

FRONTERA EFICIENTE PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CON COBERTURA DE RESERVA

Marcelo Ignacio Véliz Alcaíno

Universidad Técnica Federico Santa María
Av Santa María 6400, Vitacura, Santiago de Chile
marcelo.veliz@alumnos.usm.cl

Luis Gonzalo Acosta Espejo

Universidad Técnica Federico Santa María
Av Santa María 6400, Vitacura, Santiago de Chile
luis.acosta@usm.cl

RESUMEN

Este artículo presenta una metodología para la obtención de la frontera eficiente de un problema de localización de facilidades bi-objetivo. Se resuelve un problema de localización en el que se desea maximizar la cobertura primaria, maximizando además una cobertura secundaria, para esto se encuentra la frontera eficiente obteniendo las soluciones soportadas y las no soportadas. Las primeras se obtienen resolviendo el problema bi-objetivo mediante el método de las ponderaciones y las segundas se obtienen al resolver el problema mediante una heurística lagrangeana. Los resultados que se muestran son para redes de hasta 150 vértices.

PALABRAS CLAVE. Problema de localización de cobertura con reserva, Heurística lagrangeana, Frontera eficiente.

Área principal: OA, OC, PM.

ABSTRACT

This paper presents a methodology for obtaining the efficient frontier for a bi-objective location problem. It solves a location problem that maximizes the primary and secondary coverage, for this problem an efficient frontier is found, obtaining supported and non-supported solutions. For the first ones a bi-objective problem is solved using the weights method and the second ones are obtained using a Lagrangian heuristic. The results are for networks with up to 150 nodes.

KEYWORDS: Backup Location Problem, Lagrangian heuristic, efficient frontier.

Main area. OA, OC, PM.

1. Introdução

En los problemas de localización de facilidades es común identificar los problemas de cobertura total (SCP) y los problemas de máxima cobertura. Los primeros buscan encontrar el mínimo número de instalaciones para dar cobertura a todos los puntos de demanda respetando una distancia crítica establecida, mientras que los problemas de tipo máxima cobertura buscan maximizar la demanda cubierta por un dado número instalaciones que se encuentran dentro de una distancia crítica dada. A partir de estos modelos básicos se han desarrollado diversas extensiones, una de estas son los problemas de localización con cobertura de reserva, que se modelan como un modelo bi-objetivo.

El problema de localización con cobertura de reserva, BCLP (por sus siglas en inglés de *Backup Coverage Location Problem*) fue desarrollado por Hogan y ReVelle (1986) y versiones de este modelo han hallado aplicaciones en la localización de facilidades de emergencias (por ejemplo, estaciones de bomberos y servicios médicos) para mejorar la calidad del servicio a los clientes (Daskin y Stern, 1981; Eaton et al., 1986; Hogan y ReVelle, 1986), localización de sensores de vigilancia para garantizar el monitoreo de áreas sin importar un traslape de ellas (Murray et al., 2007, Kim et al., 2008), la creación de reservas naturales para la preservación de especies (Hamaide et al., 2014).

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2 se describe el modelo de cobertura primaria y secundaria. En la Sección 3 se explica la metodología utilizada para encontrar la frontera eficiente. En la Sección 4 se presentan los resultados computacionales y, finalmente, en la Sección 5 se entregarán las conclusiones del trabajo.

2. Problema de localización con cobertura de reserva

El modelo de localización con cobertura de reserva es un modelo bi-objetivo que busca maximizar estos dos tipos de cobertura a partir de un número dado de facilidades, el modelo fue introducido por Hogan y ReVelle (1986) y ha sido desarrollado también por Kim y Murray (2008). En su formulación se utiliza la siguiente notación:

i: índice de demandas.

j: índice de potenciales localizaciones de facilidades.

S: distancia crítica entre punto de demanda *i* y una instalación *j*.

$\varepsilon_{ij} = 1$, si la distancia entre la demanda *i* y una instalación *j* $\leq S$; 0, en caso contrario.

$x_i = 1$, si la demanda *i* es cubierta; 0, en caso contrario.

$y_j = 1$, si la facilidad es localizada en *j*; 0, en caso contrario.

$z_i = 1$, si la demanda *i* es cubierta dos veces; 0, en caso contrario.

f_i : importancia de la demanda *i*.

P: número de facilidades a ser localizadas.

