O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL MULTIPERÍODO: FORMULAÇÕES E MÉTODO DE SOLUÇÃO

Kelly Cristina Poldi
Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP
Instituto de Ciência e Tecnologia – ICT
Rua Talin, 330, CEP 12231-280, São José dos Campos, SP, Brasil
kelly.poldi@unifesp.br

Silvio Alexandre de Araujo
Universidade Estadual Paulista – UNESP
Departamento de Matemática Aplicada – DMAp
Rua Cristóvão Colombo, 2265, CEP 15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brasil
saraujo@ibilce.unesp.br

RESUMO

O problema de corte de estoque multiperíodo surge no planejamento e programação da produção de várias indústrias. A demanda por itens acontece em períodos de tempo de um horizonte de planejamento finito. Em muitos casos, é possível antecipar ou não a produção de alguns itens e, tal antecipação pode melhorar a combinação dos itens, gerando perda total menor. Estoque de objetos não utilizados em um período fica disponível para ser utilizado no próximo período do horizonte de planejamento, junto com novas peças adquiridas no mercado ou produzidas. Baseados em modelos de otimização inteira mista da literatura para resolução de problemas de corte de estoque, propomos duas generalizações para o caso multiperíodo. Também é proposto um procedimento heurístico para a solução de um modelo. Experimentos computacionais mostraram ganhos efetivos dos modelos multiperíodo quando comparados as soluções lote-por-lote, que é tipicamente utilizada na prática.

PALAVRAS CHAVE: Problema de corte de estoque, multiperíodo, modelagem matemática.

ABSTRACT

The multiperiod cutting stock problem arises in the production planning and programming in some industries. The demanded items are required in different periods of a finite planning horizon. In several cases, it is possible to anticipate or not the production of items and, such anticipation could lead to a better combination of items, generating lesser waste. Unused inventory in a certain period becomes available to the next period, all together with new inventory which may be acquired. Based on mixed integer optimization models from the literature, two generalizations are proposed to deal with the multiperiod case. It is also developed an heuristic procedure for the solution to the model. Computational experiments showed that effective gains can be obtained when compared multiperiod models with the lot for lot solution, which is typically used in practice.

KEYWORDS: Cutting stock problem, multiperiod, mathematical modeling.

1. Introdução

O problema de corte de estoque multiperíodo consiste basicamente em resolver, em cada período de um horizonte de planejamento finito, um problema de corte de estoque, para atender a demanda de itens nos vários períodos do horizonte de planejamento. Entretanto, a produção de alguns itens pode ser antecipada ou não. A antecipação permite que novas combinações sejam consideradas, isto é, um item que não tem demanda em um dado período do horizonte de planejamento pode ter sua produção antecipada de um período futuro se sua combinação com outros itens permitir um decrescimento na perda de material. Objetos em estoque (objetos a serem cortados) que não forem usados em um período ficam disponíveis para corte no próximo período, junto com os objetos daquele período (esses objetos podem ser comprados no mercado ou produzidos pela própria indústria, como no estudo de caso em uma indústria papeleira apresentado por Poltroniere *et al*. (2008)). A quantidade de objetos em estoque (comprados ou produzidos) é considerada, neste estudo, como um parâmetro de entrada. A função objetivo a ser minimizada combina a perda de material, custo de estocagem de itens que foram antecipados e custo de estocagem de objetos.

Atualmente, visando economia, muitas indústrias tentam tornar seu processo produtivo mais eficiente e isso estimula a comunidade acadêmica a pesquisar modelos de otimização para controlar o planejamento e a programação da produção como um todo. Nesse sentido, temos o estudo dos problemas acoplados. No contexto de acoplamento, o problema de corte de estoque multiperíodo aparece como um subproblema que deve ser resolvido de forma integrada a outros problemas de otimização na indústria. Um exemplo é o problema de corte de estoque integrado ao problema de dimensionamento de lotes. Tipicamente, os lotes de produção são definidos e um problema de corte de estoque é resolvido de forma independente para cada lote (solução lote-por-lote). Desta forma, a perda de material no processo de corte não interfere no dimensionamento do lote. Considerando o problema de forma acoplada, pode tornar possível a antecipação da produção de alguns itens e uma melhor combinação de itens nos padrões de corte (quanto maior a variedade de itens, há maior possibilidade de combinações melhores.).

