



UMA NOVA ABORDAGEM PARA RESOLVER OS SISTEMAS LINEARES DE MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES ITERATIVAMENTE

Carla T. L. S. Ghidini

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: carla@ime.unicamp.br

Marilene Silva

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: marilene@ime.unicamp.br

Aurelio Ribeiro L. Oliveira

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: aurelio@ime.unicamp.br

RESUMO

O método preditor-corretor é uma das variantes mais importante dos métodos de pontos interiores devido à sua eficiência e convergência rápida. Nesse método, é preciso resolver dois sistemas lineares a cada iteração, um para determinar a direção preditora e outro para determinar a direção corretora. Porém, a resolução desses sistemas é o passo que requer mais tempo de processamento e, por isso, deve ser realizada de maneira eficiente. Nesse trabalho, os sistemas lineares do método preditor-corretor são resolvidos por dois métodos do subespaço de Krylov: o MINRES e o método dos gradientes conjugados. Além disso, para uma convergência mais rápida destes métodos o pré-condicionador separador é usado. Experimentos computacionais em um conjunto variado de problemas de programação linear foram realizados com o intuito de analisar a eficiência e robustez da abordagem proposta.

PALAVRAS-CHAVE: método de pontos interiores, sistemas lineares, métodos iterativos.

Programação Matemática

ABSTRACT

The predictor-corrector method is one of the most important variants of interior point methods due to its efficiency and fast convergence. In this method is necessary to solve two linear systems at each iteration, one to determine the predictor direction and other to determine the corrector direction. However, the resolution of these systems is the step that requires more processing time and therefore should be performed efficiently. In this work, the linear systems of the predictor-corrector method are solved by two Krylov subspace methods: MINRES and conjugate gradient method. In addition, the splitting preconditioner is used for a faster convergence of these methods. Computational experiments on a varied set of linear programming problems were performed in order to analyze the efficiency and robustness of the proposed approach.

KEYWORDS: interior point method, linear system, iterative methods.

Mathematical Programming

1 Introdução

Nos métodos de pontos interiores, busca-se a solução ótima de um problema de programação linear percorrendo o interior da região de factibilidade determinada pelas restrições do problema. Os métodos de pontos interiores podem ser classificados em primal, dual e primal-dual, ou ainda, métodos afim escala, redução de potencial e trajetória central (Wright, 1997).

Existem inúmeras variantes do método de pontos interiores. Neste trabalho, o método preditor-corretor (Mehrotra, 1992), que é um método do tipo primal-dual de trajetória central é considerado. O passo mais importante deste método consiste em encontrar as direções preditora e corretora. Para isso, alguns sistemas de equações lineares devem ser resolvidos a cada iteração, o que requer grande esforço computacional. A complexidade computacional pode ser diminuída reduzindo os sistemas lineares a sistemas de equações normais ou sistemas aumentados e aplicando algum método iterativo apropriado para resolvê-los.

Para resolver estes sistemas de forma mais eficiente e, conseqüentemente, solucionar um número maior de problemas de programação linear, dois métodos que utilizam o subespaço de Krylov como subespaço de busca para encontrar uma solução aproximada do sistema são considerados: o MINRES e o método dos gradientes conjugados. Esta estratégia é vantajosa, uma vez que esse subespaço pode ser muito menor que o subespaço de busca completo. Portanto, a abordagem proposta consiste em utilizar, inicialmente, o método dos gradientes conjugados e depois de um certo número de iterações, se o critério pré-estabelecido para troca for satisfeito, o MINRES passa a ser aplicado.

Para que ambos os métodos iterativos tenham um melhor desempenho é realizado o pré-condicionamento da matriz de restrições dos sistemas utilizando o pré-condicionador separador (Oliveira, 2005), o qual foi especialmente desenvolvido para os sistemas lineares oriundos dos métodos de pontos interiores.

O texto está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, descrevemos sobre o método de pontos interiores Preditor-Corretor, como calcular as direções de busca, formas de resolver os sistemas lineares e o pré-condicionador separador. Na Seção 3, apresentamos os métodos de Arnoldi e Lanczos para determinar uma base para o subespaço de Krylov e também os métodos MINRES e Gradientes Conjugados (GC) para resolução dos sistemas lineares. A Seção 4 traz uma descrição dos experimentos computacionais realizados e comentários sobre os resultados obtidos. Na Seção 5, estão as conclusões.