La formulación matemática del BCLP es la siguiente:

$$\text{Max} \sum_{\forall i} f_i x_i \quad (1)$$

$$\text{Max} \sum_{\forall i} f_i z_i \quad (2)$$

Sujeto a:

$$\sum_{\forall j} \varepsilon_{ij} y_j - x_i - z_i \geq 0 \quad \forall i \quad (3)$$

$$z_i - x_i \leq 0 \quad \forall i \quad (4)$$

$$\sum_{\forall j} y_j \leq P \quad (5)$$

$$z_i, x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \quad (6)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (7)$$

La función objetivo (1), maximiza la cobertura primaria y la función objetivo (2) busca maximizar la cobertura de reserva. Las restricciones (3) y (4) verifican la cobertura primaria y la de reserva para un punto de demanda. Las restricciones (3) dejan en evidencia que los objetivos (1) y (2) están en conflicto, en el sentido que un aumento en la cobertura primaria se consigue a expensas de una disminución en la cobertura de reserva. Observe, que las restricciones (4) permiten que se considere la existencia de una cobertura de reserva para un punto de demanda sólo en el caso que tal punto de demanda tenga una cobertura primaria. El número máximo de facilidades se define en la restricción (5) y, finalmente, las restricciones (6) y (7) definen a la naturaleza de las variables de decisión.

En la literatura especializada existen dos alternativas bastante utilizadas para solucionar problemas de programación matemáticos multi-objetivos: el método de las ponderaciones y el método de las restricciones. El primero consiste en establecer una nueva y única función objetivo resultante de una combinación lineal convexa de las originales, por otra parte, el segundo, propone trabajar sólo una función objetivo mientras que las otras se plantean como restricciones del espacio solución. Una buena referencia para los problemas multi-objetivo se puede encontrar, por ejemplo, en Steuer (1986).

Al abordar problemas multi-objetivo es fundamental encontrar la frontera eficiente. Esta frontera eficiente la conforman todas las soluciones no dominadas, esto es, soluciones cuya característica es que la mejora en uno de los objetivos puede ser conseguida únicamente en perjuicio de, por lo menos, uno de los otros objetivos. En los problemas lineal multi-objetivo la frontera eficiente está formada por soluciones eficientes soportadas, mientras que, la frontera eficiente de los problemas combinatorios multi-objetivo está formada por soluciones eficientes soportadas y soluciones eficientes no soportadas. Las soluciones eficientes soportadas son las que pertenecen a la envolvente convexa (*convex hull*) del conjunto de soluciones eficientes.

En este artículo se busca determinar la frontera eficiente para un problema bi-objetivo combinatorio, identificando tanto las soluciones eficientes soportadas como las soluciones eficientes no soportadas.

3. Búsqueda de la frontera eficiente

La estrategia está inspirada en la metodología descrita en Alminyana et al. (1998) para generar la frontera eficiente para el problema de las pq -medianas bi-objetivo y en Espejo y Galvão (2004) para el Problema de Localización Jerárquico de Máxima Cobertura bi-objetivo.

3.1 Soluciones soportadas

Para resolver el problema bi-objetivo se utiliza el método de las ponderaciones, por lo que se debe resolver el siguiente problema paramétrico $P(\pi) = \text{Max}\{\sum_{i=1}^q \pi_i g_i(x) \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, donde además $\sum_{i=1}^q \pi_i = 1, \pi_i > 0, i = 1, \dots, q$, en esta notación $g_1, g_2, \dots, g_q: R^n \rightarrow R, A \in R^{m \times n}, b \in R^m$ y $x \in R^n$. De este modo, para cada vector de pesos π se obtiene una solución eficiente soportada. Para obtener parte de la frontera eficiente se debe evaluar diferentes valores para π .

En el caso particular del problema BCPL, se plantea el siguiente problema:

$$\text{Max } \pi_1 \sum_{\forall i} f_i z_i + \pi_2 \sum_{\forall i} f_i x_i \quad (8)$$

Sujeto a (3) - (7) y

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \tag{9}$$

$$\pi_1, \pi_2 > 0 \tag{10}$$

3.2 Soluciones no soportadas

Para encontrar las soluciones no soportadas se propone explorar en las soluciones encontradas durante el proceso de resolución del problema paramétrico utilizando la relajación lagrangeana.

El problema lagrangeano se obtiene relajando las restricciones (3), considerando un vector de multiplicadores $V = [\lambda] \geq 0$:

$$Max \pi_1 \sum_{\forall i} f_i z_i + \pi_2 \sum_{\forall i} f_i x_i + \sum_{\forall i} \lambda_i \left(\sum_{\forall j} \varepsilon_{ij} y_j - z_i - x_i \right) \tag{11}$$

Sujeto a (4) - (7), (9) - (10).

El dual lagrangeano se resuelve usando una adaptación de la heurística lagrangeana con base en el método de los subgradiantes propuesto por Espejo y Galvão (2004).

4. Resultados computacionales

Las instancias se resolvieron utilizando un computador ultrabook con procesador Intel Core i5 de 1.7 GHz y 4 GB de RAM. La heurística lagrangeana se implementó con lenguaje AMPL con optimizador CPLEX. Estas instancias provienen de la literatura de problemas de localización: 7 problemas para la red de 55 vértices definida por Swain (1971), 6 problemas para cada red de 100 y 150 vértices, redes que fueron generadas aleatoriamente por Galvão y ReVelle (1996). Las instancias se obtienen a partir de la combinación de diferentes valores para p y s .