Gramani e França (2006) propuseram um modelo matemático para o problema acoplado: dimensionamento de lotes e corte de estoque bidimensional baseado em um estudo de caso em uma indústria moveleira. O objetivo do modelo é determinar quais e quantos produtos finais (mesas, prateleiras, cadeiras etc.) devem ser produzidos em um período de tempo do horizonte de planejamento finito. A partir dessa decisão, tem-se um problema de corte a ser resolvido, uma vez que foi decidido quais itens serão produzidos. O problema acoplado abordado por Gramani e França consiste em decidir a quantidade de produtos finais a serem produzidos em cada período do horizonte de planejamento finito de forma a minimizar os custos de produção, setup e estoque e também o número de objetos cortados para atender a demanda de produtos finais. Mais tarde, em 2009, Gramani *et al.* (2009) apresentaram um modelo acoplado que integra dimensionamento de lotes e corte de estoque que incorpora a conjectura de que é mais vantajoso antecipar a produção de alguns lotes de produtos finais, assim, podemos notar a importância do problema de corte multiperíodo. Essa importância é confirmada em Gramani *et al*. (2011) que aborda o problema acoplado de forma integrada; os autores usam a técnica de geração de colunas para resolver o modelo integrado, que por sua vez, obteve melhores resultados que o modelo decomposto.

O modelo acoplado de dimensionamento de lotes e corte de estoque em indústrias moveleiras também foi abordado por Alem e Morabito (2012) e Vanzela *et al*. (2012). Em Vanzela *et al*. (2012) foi simulado parcialmente a prática de uma fábrica e proposto um modelo integrado. Nesses trabalhos tem-se restrições referentes à capacidade da serra em termos de número de ciclos da serra.

O mesmo problema acoplado também aparece em indústrias papeleiras. Um problema de dimensionamento de lotes deve ser considerado para decidir qual deve ser o peso das bobinas jumbo (grandes rolos) a serem produzidas em cada período de tempo do horizonte de planejamento finito. Após serem produzidas, essas bobinas jumbo devem ser cortadas em bobinas menores de comprimentos conhecidos para atender uma certa demanda, com o objetivo de minimizar a perda de papel, ou seja, um problema de corte de estoque deve ser resolvido. Assim, o planejamento consiste em escolher quais bobinas jumbo (definidas por seu comprimento e gramatura de papel) e quantas bobinas jumbo devem ser produzidas em cada período para atender a demanda, evitar custos de estoque e minimizar a perda de material. Portanto, esses dois problemas, dimensionamento de lotes e corte de estoque são dependentes entre si e devem ser tratados de forma integrada. Poltroniere *et al*. (2008) formularam um modelo matemático para esse problema e propuseram um método heurístico para solução. O método heurístico proposto pelos autores trata a antecipação da produção de itens de forma parcial, usando apenas uma heurística. A ideia dos modelos propostos neste trabalho é tratar essa antecipação de itens no modelo de corte multiperíodo e não apenas com uma heurística, como realizado em Poltroniere *et al.* (2008).

Recentemente, motivados por desafios que surgem na indústria de papel, Kallrath *et al*. (2014) apresentam várias abordagens para modelar e resolver os problemas de corte de estoque unidimensional e bidimensional. O objetivo é minimizar o número de bobinas e o número de padrões de corte, não permitindo qualquer superprodução. São propostas novas abordagens de geração de colunas para tratar dois casos: o PCE com bobinas de diferentes larguras em estoque, em quantidades limitadas, e o PCE em que a subprodução é permitida, mas deve ser minimizada.

Na prática, lotes de produção são definidos e um problema de corte de estoque é resolvido para cada lote de produção, assim a perda no processo de corte não interfere na formação dos lotes. Como citamos anteriormente, o acoplamento de problemas de corte e dimensionamento de lotes foi estudado por vários autores. Nos modelos matemáticos propostos por esses autores surge o problema de corte de estoque multiperíodo. O único trabalho na literatura que conhecemos que considere o problema de corte de estoque multiperíodo em si é Poldi e Arenales (2007, 2010), que propõem um método de solução baseado na técnica de geração de colunas (Gilmore e Gomory, 1961, 1963, 1965). Na literatura, ele tem aparecido apenas como subproblema de modelos acoplados de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Esta é a seção 1 que apresenta uma introdução ao problema de corte de estoque multiperíodo. Na seção 2 apresentamos a definição e os modelos matemáticos propostos, que consistem em, a) generalização do modelo de Gilmore e Gomory (1963) e, b) generalização do modelo de fluxo de arcos de Valério de Carvalho (1999, 2002). A seção 3 apresenta uma heurística para a solução do modelo generalizado de Gilmore e Gomory (1963). Na seção 4 apresentamos os testes computacionais e na seção 5 as conclusões e propostas futuras.

2. Definição do problema e modelagem matemática

Agora, fazemos uma breve descrição do problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo com vários tipos de objetos disponíveis em estoque para corte.

