



ABORDAGEM DINÂMICA NOS MODELOS $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ E HIPERCUBO

Regiane Máximo de Souza

Departamento de Engenharia de Produção - Unesp
Caixa Postal 473 – 17033-360 – Bauru – SP
regiane@feb.unesp.br

Reinaldo Morabito

Departamento de Engenharia de Produção – UFSCar
Caixa Postal 676 – 13565-905 – São Carlos – SP
morabito@ufscar.br

Fernando Y. Chiyoshi

Programa de Engenharia de Produção – COPPE/UFRJ
Caixa Postal 68507 – 21945-970 – Rio de Janeiro – RJ
chiyoshi@pobox.com

Ana Paula Iannoni

Laboratoire Genie Industriel - Ecole Centrale Paris
Chatenay Malabry 92295 – Paris, França
iannoni93@hotmail.com

RESUMO

As filas são componentes de diversos sistemas da nossa sociedade, como supermercados, bancos, hospitais e sistemas emergenciais. Nesse trabalho o objetivo é verificar o efeito da variação da taxa de chegada e de serviço durante o dia em detrimento da análise em equilíbrio do sistema. Foram abordados os modelos $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ e o hipercubo dinâmico considerando a mudança do número de servidores ao longo do tempo. O estudo mostrou o quanto a abordagem dinâmica se mostra mais realista que a abordagem em equilíbrio em sistemas onde a variação dos parâmetros é um fator importante a ser considerado.

Palavras chave: teoria das filas, modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$, modelos dinâmicos.

ABSTRACT

Queues are components of various systems of our society like supermarkets, banks, hospitals and emergency systems. In this work, the goal is verify the varying effect of the arrival rate and service during the day rather than analyzing the system in equilibrium. Models $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ and dynamic hypercube considering the change in the number of servers over time were examined. The study showed how the dynamic approach shows that the most realistic approach to equilibrium in systems where the variation of the parameters is an important factor to be considered.

KEYWORDS. queuing theory, model M(t)/M(t)/m(t)/C(t), dynamic models.



1. Introdução

No cotidiano podemos encontrar filas em supermercados, bancos, hospitais e sistemas emergenciais. O nível de serviço ao usuário está diretamente ligado ao tempo médio de espera na fila e o tempo de atendimento, esses sistemas trabalham com recursos limitados tornando seu gerenciamento não trivial. Esses sistemas são caracterizados essencialmente por incertezas principalmente quanto a demanda, tempo de serviço e localização dos servidores, conforme o caso. Para projetar e analisar a configuração desses sistemas, gestores e tomadores de decisão precisam balancear o nível de serviço oferecido aos usuários com os investimentos requeridos para poder oferecer um bom nível de serviço. Eles também precisam definir e analisar medidas de desempenho de maneira a serem capazes de avaliar adequadamente a configuração do sistema, isso pode ser realizado com o auxílio de modelos analíticos de teoria das filas e modelos experimentais de simulação.

Na análise em equilíbrio desses sistemas a taxa de chegada (λ) é suposta constante e algumas vezes ela varia com o estado do sistema (λ_n), essa análise supõe que essa taxa não varia com o tempo e depois de algum tempo de operação o sistema passa a fase transitória e entra em equilíbrio. Nos sistemas reais, a taxa de chegada e serviço variam com o tempo além disso, há a possibilidade de mudança do número de servidores dependendo da taxa de chegada de usuários no sistema. Se o sistema trabalhar o tempo todo com a configuração obtida na análise do período de pico, ele certamente irá alocar recursos excessivos em períodos de baixa demanda. Na prática, os sistemas reais diminuem o número de servidores em períodos de baixa demanda a fim de otimizar a quantidade de recursos utilizados. Kim e Whitt (2014) estudaram se a taxa de chegada de um call center e de um hospital é uma poisson heterogênea. Em outra abordagem, Schmid (2012) e Maxwell *et al.* (2010) apresentaram uma modelagem matemática aproximada para programação dinâmica de servidores ao longo do dia. Alanis (2013), apresentou um modelo baseado na Cadeia de Markov para reposicionar ambulâncias em sistemas de serviços médicos de emergência. Stolletz (2008) propôs uma aproximação para a fila $M(t)/M(t)/c(t)$ e avaliou o efeito de dividir o dia em vários períodos com taxas de chegadas diferentes. Ingolfsson *et al.* (2014) compararam e discutem diferentes métodos para resolver de forma aproximada o sistema de filas $M(t)/M/c(t)$.

O modelo hipercubo de filas espacialmente distribuídas, proposto originalmente por Larson (1974) e estendido por vários autores (Swersey, 1994; Galvão e Morabito, 2008; Boffey *et al.*, 2007; Iannone *et al.* (2007, 2009); Morabito *et al.* (2008); Simpson e Hancock (2009); Souza *et al.* (2013)), tem sido utilizado para analisar e planejar diversos sistemas de atendimento emergencial e em todos os casos a hipótese de equilíbrio é considerada.