2 Método de Pontos Interiores

Considere o seguinte problema de programação linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^t x \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{posto}(A) = m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Associado ao problema (1), chamado problema primal, temos o problema dual dado por:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & b^t y \\ \text{s.a.} \quad & A^t y + z = c \\ & z \geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis duais livres e $z \in \mathbb{R}^n$ de variáveis de folga.

As condições de otimalidade de primeira ordem (Karush-Kuhn-Tucker) de (1) e (2) são (Wright, 1997):

$$\begin{cases} Ax - b = 0 \\ A^t y + z - c = 0 \\ XZe = 0 \\ (x, z) \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

sendo $X = \text{diag}(x)$, $Z = \text{diag}(z)$ e $e \in \mathbb{R}^n$, tal que $e = (1, 1, \dots, 1)^t$.

O método de pontos interiores primal-dual consiste em aplicar o método de Newton às condições de otimalidade (3), partindo de um ponto interior e mantendo interior a cada iteração. Para determinar a direção afim escala, que é a direção de Newton, é resolvido o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^t & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_a \end{bmatrix}$$

em que $r_p = b - Ax$, $r_d = c - A^t y - z$, $r_a = -XZe$.

Eliminando as variáveis d_z , obtemos o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} -D^{-1} & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d - X^{-1}r_a \\ r_p \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que $D = XZ^{-1}$.

A matriz do sistema aumentado é esparsa, simétrica e indefinida. É possível reduzir o sistema aumentado a um sistema de equações normais utilizando a primeira equação de (4) para eliminar d_x da segunda equação. Assim, obtemos:

$$(ADA^t)d_y = AD(r_d - X^{-1}r_a) + r_p. \quad (5)$$

A solução da equação (5) nos fornece d_y . Uma vez encontrado esse valor, d_x pode ser determinada por substituir d_y na seguinte equação:

$$d_x = DA^t d_y - D(r_d - X^{-1}r_a).$$

Por fim, temos que,

$$d_z = X^{-1}(r_c - Zd_x).$$

A matriz do sistema de equações normais é simétrica e definida positiva.

2.1 Método Preditor-Corretor

O método preditor-corretor desenvolvido por Mehrotra (1992), consiste em utilizar uma direção de busca composta por três componentes: direção afim-escala, direção de centragem e direção de correção não-linear (Adler, 1989). Fazendo a correção não linear e introduzindo a perturbação para centragem, temos o sistema:

$$\begin{aligned} A\bar{d}_x &= 0 \\ A^t\bar{d}_y + \bar{d}_z &= 0 \\ Z\bar{d}_x + X\bar{d}_z &= \mu e - \hat{D}_x\hat{D}_z e. \end{aligned}$$

A direção preditora-corretora é dada por: $d = \hat{d} + \bar{d}$ e determinada resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} Ad_x &= r_p \\ A^t d_y + d_z &= r_d \\ Zd_x + Xd_z &= r_s, \end{aligned}$$

em que $r_s = r_a + \mu e - \hat{D}_x \hat{D}_z e$.

Observações: (i) Os sistemas de equações normais e aumentado para problemas com variáveis canalizadas têm a mesma estrutura dos sistemas apresentados. Portanto, as ideias desenvolvidas aqui podem ser aplicadas a esses problemas. (ii) Múltiplas correções podem ser calculadas de modo a melhorar o método preditor-corretor. Para cada direção adicional é preciso resolver um sistema linear, com a mesma matriz. Para mais detalhes veja (Gondzio, 1996).

2.2 Pré-condicionador Separador

O pré-condicionador separador (Oliveira, 2005) é específico para os sistemas lineares oriundos dos métodos de pontos interiores. Apresenta resultados muito bons próximo a uma solução do problema, mas não é eficiente nas primeiras iterações. Este pré-condicionador é calculado como segue:

Seja $A = [B \ N]P$, em que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de permutação tal que $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não singular, então

$$ADA^t = [B \ N]PDP^t \begin{bmatrix} B^t \\ N^t \end{bmatrix} = [B \ N] \begin{bmatrix} D_B & 0 \\ 0 & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^t \\ N^t \end{bmatrix} = BD_B B^t + ND_N N^t.$$

O pré-condicionador é dado por: $D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1}$ e a matriz pré-condicionada M é como segue:

$$M = D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} (ADA^t) B^{-t} D_B^{-\frac{1}{2}} = I_m + GG^t,$$

em que $G = D_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} ND_N^{\frac{1}{2}}$.