"Suponha que temos um horizonte de planejamento finito dividido em t períodos, $t = 1, ..., T$. Um período pode ser uma semana de trabalho, um turno de trabalho, uma semana de trabalho, um mês etc. Suponha também que temos disponíveis K tipos de objetos (barras, rolos, bobinas etc.) de um dado comprimento L_k, $k = 1, ..., K;$ cada tipo está disponível numa quantidade e_{kt}, $k = 1, ..., K$ em cada período t do horizonte de planejamento, $t = 1, ..., T$. Em cada período t, um conjunto de itens de um dado comprimento l_i, $i = 1, ..., m$, deve ser cortado para atender a demanda d_{it}, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$. O problema de corte de estoque multiperíodo consiste em produzir os itens demandados cortando-se os objetos disponíveis em estoque em cada período do horizonte de planejamento, de forma que a demanda dos clientes seja atendida e uma função objetivo seja otimizada, i. e., minimizando perda de material de custos de estoque."

Definição 1: *Chamamos de **padrão de corte** a maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A um padrão de corte associamos um vetor m-dimensional que contabiliza os itens produzidos,*

$$\mathbf{a}_{kt} = (\alpha_{1kt}, \alpha_{2kt}, ..., \alpha_{mkt})^T$$

em que α_{ikt} *é a quantidade de itens do tipo i, no padrão de corte para o objeto tipo k, no período t.*

No caso unidimensional, o vetor associado a um padrão de corte $\mathbf{a}_{kt}$ deve satisfazer a restrição física de capacidade de uma mochila:

$$l_1 \alpha_{1kt} + l_2 \alpha_{2kt} + ... + l_m \alpha_{mkt} \leq L_k \quad (1)$$

$$0 \leq \alpha_{ikt} \leq d_{it}, \alpha_{ikt} \in Z_+, i = 1, ... , m, k = 1, ..., K, \ t = 1, ..., T. \quad (2)$$

O modelo matemático para o problema de corte de estoque com vários tipos de objetos em estoque (Gilmore e Gomory (1961)) tem algumas semelhanças com o problema de corte de estoque multiperíodo, pois permite mais combinações de itens que podem levar a menor perda. No caso do problema com vários períodos, a combinação dos itens pode ser melhorada quando a produção de alguns itens pode ser antecipada.

2.1 Generalização do modelo de Gilmore e Gomory (GGG)

Apresentamos agora uma generalização do modelo matemático proposto por Gilmore e Gomory (1963) para o problema de corte de estoque, primeiramente proposto em Poldi e Arenales (2007, 2010), para tratar o problema de corte de estoque multiperíodo. Considere os seguintes índices, dados, parâmetros e variáveis de decisão:

Índices:

- $t = 1, ..., T$: número do período no horizonte de planejamento;
- $k = 1, ..., K$: número do tipo de objeto disponível em estoque;
- $j = 1, ..., N_k$: N_k é o número de padrões de corte do objeto do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- $i = 1, ..., m$: número do item demandado.

Dados:

- L_k : comprimento do objeto em estoque k, $k = 1, ..., K$;
- e_{kt} : disponibilidade em estoque do objeto k no período t, $k = 1, ..., K; t = 1, ..., T$;
- l_i : comprimento do item tipo i, $i = 1, ..., m$;
- d_{it} : demanda do item tipo i no período t, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$ ($\mathbf{d}_t$: vetor com componentes d_{it}).

Parâmetros:

- c_{jkt} : custo de cortar o objeto tipo k segundo o j-ésimo padrão de corte, $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ...,$ T;
- c_{it}^r : custo de estocar o item tipo i no final do período t, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$;
- c_{kt}^s : custo de estocar o objeto tipo k no final do período t, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$.

Variáveis de decisão:

- x_{jkt} : número de objetos tipo k cortados conforme padrão de corte j no período t;
- r_{it} : número de itens do tipo i que são antecipados para o período t ($\mathbf{r}_t$: vetor com componentes r_{it});
- s_{kt} : número de objetos do tipo k não utilizados no período t.

Modelo (GGG):

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{N_1} c_{j1t}x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} c_{j2t}x_{j2t} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jKt}x_{jKt} + \sum_{i=1}^{m} c_{it}^{r} r_{it} + \sum_{k=1}^{K} c_{kt}^{s} s_{kt}\right) \qquad (3)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{a}_{j1}\, x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{a}_{j2}\, x_{j2t} + \ldots + \sum_{j=1}^{N_K} \mathbf{a}_{jK}\, x_{jKt} + \mathbf{r}_{t-1} - \mathbf{r}_t = \mathbf{d}_t, \qquad t = 1,\ldots,T \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} x_{jkt} - \boldsymbol{s}_{t-1} + \boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{e}_t, \qquad t = 1,\ldots,T \qquad (5)$$

$$x_{jkt} \geq 0, \text{ inteiro}, r_{it} \geq 0, s_{kt} \geq 0, \; j = 1,\ldots, N_k, k = 1,\ldots, K, \; t = 1, \ldots, T. \qquad (6)$$

O custo de uma coluna que representa um padrão de corte é a perda corresponde à esse padrão de corte: $c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^{m} l_i\, \alpha_{ijk}$, isto é, a perda no j-ésimo padrão de corte do objeto tipo k. O custo de antecipação da produção de um item de um período para um período imediatamente anterior é dado por $c_{it}^{r} = \alpha\, l_i$. O custo de estoque de um objeto que não foi utilizado em um certo período e ficará disponível no próximo período é dado por $c_{kt}^{s} = \beta\, L_k$. Os parâmetros α e β foram definidos para analisarmos a influência dos custos de estoque no modelo proposto.