Este é um trabalho exploratório onde o objetivo é comparar a análise em equilíbrio onde a taxa de chegada é constante, com uma abordagem dinâmica, em que a taxa de chegada e serviço varia com o tempo nos modelos $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ e no modelo hipercubo, verificando o efeito dessas mudanças em algumas medidas de desempenho (número de clientes no sistema e na fila, tempo médio de espera no sistema e na fila) no sistema. A Seção 2 é dividida em duas partes, a Seção 2.1 em que apresentamos o modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ e a Seção 2.2 em que apresentamos o modelo hipercubo dinâmico. Na Seção 3 mostramos os resultados dos exemplos ilustrativos desenvolvidos para os dois modelos e a Seção 4 apresentamos a Conclusão.

2. Abordagem Dinâmica

2.1 A Fila $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$

O modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ ($m(t) \leq C(t)$) considera que a taxa de chegada de usuários no sistema chega de acordo com uma distribuição de Poisson heterogênea ($\lambda(t)$), a distribuição do tempo de serviço é exponencial com a taxa de serviço dependente do tempo ($\mu(t)$), o sistema possui $m(t)$ servidores no intervalo $t_i < t < t_s$ (o número de servidores pode variar com o tempo), o sistema possui capacidade limitada ($C(t) - m(t)$). O diagrama de transição de estados que representa o sistema pode ser visto na Figura 11. As taxas de transição que representam este sistema são:



$$\lambda_n(t) = \begin{cases} \lambda(t), & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, m(t) - 1 \\ 0, & \text{para } n = m(t), m(t) + 1, \dots, C(t) \end{cases} \quad 1$$

$$\mu_n(t) = \begin{cases} n\mu(t), & \text{para } n = 1, 2, \dots, m - 1 \\ m(t)\mu(t), & \text{para } n = m(t), m(t) + 1, \dots, C(t). \end{cases} \quad 2$$

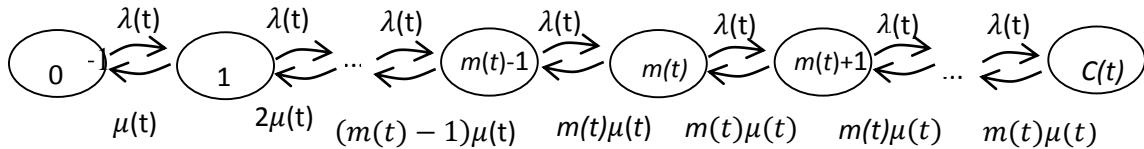


Figura 1 - Transição de estados do modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$.

O sistema de equações que representa este sistema é:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu(t) + \lambda(t)P_0(t) \quad n = 0 \quad 3$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda(t) + n\mu(t))P_n(t) + (n+1)\mu(t)P_{n+1}(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots, m(t) - 1$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda(t) + m(t)\mu(t))P_n(t) + m(t)\mu(t)P_{n+1}(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t) \quad n = m(t), m(t) + 1, \dots, C(t) - 1$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -m(t)\mu(t)P_n(t) + \lambda(t)P_{n-1}(t) \quad n = C(t)$$

De acordo com Wilmer *et al.* (1995), se as funções $\lambda(t)$ e $\mu(t)$ não forem contínuas, não há um método analítico para resolver o sistema de equações acima e quando esse for o caso, deverá ser recorrido métodos numéricos. Consideramos que quando o número de servidores muda, a o número de usuários na fila é sempre o mesmo. Neste caso, a capacidade do sistema é alterada quando um servidor é acrescentado ou diminuído do sistema. Para um modelo onde tem-se capacidade limitada, a probabilidade de perda é uma medida de desempenho importante a ser considerada, e representa a probabilidade de o sistema estar com C usuários $P_{Perda} = P_C$. A taxa de entrada de usuários ($\bar{\lambda}(t) < \lambda(t)$) utilizada na fórmula de Little é definida por:

$$\bar{\lambda}(t) = \lambda(t) \sum_{n=0}^{C-1} P_n(t) + 0P_C = \lambda(t)(1 - P_C) \quad 4$$

Nesse modelo, o fator de utilização $\rho(t)$ não corresponde à utilização média do sistema no instante t , a qual é dada por $\frac{L_s}{m(t)} = \frac{\bar{\lambda}(t)}{m(t)\mu(t)}$. O número médio de usuários na fila é dado pela Equação 5. Os tempos médios de espera a cada instante de tempo podem ser obtidos utilizando-se a fórmula de Little (1961), esta fórmula define a relação entre o tamanho médio da fila e o tempo médio de espera na fila. A derivação da fórmula de Little (equações 5 e 6) a seguir baseia-se na derivação dada por Whitt (1991) e pode ser vista em Souza *et al.* (2013).

$$L_q(t) = \sum_{n=m(t)}^C (n - m(t))P_n(t) \quad 5$$

$$L(t) = \lambda(t)W(t) \quad 6$$

2.2 Modelo hipercubo considerando $\lambda(t)$ e $\mu(t)$

O modelo hipercubo Larson (2007) é um modelo descritivo utilizado como uma ferramenta para análise e planejamento de sistemas de emergência urbanos. Além de considerar incertezas quanto à origem dos chamados, tempos de serviço e disponibilidade dos servidores, o modelo aborda complexidades geográficas e temporais da região. Originalmente a solução do modelo é dada pela construção das equações de equilíbrio do sistema, que são definidas supondo-se que o sistema atinja o equilíbrio e que as taxas de chegada e serviço não variam com o tempo.