Próximo a uma solução, pelo menos $n - m$ elementos de D são pequenos. Uma estratégia para determinar B é minimizar $\|D_B^{\frac{1}{2}} B^{-1} ND_N^{-\frac{1}{2}}\|$. Este problema é difícil de resolver, mas pode ser resolvido aproximadamente com uma heurística simples: selecione as primeiras m colunas linearmente independente de AD^{-1} com a menor norma 2.

Esta escolha de colunas tende a produzir matrizes melhores condicionadas quando o método de pontos interiores se aproxima de uma solução, onde os sistemas lineares são altamente mal-condicionados.

Para mais detalhes sobre o pré-condicionador separador veja Oliveira (2005).

3 Métodos do Subespaço de Krylov

Considere o sistema linear:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \quad (6)$$

em que \tilde{b} é um vetor do \mathbb{R}^m e \tilde{A} é uma matriz quadrada de ordem m . Sejam \mathcal{K} e \mathcal{L} dois subespaços do \mathbb{R}^m de dimensão m . Uma técnica de projeção consiste em encontrar em $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^m$ uma solução aproximada \hat{x} para (6), de forma que o resíduo $\tilde{b} - \tilde{A}\hat{x}$ seja ortogonal à \mathcal{L} , que é o subespaço de restrições.

Métodos do subespaço de Krylov são baseados em processos de projeção em subespaços de Krylov. O subespaço de Krylov de ordem m associado à \tilde{A} e \tilde{b} é o subespaço gerado pelos vetores da sequência de Krylov: $\mathcal{K}^m(\tilde{A}, \tilde{b}) = \text{span}\{\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \dots, \tilde{A}^{m-1}\tilde{b}\}$.

No método de Krylov, o subespaço \mathcal{K}^m de Krylov é dado por:

$$\mathcal{K}^m(\tilde{A}; r^0) = \text{span}\{r^0, \tilde{A}r^0, \tilde{A}^2r^0, \dots, \tilde{A}^{m-1}r^0\}.$$

em que $r^0 = \tilde{b} - \tilde{A}\tilde{x}^0$ é o resíduo da solução inicial \tilde{x}^0 .

As diferentes versões dos métodos do subespaço de Krylov surgem a partir de diferentes escolhas do subespaço \mathcal{L}^m e das formas pelas quais o sistema é pré-condicionado. Os métodos GC e MINRES foram originados escolhendo $\mathcal{L}^m = \tilde{A}\mathcal{K}^m$.

3.1 Método de Arnoldi

O método de Arnoldi é um método de projeção ortogonal (Meyer, 2000) utilizado para construir uma base ortonormal para o subespaço de Krylov $\mathcal{K}^m(\tilde{A}, \tilde{b})$. Este procedimento começa com $v_1 = \frac{r^0}{\|r^0\|_2}$. Em seguida, calcula-se $\tilde{A}v_1$ e a partir dele constrói-se um vetor ortogonal a v_1 . Normaliza-se este vetor e obtém-se v_2 . Dessa forma, se v_1, \dots, v_j for uma base ortogonal para $\mathcal{K}^j(\tilde{A}, r^0)$, então para encontrar v_{j+1} basta calcular $t = \tilde{A}v_j$ e ortonormalizá-lo com respeito a v_1, \dots, v_j .

Isto produz um método para a criação de uma base ortonormal para $\mathcal{K}^{j+1}(\tilde{A}, r_0)$. Os vetores v_1, \dots, v_{j+1} formam uma base para $\mathcal{K}^{j+1}(\tilde{A}, r_0)$, a menos que t seja igual a zero. A ortogonalização gera a relação expressa em termos de v_j : $\tilde{A}V_{m-1} = V_m H_{m,m-1}$, em que V_j denota a matriz com colunas v_1 até v_j e a matriz $H_{m,m-1}$ é uma matriz Hessenberg superior de ordem $m \times m - 1$, cujos elementos $h_{i,j}$ são definidos pelo método de Arnoldi.