A função objetivo (3) minimiza a perda total de material, em todos os períodos, e os custos de estoque de itens e objetos. A antecipação do corte de alguns itens pode aumentar o custo de estoque de itens (c_{it}^{r}), por outro lado, pode permitir melhor combinação de itens, o que minimiza a perda total. O conjunto de restrições (4) garante que a demanda original seja atendida e (5) garante que a disponibilidade em estoque de cada tipo de objeto não seja excedida. Objetos em estoque não utilizados ao final de um período t ficam disponíveis no período t+1, com uma "penalidade", isto é, o custo de estoque c_{kt}^{s}. Se desconsiderarmos os custos de estoque, há uma tendência a antecipação da produção dos itens, que será limitada pela disponibilidade de estoque dos objetos. Custos de estocagem $\boldsymbol{c}^r$ e $\boldsymbol{c}^s$ são parâmetros a serem ajustados pelo tomador de decisão, de acordo com as necessidades reais da indústria.

2.2 Generalização do modelo de fluxo em arco (GFA)

Valério de Carvalho (1999, 2002) considerou o problema de *bin-packing* no qual as variáveis que correspondem aos itens de um certo tipo são indexados pela posição física que elas ocupam no objetos maiores, isto é, uma variável representa , i. e., a variável representa o posicionamento de um item a uma dada distância da borda do rolo.

Baseado nesse princípio de posição-índice, Valério de Carvalho (1999, 2002) apresentou uma formulação em fluxo em arcos. Considerando os dados descritos na seção anterior, encontrar um padrão de corte válido nesse modelo é equivalente a encontrar um caminho no grafo orientado acíclico G=(V,A), com um conjunto de vértices V={0,1,..., L_{max}}, onde $L_{max}=max\{L_k\}$ é o comprimento do maior objeto; e o conjunto de arcos A é definido como: existe um arco direto entre dois vértices se existir um item de tamanho correspondente ($A=\{(j,k):0\leq j<h\leq L_{max}$ *e* $h\text{-}j=l_i$ *para todo* $1\leq i\leq m\}$). Além disso, existem arcos adicionais, que são arcos de perda (j, j+1), j=0,1,...,L_{max}-1. Há um padrão em um único objeto de comprimento L_k se existir um caminho entre os vértices 0 e L_k. O comprimento dos arcos que constituem o caminho define o tamanho dos itens a serem cortados. No mesmo conjunto de vértices, considere arcos diretos do vértice L_k para o vértice 0, se houver um objeto de comprimento L_k , k=1, . . . , K.

Agora, apresentamos a generalização da formulação em fluxo em arcos para o problema de corte de estoque multiperíodo. Considere as seguintes variáveis adicionais:

- f_{kt}: número de objetos de comprimento L_k cortados no período t (pode ser visto como um arco de retorno do vértice L_k para o vértice 0);
- z_{jht}: número de itens de tamanho *(h-j)* alocados em qualquer objeto a uma distância j do início do objeto, considerando todos os padrões de corte no período t.

Modelo (GFA):

$$\text{Minimizar}\ (\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} L_k f_{kt} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{(j,j+l_i)\in A} l_i\, z_{j,j+l_i,t}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{r} r_{it} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} c_{kt}^{s} s_{it} \qquad (7)$$

Sujeito a :

$$-\sum_{(0,h)\in A} z_{0ht} = -\sum_{k=1}^{K} f_{kt} \qquad t=1,,...,T \qquad (8)$$

$$\sum_{(j,h)\in A} z_{jht} - \sum_{(h,g)\in A} z_{hgt} = 0 \qquad h=1,...,Lmax\text{-}1(h\neq L_k,\forall k)\ t=1,...,T \qquad (9)$$

$$\sum_{(j,L_k)\in A} z_{jL_k t} + \sum_{(L_k,h)\in A} z_{L_k ht} = -f_{kt} \qquad k=1,,...,K,\ \ t=1,,...,T \qquad (10)$$

$$\sum_{(j,j+l_i)\in A} z_{j,j+l_i,t} + r_{it-1} - r_{it} = d_{it} \qquad k=1,,...,K,\ \ t=1,,...,T \qquad (11)$$