Em Chiyoshi *et. al* (2001) é apresentado o modelo hipercubo por meio de um exemplo simples em equilíbrio, este sistema que é utilizado para a análise como exemplo neste trabalho.



Considere um sistema de emergência operando em uma região representada por três átomos, utilizando política de despacho de preferência fixa, mostrada na Figura 1.

Átomo	Matriz de Despachos		
	Preferências		
	1º	2º	3º
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Tabela 1– Matriz de Preferências de despacho.

A disponibilidade dos servidores é representada por meio do espaço de estados dos servidores, um estado particular do sistema sem fila é dado pela lista dos servidores que estão livres ou ocupados. Considere um sistema com apenas $m(t) = 3$ servidores, no instante t , e sejam $\{000\}$, $\{001\}$, $\{010\}$, ..., $\{111\}$ os $2^3 = 8$ possíveis estados do sistema, em que os 0's e 1's indicam se cada um dos três servidores está livre ou ocupado, respectivamente. Por exemplo, o estado $\{011\}$ representa o estado em que o servidor 1 está livre e os servidores 2 e 3 estão ocupados (note que $\{011\}$ descreve o estado dos servidores da esquerda para a direita). Assim, o espaço de estados desse sistema com três servidores pode ser representado por um cubo; no caso de haverem mais de três servidores, temos um hipercubo. O modelo hipercubo trata tanto sistemas em que não é permitida a formação de fila, como aqueles em que quando todos os servidores estão ocupados, os chamados que chegam esperam em uma fila por meio da qual os usuários são atendidos à medida em que os servidores tornam-se desocupados segundo a disciplina FCFS e os estados são denominados S_4 , S_5 , S_6 ,

As equações para representarem um sistema dinâmico neste caso são construídas utilizando a mesma lógica de construção das equações diferenciais dos sistemas mostrados na seção anterior, em que a taxa de variação da probabilidade de um estado n , em relação ao tempo, é a soma das probabilidades de chegar ao estado n menos a probabilidade de o sistema sair do estado n em um intervalo de tempo $\Delta t \rightarrow 0$. Na abordagem dinâmica do modelo hipercubo a taxa de usuários no sistema varia com o tempo ($\lambda(t)$). As equações que representam este modelo são:

$$\begin{aligned} \{000\} &\rightarrow \frac{dP_{000}}{dt} = -\lambda(t)P_{000} + \mu_1(t)P_{001} + \mu_2(t)P_{010} + \mu_3(t)P_{100} \\ \{001\} &\rightarrow \frac{dP_{001}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_1(t))P_{001} + \lambda_1(t)P_{000} + \mu_2(t)P_{110} + \mu_3(t)P_{101} \\ \{010\} &\rightarrow \frac{dP_{010}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_2(t))P_{010} + \lambda_2(t)P_{000} + \mu_1(t)P_{011} + \mu_3(t)P_{110} \\ \{100\} &\rightarrow \frac{dP_{100}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_3(t))P_{100} + \lambda_3(t)P_{000} + \mu_1(t)P_{101} + \mu_2(t)P_{011} \\ \{011\} &\rightarrow \frac{dP_{011}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_1(t) + \mu_2(t))P_{011} + (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))P_{001} + \lambda_1(t)P_{010} + \mu_3(t)P_{111} \\ \{101\} &\rightarrow \frac{dP_{101}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_1(t) + \mu_3(t))P_{101} + \lambda_3(t)P_{001} + (\lambda_1(t) + \lambda_3(t))P_{100} + \mu_2(t)P_{111} \\ \{110\} &\rightarrow \frac{dP_{110}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t))P_{110} + (\lambda_2(t) + \lambda_3(t))P_{010} + \lambda_2(t)P_{100} + \mu_1(t)P_{111} \\ \{111\} &\rightarrow \frac{dP_{111}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu(t))P_{111} + \lambda(t)P_{011} + \lambda(t)P_{101} + \lambda(t)P_{110} \\ \{S_1\} &\rightarrow \frac{dP_{S_1}}{dt} = -(\lambda(t) + \mu(t))P_{S_1} + \lambda(t)P_{111} + \mu(t)P_{S_2} \\ &\quad : \\ \{S_{c(t)}\} &\rightarrow \frac{dP_{S_1}}{dt} = -\mu(t)P_{S_{c(t)}} + \lambda(t)P_{S_{c(t)-1}}. \end{aligned}$$

Em que

$\lambda_i(t)$ é a taxa de chegada de chamadas no átomo i no instante t ;

$\mu_j(t)$ é a taxa de atendimento do servidor j no instante t ;

$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)$ é a taxa total de chegada no sistema no instante t ;

$\rho(t) = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$ é a carga média de trabalho no sistema no instante t .