A princípio, o processo de ortogonalização pode ser realizado de diferentes formas, mas normalmente a abordagem mais usada é o processo de Gram-Schmidt (Golub, 1996).

3.2 Método de Lanczos

Assim como o método de Arnoldi, o método de Lanczos (Lanczos, 1950) é utilizado para gerar uma base ortonormal para um subespaço de Krylov associado à \tilde{A} e \tilde{b} . Porém, em Lanczos \tilde{A} deve ser uma matriz simétrica. Note que se \tilde{A} é simétrica, então $H_{m-1,m-1} = V_{m-1}^t \tilde{A} V_{m-1}$ é uma matriz tridiagonal. Assim, durante o processo de ortogonalização de \tilde{A} , vários termos $h_{i,j}$ se anulam, o que reduz H a uma matriz tridiagonal simétrica e faz com que o custo computacional associado à ortogonalização e ao armazenamento sejam reduzidos, em comparação ao método de Arnoldi.

O método de Lanczos é obtido definindo $\alpha_j = h_{j,j}, \beta_j = h_{j-1,j}$. Se T_m denota a matriz H_m resultante então

$$T_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{m-1} & \\ & & \beta_{m-1} & \alpha_m & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

O processo de Lanczos aproxima uma matriz simétrica \tilde{A} à uma matriz simétrica tridiagonal com

em que $Q_k = Q_{k,k+1} \cdots Q_{2,3} Q_{1,2}$ é um produto de matrizes ortogonais, construídas para eliminar β_{k+1} da subdiagonal de $T_{k+1,k}$.

A partir das Rotações de Givens (Golub, 1996) podemos construir a matriz Q_k , tal que $Q_k T_{k+1,k}$ seja uma matriz triangular superior.

O MINRES determina a solução aproximada $\tilde{x}_k \in \mathcal{K}^k(\tilde{A}, \tilde{b})$ do problema original $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ da seguinte forma:

$$\tilde{x}_k = V_k y_k.$$

4 Experimentos Computacionais

Para analisar o desempenho do método preditor-corretor ao resolver problemas de programação linear usando os métodos iterativos GC e MINRES, ambos pré-condicionados pelo pré-condicionador separador foram realizados experimentos computacionais em um Intel Core i5, 4 GB RAM, 2.3GHZ, 225 GB HD, com sistema operacional Linux.

Foi feita uma implementação cuidadosa do método MINRES com reortogonalização, a qual foi comparada com uma implementação do GC já existente.

A linguagem utilizada nas implementações foi a C e os 65 problemas de programação linear testados, pertencentes as coleções Netlib (Gay, 1985), Qaplib (Bukard, 1991), Kennington (Kennington, 1990), STOCHLP (www.sztaki.hu/meszaros/publicftp/lptestset/stochlp) e MISC (www.sztaki.hu/meszaros/publicftp/lptestset/misc), estão no formato MPS e foram lidos usando a biblioteca *Callable* do CPLEX. A dimensão dos problemas após o pré-processamento é dada nas colunas Linha e Coluna das Tabelas 1 e 2.

O método GC não convergiu em nenhum dos problemas testados quando consideramos o sistema aumentado, enquanto o MINRES mostrou-se mais robusto e apresentou bons resultados. Dessa forma, nos experimentos seguintes somente o sistema de equações normais foi considerado.

Continuando os testes, todos os problemas foram resolvidos usando somente o GC, depois somente o MINRES e por fim usando a abordagem proposta (nas tabelas chamamos de híbrido), que consiste em resolver os sistemas nas iterações iniciais usando o GC e quando o número de iterações necessárias para encontrar a solução do sistema pelo GC for maior que o número de linhas da matriz dos coeficientes trocar para o MINRES. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1, que compara o tempo total de resolução e o número de iterações do método preditor-corretor.

Observando os resultados, vemos um melhor desempenho do MINRES com relação ao GC, pois foi mais rápido ou levou o mesmo tempo para resolver todos os problemas resolvidos por ambos métodos. A diferença nos tempos foi significativa na maioria dos problemas. Com relação ao número de iterações os resultados foram muito próximos. Porém, vemos uma grande superioridade da nova abordagem, que resolveu 92% dos problemas, enquanto o MINRES resolveu 37% e o GC 40%. Com relação ao tempo, o método híbrido foi mais rápido que o GC na maioria dos problemas que ambos resolveram e mais lento que o MINRES, exceto em 2 problemas, considerando somente os problemas resolvidos por ambos métodos.