Para la búsqueda de las soluciones soportadas se resolvieron 100 instancias del problema paramétrico.

Para la red de 55 vértices, se resuelven 7 problemas obteniendo desde 5 a 9 soluciones eficientes soportadas mediante la resolución por el método de las ponderaciones (denotadas por un cuadrado en el gráfico), posteriormente el problema resuelto con la heurística lagrangeana entrega, además de las soluciones eficientes no soportadas, algunas soluciones soportadas y soluciones dominadas.

Problema	Método de las ponderaciones		Heurística Lagrangeana	
	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes soportadas	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes no soportadas
4	3.42	5	152.58	3
5	4.19	6	146.03	3
6	4.44	7	147.83	2
7	4.61	9	152.80	2
8	4.86	9	152.53	1
9	4.41	7	151.91	3
10	4.08	6	143.39	1

Tabla 1. Resumen de resultados para los problemas de 55 vértices.

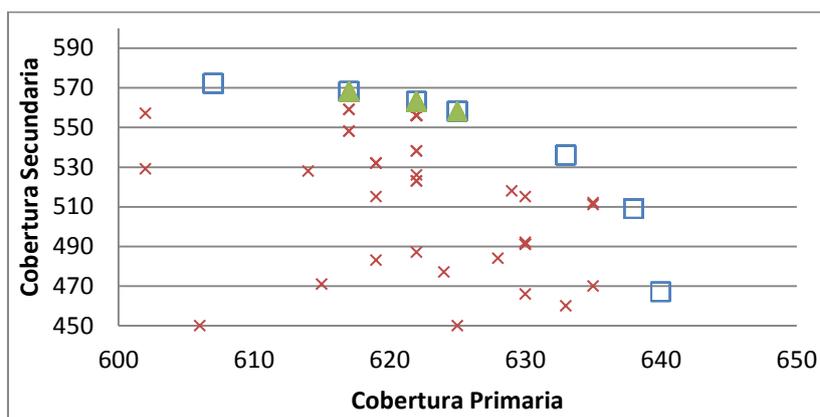


Figura 1. Red de 55 vértices, resultados obtenidos para el problema: $n=55, p=9, s=10$. Frontera eficiente obtenida por el método de las ponderaciones (\square) y por relajación lagrangeana (\blacktriangle). Soluciones dominadas denotadas por (\times).

En el caso de los problemas con 100 vértices, se resuelven 6 instancias. Se observa que, con la heurística lagrangeana se obtiene un menor número de soluciones eficientes conforme aumenta el valor de p .

Problema	Método de las ponderaciones		Heurística Lagrangeana	
	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes soportadas	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes no soportas
5	8.25	6	166.77	3
6	10.33	5	149.44	3
7	17.13	6	148.61	2
8	13.14	5	152.28	1
9	16.14	3	149.17	0
10	16.52	3	149.50	0

Tabla 2. Resumen de resultados para los problemas de 100 vértices

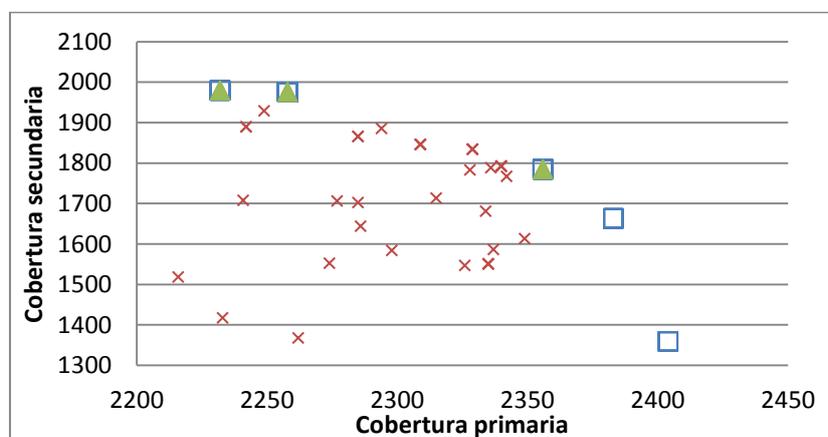


Figura 2. Red de 100 vértices, resultados obtenidos para el problema: $n=100, p=6, S=90$. Frontera eficiente obtenida por el método de las ponderaciones (\square) y por relajación lagrangeana (\blacktriangle). Soluciones dominadas denotadas por (\times)

En el caso de los problemas con 150 vértices, el comportamiento en relación al número de soluciones eficientes se mantiene como al de la red de 100 vértices. Los tiempos computacionales en todas las instancias es significativamente mayor que al resolver la heurística lagrangeana.