Se o sistema mudar o número de servidores com o tempo, o número de equações no sistema será $2^{m(t)} + c(t)$. A capacidade do sistema muda com a mudança do número de servidores ($m(t)$), porém o número de usuários na fila é fixo ($c(t)$) assim como no modelo da seção anterior. Resolvendo o sistema de equações diferenciais acima encontramos as probabilidades de estado a cada instante de tempo e, a partir delas, podemos calcular várias medidas de desempenho importantes para o sistema, cada instante de tempo. Como na seção anterior, por exemplo, o número médio de usuários no sistema ($L(t)$), o número médio de usuários na fila ($L_q(t)$), o tempo médio de espera no sistema ($W(t)$) e o tempo médio de espera na fila ($W_q(t)$). Outras medidas de desempenho, como por exemplo as frequências de despacho e tempos de viagem, também podem ser facilmente adaptadas para este sistema.

3. Exemplos ilustrativos

3.1 Mudança do número de servidores no modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$

Em sistemas reais é comum a mudança do número de servidores dependendo da taxa de chegada no serviço, períodos de alta demanda acarretam mais servidores e períodos de baixa demanda possibilitam trabalhar com menos servidores sem prejuízo da qualidade do serviço. Utilizando a abordagem de Souza et. al. (2013) o dia foi dividido em três e seis períodos. O modelo $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ com abordagem dinâmica as taxas de chegada variam no tempo e a taxa de serviço é fixa, não estamos considerando aceleração do servidor. Serão realizadas três análises, as taxas de transição para um dia de operação do sistema são:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lambda(t) &= 5 \text{ se } 0h < t \leq 24h, & \text{b) } \lambda(t) &= \begin{cases} 2, \text{ se } 23h < t \leq 7h \\ 4, \text{ se } 7h < t \leq 14h \\ 5, \text{ se } 14h < t \leq 23h \end{cases} \text{ e} \\ \text{c) } \lambda(t) &= \begin{cases} 1, \text{ se } 2h < t \leq 6h \\ 2, \text{ se } 6h < t \leq 10h \\ 4, \text{ se } 10h < t \leq 15h \\ 3, \text{ se } 15h < t \leq 18h \\ 5, \text{ se } 18h < t \leq 22h \\ 2, \text{ se } 22h < t \leq 2h \end{cases} \end{aligned}$$

Para as três análises consideradas será considerado $\mu(t) = \mu = 6$. O sistema da seção 2.1 foi resolvido pelo método de Runge-Kutta (Wilmer et al., 1995) com erro menor que 10^{-6} da solução exata, obtemos as probabilidades de cada estado a cada instante de tempo. As condições iniciais utilizadas neste exemplo foram definidas da seguinte forma: a probabilidade de o sistema estar vazio no instante de tempo $t = 0$ é um ($P_0(t = 0) = 1$) as probabilidades dos demais estados são iguais a zero; quando o sistema aumenta um servidor, a probabilidade deste servidor estar ocupado no instante que ele começa a operar é zero; quando o sistema diminui um servidor, a probabilidade de o servidor retirado estar ocupado é dividida igualmente aos estados da fila, no instante em que o servidor é retirado. Além disso, os resultados obtidos tem uma precisão de 10^{-6} da solução exata.

Neste caso períodos em que a taxa de chegada é igual a 5 ($\lambda(t) = 5$) consideramos que $m(t) = 2$ e $C(t) = 5$ e nos períodos em que a taxa de chegada é menor que 5 ($\lambda(t) < 5$) consideramos que $m(t) = 1$ e $C(t) = 6$, nos dois casos o tamanho da fila é o mesmo. A Figura 2a mostra as probabilidades de cada estado do sistema para o modelo dinâmico com a mudança do número de servidores e o dia dividido em três períodos, a Figura 2b mostra as probabilidades de cada estado do sistema para o modelo dinâmico com a mudança do número de servidores e o dia dividido em três períodos e A Figura 2c mostra as probabilidades de cada estado do sistema para o modelo em equilíbrio.