$$f_{kt} - s_{kt-1} + s_{kt} = e_{kt} \qquad k=1,,...,\ K,\ \ t=1,...,T \qquad (12)$$

$$f_{kt} \in Z_+ \quad s_{kt} \in R_+ \qquad k=1,,...,K,\ t=1,...,T \qquad (13)$$

$$r_{it} \in R_+ \qquad i=1,,...,\ m,\ t=1,...,T \qquad (14)$$

$$z_{jht} \in Z_+ \qquad (j,h) \in A,\ \ t=1,...,T. \qquad (15)$$

A função objetivo (7) minimiza a perda total de material (primeira parcela) e os custos de estoque de itens e de objetos. O conjunto de restrições (8)-(10) são restrições de conservação de fluxo. O conjunto de restrições (11) e (12) são equivalentes a (4) e (5), respectivamente e garantem que a demanda seja atendida. As restrições (12) garantem que a disponibilidade em estoque seja respeitada.

3. Método heurístico

O modelo (3)-(6) foi resolvido com método simplex com geração de colunas, com a condição de integralidade sobre as variáveis $\mathbf{x}_{jkt}$ relaxada (eq (6)). Poldi (2007) propôs duas abordagens para obtenção de solução inteira para o problema de corte de estoque multiperíodo, baseada em horizonte rolante. Apresentamos a seguir a melhor, dentre as duas estratégias propostas em Poldi (2007), abordagem para arredondamento da solução fracionária para o problema de corte estoque multiperíodo.

Como tratamos de um problema com vários períodos no horizonte de planejamento, a técnica empregada é a de horizonte rolante, ou seja, obtemos uma solução inteira para o primeiro período do horizonte de planejamento e deixamos a solução fracionária para os próximos períodos. Em uma segunda etapa, após o primeiro período já ter sido implementado, novos pedidos podem ser incluídos, ou pedidos podem ser cancelados. Assim, a carteira de pedidos é atualizada e temos um novo problema de corte multiperíodo, que por sua vez será resolvido e terá apenas a solução do seu primeiro período arredondada, ficando a solução dos próximos períodos fracionárias, porém úteis para auxiliar o gerente de produção na tomada de decisões.

Algoritmo

Passo 1:

Resolva o problema de corte de estoque multiperíodo (3)-(6) e considere:

$\mathbf{A}^1$: matriz com os padrões de corte do primeiro período;
$\mathbf{x}^1$: vetor das frequências dos padrões de corte do primeiro período;
$\mathbf{d}^1$: vetor com a demanda original do primeiro período;
$\mathbf{e}^1$: vetor com a disponibilidade dos objetos em estoque no primeiro período;
$\mathbf{r}^1$: vetor com a antecipação de itens para o primeiro período;
n : o número de padrões de corte no primeiro período.

Arredonde todas as componentes do vetor de antecipação de itens r^1 para baixo;
Faça: $\mathbf{dr} = \mathbf{d}^1 + \mathbf{r}^1$, ou seja, armazene no vetor **dr** a demanda original do período 1 mais a quantidade de antecipação, para cada item.

Passo 2:

Arredonde o vetor das frequências: $\mathbf{x}^1$ da seguinte forma:
Seja n o número de padrões de corte no período 1.
Para j = 1, ..., n, faça: $x_j^1 = \lfloor x_j^1 \rfloor$

Passo 3:

Atualize a demanda/produção de itens: **dr**
Atualize a disponibilidade dos objetos em estoque: $\mathbf{e}^1$
Se $\mathbf{A}^1 \geq \mathbf{d}^1$ (ou seja, se atendeu a demanda original)
então PARE.

Passo 4:

Resolva um problema da mochila restrito à **dr** para cada tipo de objeto k disponível em estoque.
Escolha o padrão de corte que apresentar a menor perda, dada por: ϕ
Seja $l_{min} = \min \{ l_1, l_2, ..., l_m \}$, ou seja, o menor item demandado.
Se $\phi \geq l_{min}$ (ou seja, ainda cabem itens no padrão de corte)
então resolva um problema da mochila irrestrita de tamanho ϕ e complete o padrão.
Utilize o padrão de corte construído o número máximo possível de vezes.
Volte ao passo 3.

Fim-do-algoritmo

A outra abordagem de arredondamento, proposta em Poldi (2007), difere desta apresentada aqui apenas no Passo 2, na forma de fazer o arredondamento.

4. Testes computacionais

Foram realizados experimentos computacionais a fim de analisar os modelos propostos e compará-los com a solução lote-por-lote. O algoritmo do método simplex com geração de colunas para solução do modelo GGG foi implementado em Delphi 7 e os testes foram realizados em um i7 com 6Gb RAM. O modelo GFA foi implementado e resolvido usando AMPL/CPLEX.