O pré-condicionador separador requer o cálculo da fatoração LU da matriz do sistema. Uma nova fatoração LU é calculada de uma iteração para a outra sempre que os métodos GC e MINRES necessitam de muitas iterações para convergirem. Em Oliveira (2005), é proposto calcular uma segunda fatoração LU quando a primeira fatoração é muito densa a fim de melhorar o desempenho. Esta técnica também foi considerada nos experimentos.

Todos os problemas foram novamente resolvidos das 3 formas mencionadas anteriormente, mas agora fazendo a refatoração da LU. Os novos resultados obtidos estão na Tabela 2.



Problema	Dimensão		GC		MINRES		Híbrido	
	Linha	Coluna	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)	Iter.
adlittle	56	97	*	*	*	*	0.01	13
afiro	27	32	0.00	9	0.00	9	0.00	9
agg	488	163	1.20	36	*	*	0.39	23
agg3	516	302	*	*	*	*	2.17	25
bandm	305	472	*	*	*	*	2.90	47
beaconfd	173	262	*	*	*	*	1.93	64
chr22b	5587	5335	*	*	*	*	30.64	30
chr25a	8149	7825	*	*	*	*	60.26	31
czprob	929	3523	*	*	*	*	0.59	33
els19	4350	9937	*	*	*	*	810.02	31
finnis	497	614	*	*	*	*	1.21	26
fit1d	24	1026	*	*	0.06	24	0.29	25
fit1p	627	1677	*	*	*	*	1.11	23
fit2d	25	10500	*	*	2.48	88	11.18	57
ganges	1309	1681	*	*	*	*	1.37	20
israel	174	142	*	*	*	*	0.48	22
kb2	43	41	0.01	11	*	*	0	11
ken-07	2426	3602	0.60	16	0.27	16	0.54	16
ken11	14694	21349	*	*	*	*	15.91	23
ken13	28632	42659	*	*	*	*	68.33	25
lotfi	153	308	*	*	*	*	3.17	101
nug05	210	225	0.70	8	0.03	8	0.07	8
nug06	372	486	*	*	*	*	0.43	9
nug07	602	931	5.19	12	4.66	14	2.72	12
nug08	912	1632	*	*	*	*	10.45	10
pds-02	2953	7535	4.69	29	2.10	29	4.06	29
pds-06	9881	28655	*	*	*	*	57.87	38
pds-10	16558	48763	*	*	*	*	188.27	54
qap8	912	1632	18.73	10	*	*	9.79	10
recipe	91	180	0.02	11	0.00	11	0.03	11
sc50a	50	48	0.00	10	0.01	10	0.00	10
sc50b	50	48	0.00	9	0.00	10	0.00	9
sc105	105	103	0.01	10	0.01	10	0.01	10
sc205	205	203	0.21	18	*	*	0.04	11
scagr7	129	140	0.01	10	0.01	16	0.01	16
scr15	2234	4635	*	*	*	*	72.19	23
scr20	5079	12180	*	*	*	*	1219.38	24
scsd1	77	760	*	*	0.02	11	0.07	11
scsd6	147	1350	0.14	11	0.05	11	0.15	11
scsd8	397	2750	0.52	11	*	*	0.54	11
scsd8-2b-64	5130	35910	*	*	*	*	17.83	12
scsd8-2c-64	5130	35910	*	*	*	*	20.77	11
scsd8-2r-432	8650	60550	*	*	*	*	48.28	18
sctap1	300	480	0.23	19	0.08	19	0.2	19
sctap2	1090	1880	2.25	24	0.29	17	0.69	17
sctap3	1480	2480	*	*	*	*	1.24	20
share1b	117	225	*	*	*	*	0.15	26
share2b	96	79	*	*	*	*	0.05	12
shell	536	1775	0.53	23	*	*	0.29	23
ship04l	402	2118	0.18	15	0.08	15	0.23	15
ship04s	402	1458	*	*	0.21	20	0.14	16
ship08l	778	4283	*	*	0.37	16	0.6	18
ship08s	778	2387	0.22	16	0.08	16	0.24	16
ship12l	1151	5427	0.71	18	0.26	18	0.76	18
ship12s	1151	2763	0.30	17	0.12	17	0.32	17
standgub	361	1184	0.57	22	0.24	22	0.54	22
standmps	467	1075	1.40	32	0.48	28	0.73	30
stocfor1	117	111	0.05	16	*	*	0.02	13
stocfor2	2157	2031	*	*	*	*	7.91	32
truss	1000	8806	*	*	*	*	11.52	18

Tabela 1: Comparação entre GC, MINRES e Híbrido.

