tantas arestas quanto o mesmo número. O conjunto de equações (11) garante que dado ônibus só pode sair das paradas em que chegou. Por fim, as restrições (12) proíbem fluxo negativo e as restrições (13) impedem que os ônibus se locomovam com aluno por uma distância superior a l .

4. Algoritmo Implementado

Para a aplicação específica para a zona rural do estado de Minas Gerais, apenas as três primeiras etapas do Problema do Roteamento de Ônibus Escolares (PROE) são necessárias. Para lidar com os dados e realizar esse procedimento, foi utilizado o Sistema de Gerenciamento de Banco de Dados Postgres, versão 9.2.8, e funções geográficas oferecidas pelo Sistema de Informações Geográficas (SIG) Postgis, em sua versão 2.1 e sua extensão PGRouting.

4.1. Projeção dos Alunos e das Escolas

A etapa de projeção dos alunos e das escolas corresponde à etapa de preparação dos dados do PROE. Com auxílio de funções definidas no Postgis, são projetados cada aluno, escola e parada já existente na rodovia mais próxima para inserção na rede. Assim, cada ente projetado e cada interseção entre arestas se torna um nodo da rede.

Em seguida, é criado um grafo ponderado completo contendo, como nodos, todos os alunos, paradas e escolas da rede. O peso de cada aresta é obtido a partir de uma função definida pela extensão PGRouting, que calcula o peso do caminho mínimo entre cada dois nodos do grafo por meio da rede. Essa distância é calculada uma vez para todos os pares de nodos e gravada no banco de dados para futura utilização.

4.2. Geração das Paradas e Atribuição dos Alunos

A etapa de geração das paradas e atribuição dos alunos corresponde à etapa de seleção das paradas que, conforme mencionado na seção (2), é constituída de duas subetapas: a criação das paradas e a atribuição dos alunos a elas.

Para gerar as paradas, obtêm-se um subgrafo do grafo gerado na etapa anterior que contenha apenas os vértices correspondentes aos alunos que não possuam nenhuma parada próxima de sua residência. Então, é implementada uma heurística para obter um conjunto dominante mínimo desses alunos, o qual corresponderá ao conjunto dos pontos geográficos das novas paradas. Essa heurística se baseia em uma prioridade calculada para cada vértice. Essa prioridade é diretamente proporcional ao quadrado de seu grau e inversamente proporcional ao somatório dos graus de seus vértices vizinhos. Os vértices são inseridos no conjunto dominante de acordo com a prioridade previamente calculada sem introduzir vértices redundantes.

Pode-se ignorar esse primeiro subproblema caso já haja paradas registradas na base de dados que estejam distribuídas de modo a satisfazer toda a demanda de alunos. Por outro lado, caso já existam algumas paradas mas não em número suficiente, esta etapa é responsável por inserir mais paradas, de modo a chegar em uma quantidade mínima suficiente. A atribuição dos alunos às paradas mais próximas é uma etapa constituída essencialmente de um agrupamento que é resolvido em tempo proporcional a $|A| \times |P|$.

A figura (1) foi plotada pelo *software* QGis, versão 1.8.0, a partir dos dados presentes na base de dados utilizada. Ela mostra um trecho do conjunto de estradas juntamente

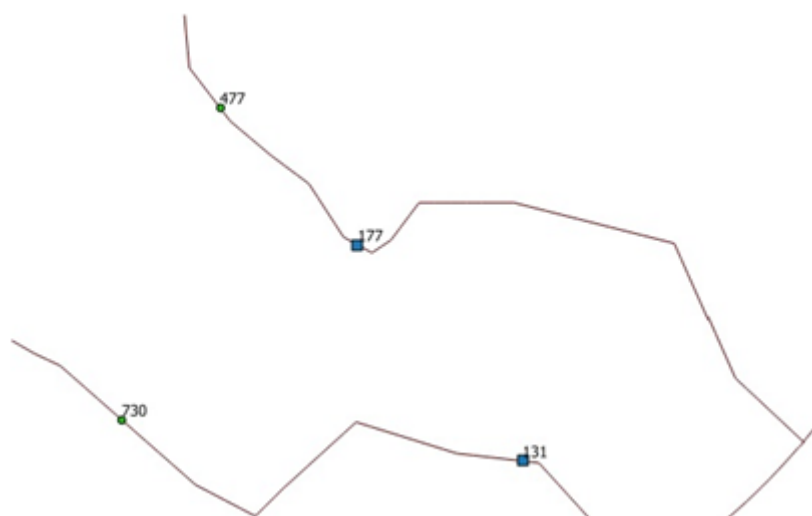


Figura 1. Projeção de alunos (círculos) e paradas (quadrados) na estrada mais próxima