Gau e Wäscher (1995) propuseram um gerador para problemas de corte de estoque unidimensional, chamado CUTGEN1. No entanto, CUTGEN1 não pode ser usado aqui porque gera exemplares com apenas um comprimento padrão em estoque e estamos lidando com o problema com vários comprimentos de objetos em estoque. Foi desenvolvido um gerador aleatório com base em CUTGEN1 (Poldi e Arenales (2010)). As instâncias estão divididas em oito classes. Cada classe tem 20 exemplares. A seguir, daremos alguns detalhes sobre como as classes foram construídas e os resultados obtidos.

4.1. O gerador aleatório

Para execução dos testes computacionais, fixamos alguns parâmetros, que estão listados a seguir:

- número de períodos: $T = 3$ e 6;
- número de tipos de objetos em estoque: $K = 3$ e 5;
- número de tipos de itens demandados: $m = 10$ e 20;
- custo de estocar objetos: $c^s_{kt} = \beta L_k$, com β=0; 0,1 e 0,01;
- custo de estocar itens: $c^r_{it} = \alpha l_i$, com α=0; 0,1 e 0,01;

Outros parâmetros necessários para os testes foram gerados aleatoriamente nos seguintes intervalos:

- comprimento dos objetos em estoque: $L_k \in [300, 1000]$;
- comprimento dos itens demandados: $l_i \in [0{,}1\bar{L},\ 0{,}4\bar{L}]$, com $\bar{L} = \frac{\sum_{k=1}^{K} L_k}{K}$;
- disponibilidade em estoque do objeto tipo k, no período de tempo t: $e_{kt} \in [\lceil a_t \rceil, \lceil 2a_t \rceil]$, em que $a_t = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i d_{it}}{\sum_{k=1}^{K} L_k}$;
- demanda dos itens: $d_{it} \in [10, 50]$.

4.2. Resultados

Foram definidas 8 classes de problemas. Para cada classe foram gerados 20 problemas-teste. Estas classes estão especificadas a seguir, na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros de definição das classes de exemplos.

Classe	Número de períodos (T)	Número de objetos (K)	Número de itens (m)
1	3	3	10
2	3	3	20
3	3	5	10
4	3	5	20
5	6	3	10
6	6	3	20
7	6	5	10
8	6	5	20

Os resultados apresentados na Tabela 2 foram obtidos considerando-se os parâmetros: custo de estocar objetos $\beta = 0$ e custo de estocar itens $\alpha = 0$. Assim, o valor da função objetivo apresentado na Tabela 2 refere-se à perda total obtida, já que os custos (de estocagem de objetos e itens) são nulos.

Na Tabela 2 nós consideramos a relaxação linear de dois métodos solução para o problema. A primeira forma de solução é a lote-por-lote que considera cada período individualmente, isto é, em cada período, um problema de corte de estoque é resolvido sem deixar estoque para o próximo período. O segundo método de solução considera o modelo multiperíodo GGG ou GFA. A segunda e terceira colunas apresentam a perda média da solução por relaxação linear das 20 instâncias em cada classe, considerando as abordagens lote-por-lote e multiperíodo, respectivamente. A quarta e quinta colunas são a diferença absoluta e a porcentagem de diferença entre as abordagens, respectivamente. Podemos notar que o modelo mutliperíodo, sem considerar custos de estocagem, ou seja, o modelo está livre para antecipar a produção de itens se eles combinar melhor, de fato obteve soluções melhores com perda menor. Em média, o ganho é de 17, 82%.

Tabela 2: Função objetivo (média dos 20 exemplos em cada classe) $\alpha = \beta = 0$.

Classe	Lote-por-lote (linear)	Multiperíodo (linear)	Diferença	Ganho %
1	124,39	112,91	11,48	9,23 %
2	33,44	30,61	2,83	8,46 %
3	83,18	76,01	7,17	8,62 %
4	11,34	9,59	1,75	15,43 %
5	323,86	255,70	68,16	21,05 %
6	79,61	54,39	25,22	31,68%
7	258,43	199,02	59,41	22,99 %
8	99,46	94,83	4,63	4,66 %
Média	126,71	104,13	22,58	17,82 %

Na Tabela 3 fazemos a mesa comparação, porém considerando a solução inteira do problema. Para resolver esse problema usamos o Cplex com limite de tempo de 10 minutos usando a formulação GFA com critérios de redução (ver detalhes em Valério de Carvalho (1999, 2002)). Nesta tabela, acrescentamos duas colunas: *Gap* % (linear), que representa o *gap* entre a solução inteira e a solução da relaxação linear (veja Tabela 2), e é calculado por:

$$\text{Gap \% (linear)} = \frac{100*(\text{multiperíodo(inteiro)}-\text{multiperíodo(linear)})}{\text{multiperíodo(inteiro)}},$$

e a outra coluna adicional é *Gap* % (Cplex) que representa o *gap* proveniente do pacote Cplex.