*: significa que o problema não foi resolvido



Problema	Dimensão		GC-R		MINRES-R		Híbrido-R	
	Linha	Coluna	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)	Iter.
adlittle	56	97	*	*	*	*	0.01	13
afiro	27	32	0.00	9	0.00	9	0	9
agg	488	163	*	*	*	*	0.4	23
agg3	516	302	*	*	*	*	2.18	25
bandm	305	472	*	*	*	*	2.9	47
beaconfd	173	262	*	*	*	*	1.95	64
chr22b	5587	5335	*	*	*	*	30.93	30
chr25a	8149	7825	*	*	*	*	61.31	31
czprob	929	3523	*	*	*	*	0.59	33
degen3	1503	1818	*	*	*	*	49.99	20
els19	4350	9937	*	*	*	*	818.56	31
finnis	497	614	*	*	*	*	1.32	26
fit1d	24	1026	*	*	0.28	24	0.3	25
fit1p	627	1677	*	*	*	*	1.16	23
fit2d	25	10500	*	*	15.49	121	11.29	57
fit2p	3000	13525	*	*	*	*	24.36	25
ganges	1309	1681	1.52	20	*	*	1.39	20
israel	174	142	*	*	*	*	0.49	22
kb2	43	41	0.02	11	*	*	0	11
ken11	14694	21349	*	*	*	*	15.77	23
ken13	28632	42659	*	*	*	*	68.47	25
ken18	105127	154699	*	*	*	*	545.33	36
ken-07	2426	3602	0.61	16	0.75	16	0.54	16
lotfi	153	308	*	*	*	*	3.13	101
nug05	210	225	0.08	8	0.09	8	0.07	8
nug06	372	486	0.42	9	0.52	9	0.43	9
nug07	602	931	4.66	14	*	*	2.71	12
nug08	912	1632	*	*	*	*	10.43	10
pds-02	2953	7535	4.68	29	5.57	29	4.06	29
pds-06	9881	28655	*	*	*	*	58.09	38
pds-10	16558	48763	*	*	*	*	187.73	54
pds-20	33874	105728	*	*	*	*	1101.3	73
pds-30	49944	154998	*	*	*	*	2662.31	80
qap8	912	1632	*	*	*	*	9.85	10
recipe	91	180	0.02	11	0.02	11	0.01	11
sc50a	50	48	0.00	10	0.00	10	0.00	10
sc50b	50	48	0.00	9	0.00	9	0.00	9
sc105	105	103	0.01	10	0.00	10	0.00	10
sc205	205	203	*	*	*	*	0.03	11
scagr7	129	140	0.01	10	0.01	16	0.01	16
scr15	2234	4635	*	*	*	*	72.61	23
scr20	5079	12180	*	*	*	*	1224.82	24
scsd1	77	760	*	*	0.06	11	0.05	11
scsd6	147	1350	0.14	11	0.16	11	0.14	11
scsd8	397	2750	0.54	11	*	*	0.55	11
scsd8-2b-64	5130	35910	*	*	*	*	17.86	12
scsd8-2c-64	5130	35910	*	*	*	*	20.76	11
scsd8-2r-432	8650	60550	*	*	*	*	48.4	18
sctap1	300	480	0.25	19	0.26	19	0.2	19
sctap2	1090	1880	2.25	24	0.89	17	0.68	17
sctap3	1480	2480	66.2	91	*	*	11.25	20
share1b	117	225	*	*	*	*	0.15	26
share2b	96	79	0.11	19	0.12	19	0.04	12
shell	536	1775	0.57	23	0.94	24	0.28	23
ship04l	402	2118	0.24	15	0.27	15	0.23	15
ship04s	402	1458	*	*	*	*	0.14	16
ship08l	778	4283	*	*	*	*	0.6	18
ship08s	778	2387	0.25	16	0.28	16	0.24	16
ship12l	1151	5427	0.8	18	0.87	18	0.77	18
ship12s	1151	2763	0.33	17	0.37	17	0.31	17
standgub	361	1184	0.59	22	1.57	23	0.55	22
standmps	467	1075	0.79	30	1.7	29	0.74	30
stocfor1	117	111	0.04	15	0.36	54	0.02	13
stocfor2	2157	2031	*	*	*	*	7.97	32
truss	1000	8806	12.45	18	*	*	11.44	18