com alguns alunos (círculos) e paradas (quadrados) projetados no trecho de estrada mais próximo de sua casa. Dada a projeção dos alunos 477 e 730 e das paradas 177 e 131 no sistema de estradas, a presente etapa atribuirá alunos a paradas segundo o critério da menor distância necessária para o aluno chegar até a parada seguindo apenas estradas. Por exemplo, o aluno 730 está euclidianamente mais próximo da parada 177 do que da parada 131. Entretanto, seguindo apenas o caminho de estradas, o mesmo aluno está mais próximo da parada 131, sendo atribuído a parada 131.

4.3. Geração das Rotas

A etapa de geração de rotas consiste em gerar rotas para quantos ônibus forem necessários de cada tipo disponível de modo a levar e buscar cada aluno da escola para a parada mais próxima da sua residência.

A questão do horário de entrega e busca dos alunos nas escolas é um fator limitante, já que não é possível que dois alunos de horários diferentes estejam juntos em um ônibus. Desse modo, convém subdividir o problema em tantos subproblemas semelhantes quantos forem os horários possíveis de busca ou entrega dos alunos. O primeiro critério de divisão do tempo é o turno a que cada aluno pertence, o qual divide os alunos em três grupos: manhã, tarde e noite. O segundo critério diz respeito à participação ou não dos alunos no programa Reinventando o Ensino Médio (REM). Os alunos participantes devem ir à escola no mesmo horário dos não participantes, porém devem voltar para suas casas aproximadamente uma hora mais tarde. Portanto, o problema é constituído de nove etapas independentes de roteamento, sendo uma etapa de ida e duas de volta para cada um dos três turnos.

Assim, o primeiro passo para a geração de rotas é fazer um mapeamento dos alunos e das paradas. Dessa forma, é gerado um grafo de paradas relativo a cada escola e referente a cada um dos 9 (nove) subproblemas. Em uma cidade, por exemplo, em que haja 10 escolas, esse mapeamento produz $10 \times 9 = 90$ grafos completos, que representarão problemas resolvidos separadamente. Dada esta divisão, foi aplicada a meta-heurística GRASP (Feo and Resende, 1995; Resende and Ribeiro, 2003) em cada um dos subproblemas gerados para obter rotas viáveis e otimizadas.

4.3.1. GRASP

O método GRASP (Feo and Resende, 1995; Resende and Ribeiro, 2003), do inglês *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*, em português (Procedimento de Busca Guloso, Adaptativo e Aleatório) foi a meta-heurística escolhida para a construção e refinamento das rotas do PROE.

Essa meta-heurística é dividida em duas fases: a construção de uma solução viável e um subsequente procedimento de Busca Local. Essas duas fases são repetidas a cada iteração. Na Fase de Construção, uma função gulosa e aleatória é usada para construir uma solução inicial. Essa solução é então utilizada como solução inicial para a Fase de Busca Local. Seu funcionamento básico é mostrado na figura (2).

```

Entrada: iteracoes, α
Saída: melhorsolucao
1 melhorcusto ← ∞;
2 for i ← 1 to iteracoes do
3   | solucao ← Construcao(α);
4   | solucao ← buscalocal(solucao);
5   | if custo(solucao) < melhorcusto then
6   |   | melhorsolucao ← solucao;
7   |   | melhorcusto ← custo(solucao);
8   | end
9 end

```

Figura 2. Heurística GRASP

Na Fase de Construção, cada solução viável é iterativamente construída, um elemento por vez. Foi escolhida a heurística do vizinho mais próximo para realizar a característica gulosa da construção (Aarts and Lenstra, 1997). Entretanto, ao invés de se escolher sempre o melhor elemento, isto é, o vizinho mais próximo, é criada uma Lista Restrita de Candidatos (LRC), isto é, uma lista de bons elementos. Aleatoriamente, um desses elementos é escolhido a cada passo e não necessariamente o melhor elemento.

Um parâmetro da LRC, α , determina o quanto o algoritmo é guloso ou aleatório. Quando $\alpha = 0$, tem-se uma solução totalmente gulosa, isto é, a LCR tem cardinalidade 1. Nesse caso, sempre será escolhido o vértice mais próximo do vértice atual para fazer parte da solução. Dessa forma, as rotas geradas pela fase de construção serão sempre as mesmas em todas as iterações prejudicando a eficiência do método. Por outro lado, quando $\alpha = 1$, define-se uma solução totalmente aleatória, isto é, a cardinalidade da LCR será igual ao número de vértices que ainda não foram visitados.