Tabela 3: Função objetivo do problema inteiro.

Classe	Lote-por-lote (inteira)	Multiperíodo (inteira)	Diferença	Ganho %	*GAP* % (linear)	*GAP* % (Cplex)
1	150,55	124,40	26,15	17,37%	15,07%	12,70 %
2	92,85	40,25	52,60	56,65%	43,12%	42,57 %
3	94,30	79,30	15,00	15,91%	7,08%	3,52%
4	55,93	62,20	-6,25	-11,17%	63,36%	61,78%
5	500,45	265,80	234,65	46,89%	10,06%	9,05%
6	791,00	2172,41 (3)*	-1381,41	-174,64%	60,75%	60,53%
7	323,30	207,80	115,50	35,73%	8,81%	7,92%
8	15008,15	11235 (7)*	3773,15	25,14%	92,67%	92,66%
Média	2127,07	1773,95	353,67	16,63%	37,62%	36,34%

**O número entre parênteses é o número de exemplares infactíveis.*

Quando comparamos as abordagens multiperíodo e lote-por-lote podemos notar que nas classes ímpares (com 10 tipos de itens demandados) a abordagem multiperíodo é muito melhor que a lote-por-lote. Porém nas classes pares, (com 20 tipos de itens) o pacote Cplex não consegue obter bons resultados ao resolver a formulação multiperíodo GFA. Considerando as classes 6 e 8, em que se tem 6 períodos e 20 itens, o pacote Cplex não consegue uma solução factível para alguns exemplares dentro do limite de tempo estipulado. Acreditamos que estes resultados ruins se devem principalmente ao fato destas instâncias serem suficientemente grandes para criar dificuldades para o pacote computacional, principalmente as instâncias da classe 8, em que se tem 5 objetos. Observa-se que a título de comparação as instancias infactíveis também não foram consideradas na solução lote-por-lote. A partir dos resultados ruins das classes 6 e 8, desenvolvemos algumas heurísticas para tratar instâncias de tamanhos maiores.

4.3. Resultados do método heurístico

Com base nos resultados apresentados na seção anterior observamos que ao resolver o modelo matemático GAF com o Cplex 12.5 é possível obter boas soluções para algumas instâncias. Entretanto, é preciso enfatizar duas limitações. A primeira é o tempo computacional para resolução, que foi limitado em 10 minutos para cada instância. A segunda é a limitação no tamanho das instâncias que foram resolvidas, como podemos ver na Tabela 3, classes 6 e 8. Para contornar essa limitação, apresentamos um método heurístico, que foi descrito na seção 3 e os resultados são apresentados nessa seção.

Como apenas o primeiro período é, de fato, implementado, só ele teve sua solução arredondada. Porém, não basta termos uma solução muito boa para o primeiro e, nos próximos, não conseguirmos manter o padrão de qualidade das soluções. Como não é preciso explicitar solução inteira para os períodos futuros, calculamos duas estimarmos para as perdas nos próximos períodos.

A solução lote-por-lote é dada pela solução do problema com a demanda original em cada período do horizonte de planejamento, sem antecipação de itens.

No problema multiperíodo, o cálculo destas estimativas foi conduzido da seguinte forma. Toda a demanda de itens e disponibilidade de objetos em estoque em todos os períodos do horizonte de planejamento foi somada. Destes valores, foi subtraída a produção do primeiro período, inclusive os itens que foram antecipados para o primeiro período. Desta forma, temos um “super período” que representa os períodos de 2 até P (em que P é o último período). Assim, uma solução para o “super período” nos fornece uma estimativa para as perdas nos períodos finais.

Primeiramente, resolvemos o “super período” por programação linear (relaxação linear). Assim, a perda do primeiro período arredondado somada à perda obtida pela relaxação linear do “super período” nos fornece um limitante para a perda total. Estes valores são dados na Tabela 4, a seguir.

Tabela 4: Valor da função objetivo (perda total) com arredondamento no primeiro período + solução da relaxação linear nos demais períodos.

Classe	Solução lote-por-lote	Solução heurística
1	364,33	155,99
2	207,33	120,71
3	242,14	181,28
4	187,62	176,22
5	886,72	294,42
6	328,45	178,50
7	766,73	381,01
8	447,52	235,24
Média	**428,85**	**215,42**

A seguir, determinamos uma solução inteira para o “super período”. O procedimento utilizado foi o seguinte: rodamos as três versões heurísticas de arredondamento propostas em Poldi e Arenales (2009) e computamos a melhor solução entre as três obtidas. Assim, a perda do primeiro período arredondado somada à perda obtida para a solução inteira do “super período” fornece uma outra estimativa para a perda total. Estes valores são dados na Tabela 5, a seguir.