Tabela 2: Comparação entre GC, MINRES e Híbrido com refatoração da LU.

*: significa que o problema não foi resolvido

Ao fazer a refatoração, o método híbrido resolveu os 65 problemas testados, ou seja, mais 5 problemas passaram a ser resolvidos. O tempo de resolução aumentou em 38% dos problemas e diminuiu em 25% deles. Com relação ao número de iterações o valor diminuiu em apenas 1 problema, permanecendo igual nos demais. Além disso, com uma nova fatoração, 34% dos problemas foram resolvidos pelo GC, MINRES e híbrido, sendo que em 77% deles o híbrido foi mais rápido, em 18% o tempo foi igual e em 5% o CG foi mais rápido. Os métodos GC e MINRES passaram a resolver 4 novos problemas e deixaram de resolver 3 deles.

5 Conclusões

Neste trabalho, com o objetivo principal de resolver de maneira eficiente os sistemas de equações lineares a cada iteração do método preditor-corretor para acelerar a convergência de tal método e também resolver um maior número de problemas de programação linear, consideramos os métodos iterativos GC e MINRES e uma nova abordagem que utiliza os dois métodos ao mesmo tempo. Ambos métodos iterativos foram pré-condicionados pelo pré-condicionador separador. Consideramos tanto o sistema aumentado quanto o sistema de equações normais.

Os resultados dos experimentos computacionais mostraram que o MINRES é mais robusto que o GC quando o sistema aumentado é considerado. Para o sistema de equações normais com e sem refatoração, o método híbrido mostrou-se bastante robusto e eficiente, uma vez que resolveu todos os problemas com refatoração e 92% deles sem fazer refatoração e foi mais rápido que os métodos GC e MINRES com refatoração. Dessa forma, concluímos que o objetivo proposto foi alcançado e que a nova abordagem pode ser usada com êxito.

Agradecimentos

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- Adler, I. Resende, M.G.C., Veiga, G., Karmarkar, N.** (1989), An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming, *Mathematical Programming* 44, 297-335.
- Burkard, R. S., Karisch, S., Rendl, F.** (1991), Qaplib - a quadratic assignment problem library, *European Journal of Operations Research*, 55, 115-119.
- Gay, D. M.** (1985), Electronic mail distribution of linear programming test problems, *Mathematical Programming Society Committee on Algorithms COAL Newsletter*, 10-12.
- Golub, G. H., Van Loan, C. F.**, *Matrix Computations*. 3^a ed. Baltimore, Md., London: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- Gondzio, J.** (1996), Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming, *Computational Optimization and Applications*, 6, 137-156.
- Kennington, J. L., Niemi, S., Carolan, W. J., Hill, J. E., Wichmann, S. J.** (1990), An empirical evaluation of the korbx algorithms for military airlift applications, *Oper. Res.*, 38, 240-248.
- Lanczos, C.** (1950), An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, *J. Res. Nat. Bureau Standards*, 45, 255-282.
- Mehrotra S.** (1992), On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on Optimization*, 2, 575-601.

Meyer, C. D., *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

Miscellaneous lp models, *Technical report, Hungarian Academy of Sciences OR Lab.* url, www.sztaki.hu/meszaros/publicftp/lptestset/misc.

Oliveira, A. R. L., Sorensen, D. C. (2005), A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming, *Linear Algebra and Its Applications*, 394, 1–24.

Stochastic lp test sets, *Technical report, Hungarian Academy of Sciences OR Lab.* url, www.sztaki.hu/meszaros/publicftp/lptestset/stochlp.

Wright, S. J., *Primal-dual interior-point methods*, SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997.