O algoritmo de busca local utilizado difere do que é comum de se implementar no GRASP, já que, em vez de uma, foram implementadas duas buscas locais. Estas são executadas a cada construção, sendo que a melhor solução passa para a próxima iteração.

Ambas as buscas locais utilizadas basearam-se no método de subida-decida (Tsamardinos et al., 2006), do inglês *Descent UpHill*, sendo que uma é baseada na troca da ordem das paradas dentro de uma mesma rota e a outra é baseada na inserção de paradas também dentro de uma mesma rota. A estrutura de vizinhança da primeira busca local

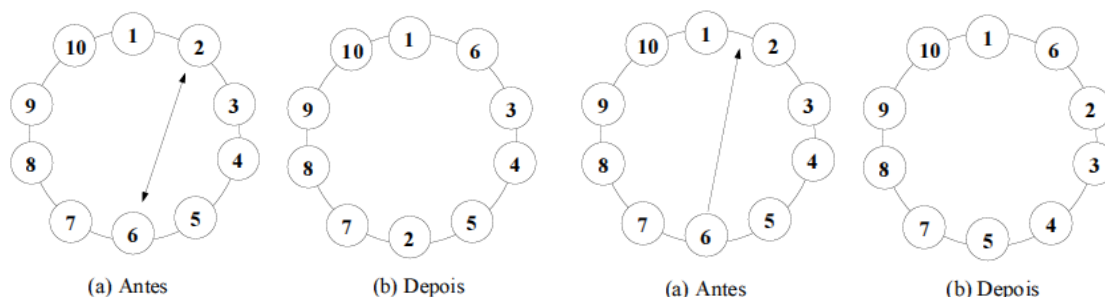


Figura 3. Busca local baseada em troca

Figura 4. Busca local baseada em inserção

pode ser definida como: duas soluções são vizinhas se forem idênticas, exceto por duas paradas, que tem suas posições trocadas. Já a segunda busca local define como estrutura de vizinhança que: duas soluções são vizinhas se forem idênticas, exceto pela mudança da ordem de um nodo qualquer. A busca local baseada em troca é ilustrada pela figura (3) e a busca local baseada em inserção é ilustrada pela figura (4).

5. Resultados

Os testes foram executados em um computador com processador A6-3420M *quad core* de 1.4 GHz com *turbo clock* até 2.3 GHz e memória RAM de 6 Gbytes. O sistema operacional utilizado foi o Windows 7 Ultimate 64 Bits. Algumas instâncias específicas da base de dados da cidade de Governador Valadares-MG foram executadas via heurística GRASP, e via modelo de programação linear inteira mista, utilizando o *software* CPLEX, versão 12.5.0.0. Desse modo, é possível comparar os resultados heurísticos com os exatos para verificar a eficiência do GRASP, bem como analisar o *gap* de relaxação linear e verificar a qualidade do modelo matemático produzido.

A tabela (1) especifica as principais características das 9 (nove) instâncias utilizadas. Já na tabela (2), são apresentados os resultados obtidos para a execução de cada instância através do modelo matemático descrito na seção (3) e pelo algoritmo GRASP descrito na seção (4). Para o algoritmo GRASP utilizou-se um $\alpha = 0.3$ e 2000 iterações. Os campos *GAP RL(%)*, *GAP F(%)* e *GAP C(%)* se referem, respectivamente, ao *gap* de relaxação linear, *gap* final do CPLEX e ao *gap* entre a solução do algoritmo GRASP e a melhor solução inteira obtida pelo CPLEX.

O *gap* de relaxação linear ou *GAP RL* é um parâmetro utilizado para avaliar a qualidade do modelo matemático elaborado. Seu valor é definido como $(S - S_0) \div S$, sendo S_0 o primeiro limite inferior obtido por meio do modelo e S o valor ótimo da função objetivo. Desse modo, o *GAP RL* só faz sentido caso se tenha a solução ótima do problema, o que ocorre apenas em 5 (cinco) das 9 (nove) instâncias testadas, vide tabela (2).