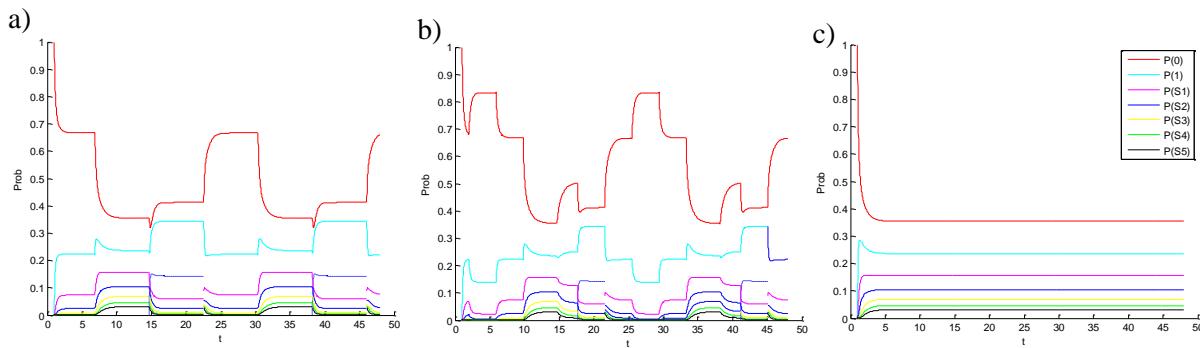


Figura 2 - a) probabilidades dos estados da fila $M_t/M_t/1$ dinâmico com o dia dividido em três períodos, com o n ; b) probabilidades dos estados da fila $M_t/M_t/1$ dinâmico com o dia dividido em seis períodos; c) probabilidades dos estados da fila $M/M/1$ em equilíbrio.

A Figura 3a mostra uma comparação entre o número médio de usuário no sistema do modelo $M/M/2/5$ (linha verde clara) com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três (linha verde escura) e seis períodos (linha azul). A Figura 3b mostra uma comparação entre o tempo médio de espera no sistema do modelo $M/M/2/5$ (linha verde clara) com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três (linha verde escura) e seis períodos (linha azul).

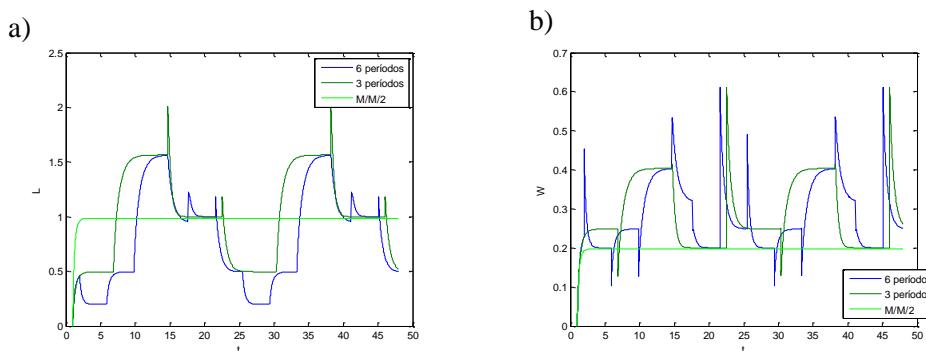


Figura 3 – a) Comparação do número médio de usuários no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três e seis períodos; b) Comparação do tempo médio de espera no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três e seis períodos.

A Figura 4a mostra uma comparação entre o número médio de usuário no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio (linha verde clara) com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três (linha verde escura) e seis períodos (linha azul). A figura 4b mostra uma comparação entre o tempo médio de espera no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio (linha verde clara) com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três (linha verde escura) e seis períodos (linha azul).

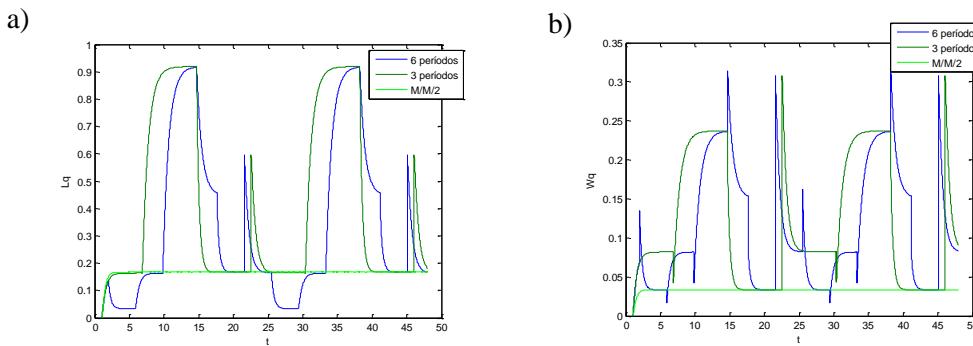


Figura 4 - Comparação do número médio de usuário no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três e seis períodos; b) Comparação do tempo médio de espera no sistema do modelo $M/M/2/5$ em equilíbrio com o modelo dinâmico em que há mudança no número de servidores com o dia dividido em três e seis períodos.

Podemos observar que a análise dinâmica de filas considera o efeito da mudança da taxa de chegada e do número de servidores no sistema nas medidas de desempenho analisadas, essa mudança de parâmetros acarreta um período de transição que o modelo em equilíbrio não considera. Essa análise possibilita uma série de questões ainda a ser analisada, como a aplicabilidade prática em sistemas reais que necessitam mudar o número de servidores dependendo da variação da demanda ao longo do dia. O número de períodos no dia a ser escolhido para essa análise depende da quantidade de chegadas que o sistema possui, quanto maior o número de chamados maior a possibilidade de divisão do dia em períodos menores. Se a taxa de chegada do sistema for grande o suficiente para que a divisão do dia seja feita em períodos suficientemente pequenos, há também a possibilidade de a taxa de chegada ser modelada por uma função contínua.