Problema p	Método de las ponderaciones		Heurística Lagrangeana	
	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes soportadas	Tiempo total (segs. CPU)	Número de soluciones eficientes no soportadas
4	13.98	3	640.31	3
6	24.95	8	614.72	2
8	78.02	10	650.00	3
10	66.47	9	627.05	1
12	45.53	12	620.06	0
14	122.45	12	613.11	0

Tabla 3. Resumen de resultados para los problemas de 150 vértices

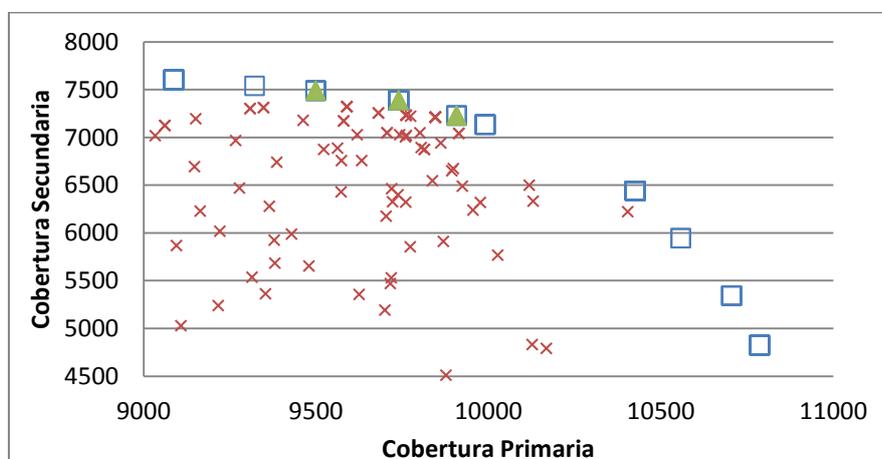


Figura 3. Red de 150 vértices, resultados obtenidos para el problema: $n=150$, $p=8$, $S=90$. Frontera eficiente obtenida por el método de las ponderaciones (\square) y por relajación lagrangeana (\blacktriangle). Soluciones dominadas denotadas por (\times)

5. Conclusiones

Este artículo busca identificar una aproximación para la frontera eficiente del problema BCLP. El procedimiento tiene dos etapas, en la primera se busca identificar las soluciones soportadas y, en la segunda etapa, se utiliza una heurística lagrangeana para encontrar las soluciones no soportadas. Con la heurística lagrangeana es posible identificar, además de las soluciones no soportadas, algunas de las soluciones eficientes soportadas.

Referencias bibliográficas

- Alminyana, A., Borrás, F. y Pastor, J. T.**, (1998), A new directed branching heuristic for the pq-median problem, *Location Science*, 6, 1-23.
- Daskin, M. S. y Stern, E. H.**, (1981), A Hierarchical Objective Set Covering Model for Emergency Medical Service Vehicle Deployment, *Transportation Science*, 15, 137-152.

Eaton, D. J., Sánchez, E., Lantigua, R. y Morgan, J., (1986), Determining Ambulance Deployment in Santo Domingo, Dominican Republic, *Journal of the Operational Research Society*, 37, 113–126.

Espejo, L.G.A. y Galvão, R. D., (2004), Uma aproximação da fronteira eficiente para um problema de localização hierárquico de máxima cobertura, 124, 377–389.

Galvão, R.D. y ReVelle, C.S., (1996). A Lagrangean heuristic for the maximal covering location problema, *European Journal of Operational Research*, 88, 114-123.

Hamaide, B., Albers, H.J., Busby, G., (2014), Backup coverage models in nature reserve site selection with spatial spread risk heterogeneity, *Socio-Economic Planning Sciences*, en prensa.

Hogan, K. y ReVelle, C.S., (1986), Concepts and Applications of Backup Coverage, *Management Science*, 32, 1434–1444.

Kim, K., y Murray, A. T., (2008), Enhancing spatial representation in primary and secondary coverage location modeling, *Journal of Regional Science*, 48, 745–768.

Kim, K., Murray, A. y Xiao, N., (2008), A Multi-Objective Evolutionary Algorithm for Surveillance Sensor Placement, *Environment and Planning B: Planning and Design*, 35(5) 935 – 948.

Murray, A.T., Kim, K., Davis, J., Machiraju, R. y Parent, R., (2007), Coverage Optimization to Support Security Monitoring, *Computers, Environment and Urban Systems*, 31, 133–147.

Steuer, R.E., *Multiple criteria optimization: theory, computation, and applications*, Wiley, New York, 1986.

Swain, R., A decomposition algorithm for a class of facility location problems. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY, 1971.