Apenas para as 5 (cinco) instâncias com menos paradas, foi possível obter solução exata pelo CPLEX em tempo hábil. Por outro lado, para as 4 (quatro) instâncias com maior número de paradas, não foi obtida solução ótima, seja pelo tempo excessivo demandado ou por um estouro de memória em tempo de execução. Já no caso da heurística GRASP, pode-se observar que o todas as instâncias foram rodadas em tempo hábil. Das 5 (cinco) resolvidas no ótimo pelo CPLEX, 3 (três) também foram resolvidas no ótimo pelo GRASP e as outras duas a menos de 3.5% do ótimo. Quanto às 4 (quatro) instâncias com maior

ID	Nome da Escola	Turno	Ida-Volta	REM	Paradas	Alunos
1	E. E. Presidente Kennedy	Manhã	Ida	Ambos	11	21
2	E. E. Presidente Kennedy	Tarde	Ida	Ambos	12	20
3	E. E. Vicente José Soares	Noite	Volta	Não	14	30
4	E. E. Presidente Kennedy	Noite	Ida	Ambos	17	30
5	E. E. de São Vitor	Manhã	Ida	Ambos	21	40
6	E. E. Presidente Kennedy	Manhã	Volta	Não	22	39
7	E. E. de São Vitor	Tarde	Ida	Ambos	27	70
8	E. E. de São Vitor	Noite	Ida	Ambos	30	76
9	E. E. Vicente José Soares	Noite	Ida	Ambos	38	62

Tabela 1. Descrição das instâncias utilizadas para avaliar a heurística e o modelo matemático produzidos

Instância	CPLEX				Grasp		
	GAP RL (%)	Tempo (s)	Distância (m)	GAP F (%)	Tempo (s)	Distância (m)	GAP C (%) CPLEX
1	29.15	7.70	116141	0.00	5.78	163915	0.00
2	41.17	65.52	153867	0.00	8.16	153867	0.00
3	60.49	3212.11	438481	0.00	8.92	441522	0.69
4	31.43	250.00	154963	0.00	20.21	154963	0.00
5	31.02	1139.35	239034	0.00	15.88	247027	3.34
6	-	60737.83	242345	2.90	20.66	257220	6.14
7	-	31815.29	374272	6.13	15.05	400662	7.05
8	-	30129.41	311307	8.05	22.07	315050	1.20
9	-	50057.30	719396	8.58	27.60	778489	8.81

Tabela 2. Resultados CPLEX - GRASP

número de paradas, pode-se observar que a solução obtida pelo GRASP apresentou um *gap* inferior a 9% em relação às melhores soluções encontradas pelo CPLEX e demandou menos de 0.1% do tempo utilizado pelo CPLEX para chegar ao seu *gap* final. Dessa forma, o algoritmo GRASP implementado mostrou-se como uma alternativa eficiente para a solução do problema do transporte escolar rural no estado de Minas Gerais.

Os resultados calculados pelo algoritmo GRASP são armazenados em uma base de dados do banco de dados georreferenciado. Dessa forma, é possível apresentar as rotas em um formato gráfico para as prefeituras. A figura (5), por exemplo, mostra todas as rotas geradas a partir da instância 8 da tabela (1). A escola é representada por um triângulo roxo, os alunos que participam das rotas aparecem como círculos amarelos e as próprias rotas são escritas sobre as estradas, sendo cada rota traçada com uma cor e estilo próprios.

6. Conclusão

Neste artigo, foi apresentado um estudo de caso real do problema do transporte escolar rural no Estado de Minas Gerais à luz do Problema do Roteamento de Ônibus Escolares. Para realizar os testes necessários, foi utilizada um base de dados geográfica real do município de Governador Valadares-MG.