3.2 Mudança do número de servidores no modelo hipercubo dinâmico

Para representar o exemplo em que há mudança do número de servidores, consideramos que há três servidores em períodos de alta demanda ($18h < t \leq 22h$) e diminui um servidor quando a demanda é baixa, o servidor 2 é retirado. É permitida a formação de fila de espera de até cinco usuários na fila. A taxa de chegada total do sistema ($\lambda(t)$) é a mesma da seção anterior e consideramos que $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda_3(t) = \lambda(t)/3$. As taxas dos tempos de serviço foram definidas tal que $\mu_1(t) = \mu_1 = 1.5$, $\mu_2(t) = \mu_2 = 3.0$, $\mu_3(t) = \mu_3 = 1.5$.

Resolvendo o sistema de equações diferenciais da Seção 2.2 pelo método de Runge-Kutta obtemos as probabilidades de cada estado para cada instante de tempo (Figuras 5a e 5b). As condições iniciais utilizadas neste exemplo foram definidas da seguinte forma: a probabilidade de o sistema estar vazio no instante de tempo $t=0$ é um ($P_0(t=0) = 1$) as probabilidades dos demais estados são iguais a zero; quando o sistema o servidor 2 é colocado no sistema, todos os estados em que a probabilidade deste servidor estar ocupado no instante que ele começa a operar é zero; quando o sistema diminui um servidor, o servidor 2 é retirado do sistema, temos que ($P_{00}(t=t_0) = P_{000} + P_{010}$), ($P_{01}(t=t_0) = P_{001} + P_{011}$), ($P_{10}(t=t_0) = P_{100} + P_{110}$) e ($P_{11}(t=t_0) = P_{101} + P_{111}$), t_0 é o instante de tempo em que o servidor 2 é retirado. Além disso, os resultados obtidos tem uma precisão de 10^{-6} .

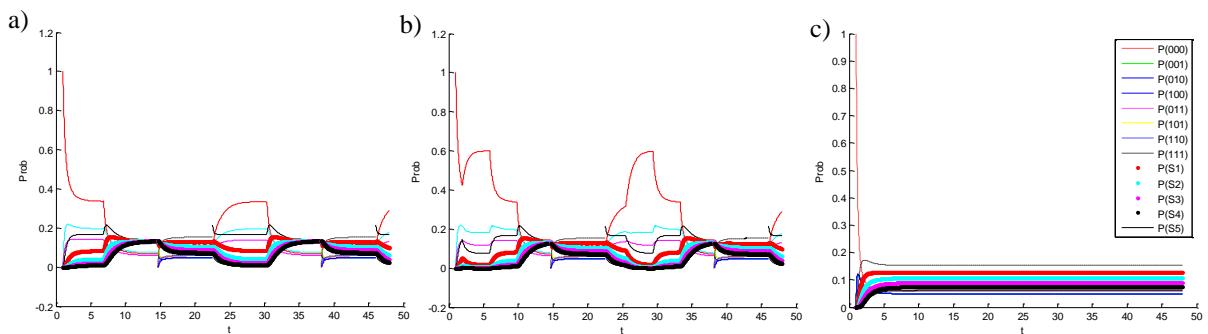


Figura 5 - a) probabilidades dos estados no modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em três períodos; b) probabilidades dos estados do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em seis períodos; c) probabilidades dos estados no modelo hipercubo estacionário.

As Figuras 7a e 6b mostram uma comparação entre o número médio de usuários no sistema da abordagem dinâmica do modelo hipercubo com a abordagem em equilíbrio com o dia dividido em três e seis períodos, respectivamente. Podemos observar que, nos dois casos, no período das 18h às 22h o sistema entra em equilíbrio às 20h.

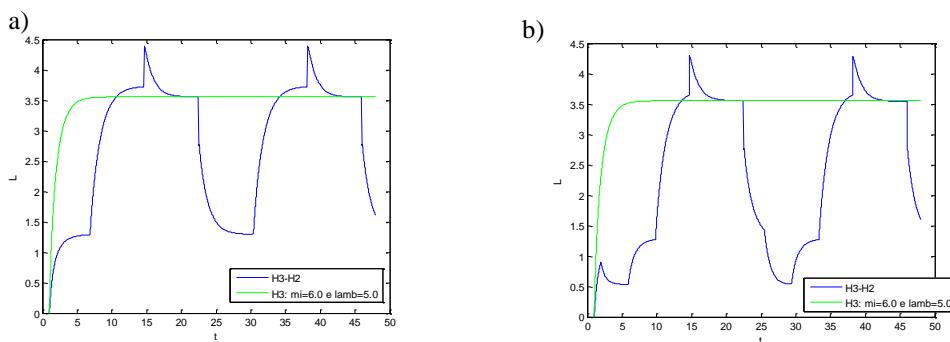


Figura 6 - a) Comparação do número médio de usuários no sistema do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em três períodos e o modelo hipercubo estacionário; b) Comparação do número médio de usuários no sistema do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em seis períodos e o modelo hipercubo estacionário.