Tabela 5: Valor da função objetivo (perda total) com arredondamento no primeiro período + arredondamento nos demais períodos.

Classe	Solução lote-por-lote	Solução heurística
1	832,20	411,35
2	721,20	289,25
3	613,65	335,50
4	522,10	345,10
5	2003,65	482,90
6	1524,55	375,30
7	1690,30	573,60
8	1098,70	425,80
Média	**1125,79**	**404,85**

Tabela 6: Tempo computacional (em segundos) para a resolução pelo método heurístico. Tempo total para a execução dos 20 exemplares em cada classe.

Classe	Tempo computacional (segundos)
1	1,832
2	13,801
3	3,439
4	21,145
5	4,477
6	38,671
7	11,462
8	93,551

Assim, podemos notar que o procedimento heurístico conseguiu resolver todos os exemplares propostos, com boa qualidade de solução, obtendo soluções com perdas menores que a abordagem lote-por-lote (veja Tabela 5). A Tabela 6 mostra o tempo computacional para execução da heurística, podemos notar que a heurística exige pouco esforço computacional, enquanto o modelo exato, resolvido pelo Cplex, com 10 minutos de processamento não consegue obter soluções para algumas das classes.

5. Conclusões e propostas

Neste trabalho foi estudado um problema de corte de estoque cuja demanda ocorre ao longo de um horizonte de planejamento finito. Um modelo matemático foi apresentado (generalização do modelo clássico de Gilmore e Gomory (1963)) e a técnica de geração de colunas foi adaptada para resolver o problema multiperíodo proposto (relaxação linear). Outra generalização foi proposta baseada no modelo de fluxo em arcos de Valério de Carvalho (1999, 2002). Experimentos computacionais mostraram que a abordagem multiperíodo para o problema de corte de estoque tem um grande potencial de obter soluções melhores do que a abordagem lote-por-lote, que é a solução usada em muitas situações práticas hoje em dia. Experimentos computacionais também mostraram que o método heurístico apresentado gera boas soluções inteiras para o problema multiperíodo baseado no modelo de Gilmore e Gomory relaxado, enquanto o algoritmo exato não consegue encontrar soluções para algumas das classes de exemplos. Uma idéia para a investigação futura é estender o método de solução para os problemas de corte de estoque bidimensional bem como a inclusão de restrições de capacidade.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de financiamento FAPESP, CAPES e CNPq.

Referências

Alem, D. J. e Morabito, R. (2012), Production planning in furniture settings via robust optimization, *Computers & Operations Research*, 39, 139-150.

Gau, T., Wäscher, G. (1995), CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem, *European Journal of Operational Research*, 84, 572-579.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961), A linear programming approach to the cutting stock problem, *Operations Research*, 9, 848-859.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1963), A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II, *Operations Research*, 11, 863-888.

Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1965), Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions, *Operations Research*, 13, 94-120.

Gramani, M. C. N. e França, P. M. (2006), The combined cutting stock and lot sizing problem in industrial process, *European Journal of Operational Research*, 74, 509-521.

Gramani, M. C. N., França, P. M. e Arenales, M. N. (2009), A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem, *International Journal of Production Economics*, 119, 219-227.

Gramani, M. C. N., França, P. M. e Arenales, M. N. (2011), A linear optimization approach to the combined production planning model, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 1523-1536.

Kallrath, J., Rebennack, S., Kallrath, J. e Kusche, R. (2014), Solving Real-World Cutting Stock-Problems in the Paper Industry – Mathematical Approaches, Experience and Challenges, *European Journal of Operations Research*, aceito.

Poldi, K. C. (2007), O problema de corte de estoque multiperíodo. *Tese de doutorado,* Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação ICMC/USP – Universidade de São Paulo.

Poldi, K. C. e Arenales, M. N. (2009), Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths, *Computers & Operations Research*, 36, 2074-2081.

Poldi, K. C. e Arenales, M. N. (2010), O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo, *Pesquisa Operacional*, 30, 153-174.

Poltronieri, S. C., Poldi, K. C., Toledo, F. M. B. e Arenales, M. N. (2008), A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry, *Annals of Operations Research*, 157, 91-104.

Valério de Carvalho, J. M. (1999), Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound, *Annals of Operations Research*, 86, 629-659.

Valério de Carvalho, J. M. (2002), LP models for bin packing and cutting stock problems, *European Journal of Operational Research*, 144, 253-273.

Vanzela, M., Rangel, S., Araújo, S. e Carravilla, M. A. (2012), Um estudo de problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque para uma fábrica de móveis de pequeno porte, *Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro – RJ.