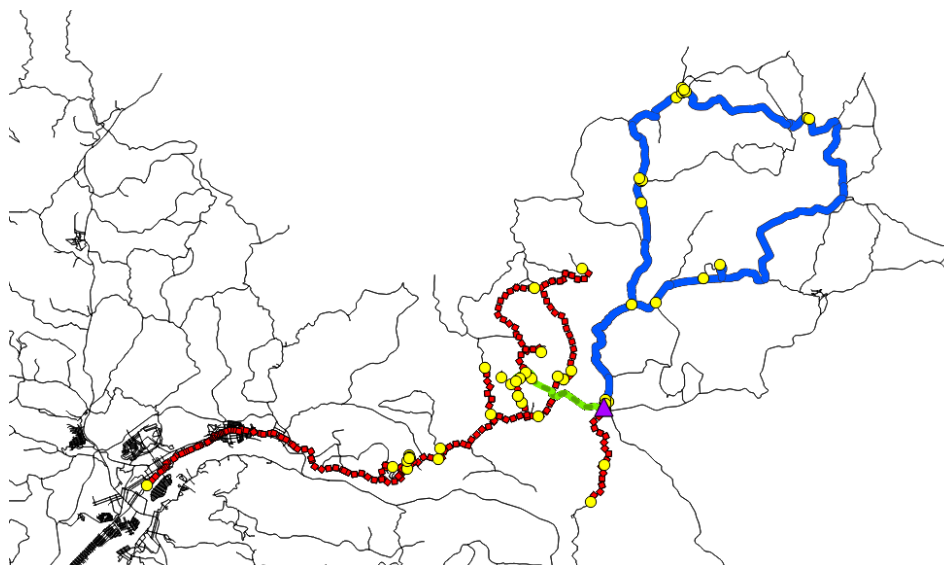


Figura 5. Representação gráfica das rotas relativas à instância 8

A partir dos dados geográficos, foi gerada uma rede conexa e um conjunto de paradas em torno das quais os alunos foram agrupados. Também foi produzido um modelo matemático e implementada uma versão da heurística GRASP para a geração de rotas. Os resultados obtidos mostram que a heurística mostrou-se competitiva gerando soluções satisfatórias em um tempo computacional, em alguns casos, ordens de grandeza menor que o resolvidor CPLEX utilizando o modelo proposto na seção (3).

Para trabalhos futuros, é possível realizar a etapa de geração de rotas permitindo dois aprimoramentos: carga mista (Park et al., 2012) nos ônibus e que alunos sejam buscados e entregues em uma mesma rota.

Referências

- Aarts, E. and Lenstra, J. K., editors (1997). *Local Search in Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition.
- Absi, N., Feillet, D., Garaix, T., and Guyon, O. (2012). The city logistics facility location problem. In *Odyssey 2012, 5th International Workshop on Freight Transportation and Logistics*, Mykonos, Greece.
- Balasundaram, B. and Butenko, S. (2006). Graph domination, coloring and cliques in telecommunications. In Resende, M. G. C. and Pardalos, P. M., editors, *Handbook of Optimization in Telecommunications*, pages 865–890. Springer Science + Business Media, New York.
- Ball, M. O., Colbourn, C. J., and Provan, J. S. (1995). *Handbooks in Operations Research and Management Science*, volume Volume 7, chapter Chapter 11 Network reliability, pages 673–762. Elsevier.
- Braca, J. (1997). A computerized approach to the new york city school bus routing problem. *IIE transactions*, 29.
- Chapleau, L., Ferland, J.-A., and Rousseau, J.-M. (1985). Clustering for routing in densely populated areas. *European Journal of Operational Research*, 20(1):48–57.
- Dantzig, R., Fulkerson, R., and Johnson, S. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Operations Research*, 2:393–410.

- Desrosiers, J., Ferland, J., Rousseau, J.-M., Lapalme, G., and Chapleau, L.** (1981). *An Overview of a School Busing System*, pages 235–243. North-Holland.
- Dulac, G., Ferland, J. A., and Forgues, P. A.** (1980). School bus routes generator in urban surroundings. *Computers & OR*, 7(3):199–213.
- Feo, T. A. and Resende, M. G.** (1995). Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6:109–133.
- Garey, M. R. and Johnson, D. S.** (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.
- Hargroves, B. T. and Demetsky, M. J.** (1981). A computer assisted school bus routing strategy: A case study. *Socio-Economic Planning Sciences*, 15(6):341–345.
- IBGE** (2011). *Sinopse do censo demográfico: 2010 / IBGE*. IBGE, Rio de Janeiro.
- Kim, B.-I. and Jeong, S.** (2009). A comparison of algorithms for origin-destination matrix generation on real road networks and an approximation approach. *Computers & Industrial Engineering*, 56(1):70–76.
- Newton, R. M. and Thomas, W. H.** (1969). Design of school bus routes by computer. *socio-economic planning sciences*. *Socio-Economic Planning Sciences*, 3(1):75–85.
- Newton, R. M. and Thomas, W. H.** (1974). Bus routing in a multi-school system. *Computers & OR*, 1(2):213–222.
- Park, J. and Kim, B.-I.** (2010). The school bus routing problem: A review. *European Journal of Operational Research*, 202(2):311–319.
- Park, J., Tae, H., and Kim, B.-I.** (2012). A post-improvement procedure for the mixed load school bus routing problem. *European Journal of Operational Research*, 217(1):204–213.
- Resende, M. G. C. and Ribeiro, C. C.** (2003). A grasp with path-relinking for private virtual circuit routing. *Networks*, 41(2):104–114.
- Toth, P. and Vigo, D., editors (2001). *The Vehicle Routing Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- Toth, P. and Vigo, D.** (2002). Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem. *Discrete Appl. Math.*, 123(1-3):487–512.
- Tsamardinos, I., Brown, L. E., and Aliferis, C. F.** (2006). The max-min hill-climbing bayesian network structure learning algorithm. *Mach. Learn.*, 65(1):31–78.