As Figuras 7a e 7b mostram uma comparação entre o tempo médio de espera no sistema da abordagem dinâmica do modelo hipercubo com a abordagem em equilíbrio com o dia dividido em três e seis períodos, respectivamente.

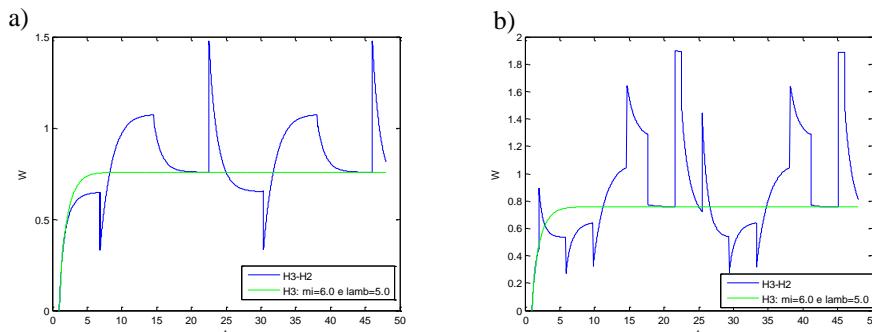


Figura 7 - a) Comparação do tempo médio de espera no sistema do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em três períodos e o modelo hipercubo estacionário; b) Comparação do tempo médio de espera no sistema do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em seis períodos e o modelo hipercubo estacionário.



As Figuras 8a e 8b mostram uma comparação entre o número médio de usuários na fila da abordagem dinâmica do modelo hipercubo com a abordagem em equilíbrio com o dia dividido em três e seis períodos, respectivamente.

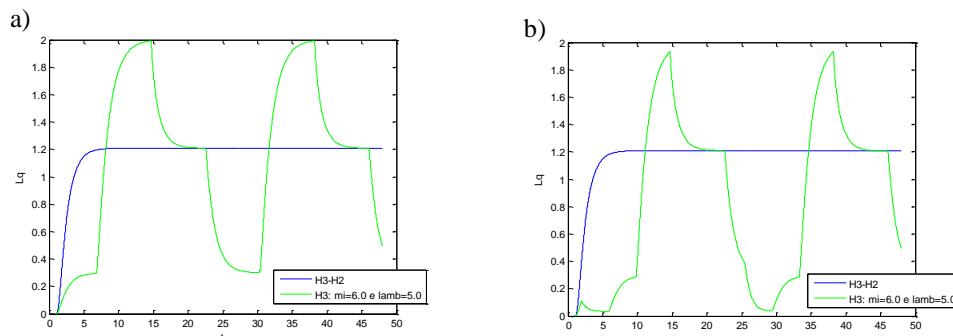


Figura 8 - a) Comparação do número médio de usuários na fila do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em três períodos e o modelo hipercubo estacionário; b) Comparação do número médio de usuários na fila do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em seis períodos e o modelo hipercubo estacionário.

As Figuras 9a e 9b mostram uma comparação entre o tempo médio de espera na fila da abordagem dinâmica do modelo hipercubo com a abordagem em equilíbrio com o dia dividido em três e seis períodos, respectivamente.

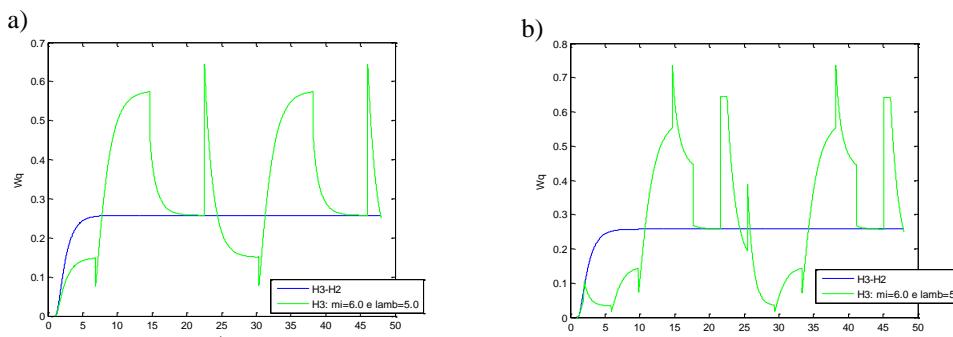


Figura 9 - a) Comparação do tempo médio de espera na fila do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em três períodos e o modelo hipercubo estacionário; b) Comparação do tempo médio de espera na fila do modelo hipercubo dinâmico com o dia dividido em seis períodos e o modelo hipercubo estacionário.

No período de pico do sistema (entre 18h e 22h) era operado com três servidores, podemos verificar na análise do modelo hipercubo dinâmico que o sistema demora entrar em equilíbrio mesmo considerando que a taxa de chegada não varia neste, em todos os casos pelo menos é necessário 2h para o sistema entrar em equilíbrio supondo que a taxa de chegada não mude nesse período. Esse estudo mostra a importância de se considerar o estudo de modelos dinâmicos de filas em sistemas reais para incorporar a mudança de taxa de chegada e serviço no sistema variando com o tempo, assim como a mudança do número de servidores.

4. Conclusão

O objetivo desse trabalho é verificar o efeito da variação da taxa de chegada e de serviço durante o dia em detrimento da análise em equilíbrio do sistema. Para isso, desenvolvemos dois exemplos ilustrativos. Foram abordados os modelos $M(t)/M(t)/m(t)/C(t)$ e o modelo hipercubo dinâmico, considerando a mudança do número de servidores ao longo do dia. O estudo mostrou o quanto a abordagem dinâmica se mostra mais realista que a abordagem em equilíbrio em sistemas



onde a variação dos parâmetros é um fator importante a ser considerado. Além disso, este estudo sugere que quanto maior a variação desses parâmetros em períodos menores, maior a possibilidade de o sistema não entrar em equilíbrio. Para trabalhos futuros é necessário a adaptação de outras medidas de desempenho importantes do sistema para a análise dinâmica, como por exemplo a carga de trabalho dos servidores. Também é importante a realização de um estudo de caso para verificar a aplicabilidade real dessa análise.

Agradecimento: Fapesp

Bibliografia

- ALANIS, R., INGOLFSSON, A., & KOLFAL, B.** (2013). A Markov chain model for an EMS system with repositioning. *Production and Operations Management*, 22(1), 216-231.
- BOFFEY B., GALVÃO R.D., ESPEJO L.G.A.** (2007). A review of congestion models in the location of facilities with immobile servers. *European Journal of Operational Research*. 178, 643–662.
- CHIYOSHI F., GALVÃO R.D., MORABITO R.** (2001) Modelo hipercubo: análise e resultados para o caso de servidores não-homogêneos. *Pesquisa Operacional* 21(2), p.199-218.
- GALVÃO, R. D., MORABITO, R.** (2008). Emergency service systems: The use of the hypercube queueing model in the solution of probabilistic location problems. *International Transactions in Operational Research*, 15, 525-549.
- IANNONI, A. P., MORABITO, R.** (2007). A multiple dispatch and partial backup hypercube queueing model to analyze emergency medical systems on highways. *Transportation Research*, E 43 (6), 755- 771.
- IANNONI A. P., MORABITO, R., SAYDAM, C.** (2009). An optimization approach for ambulance location and the districting of the response segments on highways. *European Journal of Operational Research*, 195, 528-542.
- INGOLFSSON A., AKHMETSHINA E., BUDGE S., LI Y., WU X.** A Survey and Experimental Comparison of Service-Level-Approximation Methods for Nonstationary M_t/M/s_t Queueing Systems with Exhaustive Discipline. *INFORMS Journal on Computing*. Vol. 19, No. 2, Spring 2007, pp. 201–214
- KIM, S. H., & WHITT, W.** (2013). Online Supplement to Are Call Center and Hospital Arrivals Well Modeled by Nonhomogeneous Poisson Processes?
- LARSON R.C.** (1974). Hypercube queueing model for facility location and redistricting in urban emergency services. *Computers and operations research* 1, 67-95.
- LARSON R.C., ODONI A.R.** (2007). *Urban Operations Research*. 2 ed. Dynamic Ideas, Belmont, Massachusetts.
- LITTLE J.D.** (1961). A proof for the queueing formula: $L = \lambda \cdot W$. *Operations Research* 9, p. 383 – 387.
- MAXWELL, M. S., RESTREPO, M., HENDERSON, S. G., & TOPALOGLU, H.** (2010). Approximate dynamic programming for ambulance redeployment. *INFORMS Journal on Computing*, 22(2), 266-281.
- SCHMID, V.** (2012). Solving the dynamic ambulance relocation and dispatching problem using approximate dynamic programming. *European Journal of Operational Research*, 219(3), 611-621.
- SOUZA R. M. , MORABITO R., CHIYOSHI F. Y., IANONNI A. P.** (2013). Análise da configuração de SAMU utilizando múltiplas alternativas de localização de ambulâncias. *Gestão & Produção*, 20(2), 287-302.
- SIMPSON N.C., HANCOCK P.G.** (2009) Fifty years of operational research and emergency response. *Journal of the Operational Research Society* 60, p. 126-139.
- SWERSEY A.J.** (1994). *Handbooks in OR/MS*. Amsterdam: Elsevier Science B.V., v. 6, 151-200.



STOLLETZ R. (2008) Approximation of the non-stationary $M(t)/M(t)/c(t)$ -queue using stationary queueing models: The stationary backlog-carryover approach . *European Journal of Operational Research*. 190, 478–493

WHITT, W. (1991). A review of $L = \lambda W$ and extensions. *Queueing Systems* 9, 235-268.

WILMER, C. BEZERRA, C. L., VIANA P. (1995) *Equações diferenciais elementares com problemas de contorno*. 3 ed. Prentice-Hall, Rio de Janeiro, RJ.